ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXVIII

1880-81

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME IX.

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1881

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXVIII

1880-81

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME IX.

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1881

Sulle forme ternarie bilineari.

Nota del Socio GIUSEPPE BATTAGLINI

letta nella seduta del 5 dicembre 1880.

Oggetto di questa Nota è la rappresentazione geometrica di una forma ternaria bilineare.

1. Siano in un piano (x_1, x_2, x_3) le coordinate di un punto X, ed in un altro piano (y_1, y_2, y_3) le coordinate di un punto Y, ciascun punto essendo riferito ad una terna fondamentale di rette: ponendo per brevità

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = (Ax), \quad B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3 = (By),$$

una forma bilineare tra le x e le y sarà espressa simbolicamente da $(\varphi\psi) = (Ax)(By)$, intendendo che le *ombre* A_i, B_j (per $i, j = 1, 2, 3$) abbiano significato di quantità solo nelle combinazioni $A_i B_j = B_j A_i$.

L'equazione $(\varphi\psi) = 0$ stabilisce una corrispondenza *correlativa* tra i punti X ed Y dei due piani, essendo corrispondenti due punti quando con le loro coordinate verificano l'equazione proposta. Preso ad arbitrio nel primo piano un punto X, ad esso corrisponderà nel secondo piano un punto qualunque appartenente alla retta y determinata dall'equazione

$$(Ax)\,B_1 y_1 + (Ax)\,B_2 y_2 + (Ax)\,B_3 y_3 = 0\,,$$

che si dirà retta corrispondente al punto X nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questa retta siano

$$(1) \qquad Y_1 = (Ax)\,B_1\,, \quad Y_2 = (Ax)\,B_2\,, \quad Y_3 = (Ax)\,B_3\,;$$

similmente preso ad arbitrio nel secondo piano un punto Y, ad esso corrisponderà nel primo piano un punto qualunque appartenente alla retta x determinata dall'equazione

$$(By)\,A_1 x_1 + (By)\,A_2 x_2 + (By)\,A_3 x_3 = 0\,,$$

che si dirà retta corrispondente al punto Y nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questa retta siano

$$(1) \qquad X_1 = (By)\,A_1\,, \quad X_2 = (By)\,A_2\,, \quad X_3 = (By)\,A_3\,.$$

Se nel primo piano il punto X appartiene alla retta x, o pure nel secondo piano il punto Y appartiene alla retta y, si avrà la condizione $(Xx) = 0$, o pure $(Yy) = 0$, sicchè eliminando le x_i tra la prima di queste equazioni ed il primo sistema delle (1), o pure eliminando le y_i tra la seconda di queste equazioni ed il secondo sistema delle (1), si avrà

$$(2) \quad (\Phi\Psi) = -\begin{vmatrix} A_1B_1, & A_2B_1, & A_3B_1, & Y_1 \\ A_1B_2, & A_2B_2, & A_3B_2, & Y_2 \\ A_1B_3, & A_2B_3, & A_3B_3, & Y_3 \\ X_1\;, & X_2\;, & X_3\;, & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o pure} \quad (\Psi\Phi) = -\begin{vmatrix} B_1A_1, & B_2A_1, & B_3A_1, & X_1 \\ B_1A_2, & B_2A_2, & B_3A_2, & X_2 \\ B_1A_3, & B_2A_3, & B_3A_3, & X_3 \\ Y_1\;, & Y_2\;, & Y_3\;, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Segue da ciò che ponendo

$$(A,B)=\begin{vmatrix} A_1B_1, & A_2B_1, & A_3B_1 \\ A_1B_2, & A_2B_2, & A_3B_2 \\ A_1B_3, & A_2B_3, & A_3B_3 \end{vmatrix}, \qquad (B,A)=\begin{vmatrix} B_1A_1, & B_2A_1, & B_3A_1 \\ B_1A_2, & B_2A_2, & B_3A_2 \\ B_1A_3, & B_2A_3, & B_3A_3 \end{vmatrix},$$

ed indicando con $a_i b_j = b_j a_i$ l'elemento reciproco dell'elemento $A_i B_j = B_j A_i$ del determinante $(A,B)=(B,A)$, l'una o l'altra delle equazioni (2) diverrà $(\Phi\Psi)=(aX)(bY)=0$. Il determinante $(A,B)=(B,A)$ si dirà il *discriminante* della forma bilineare $(\varphi\psi)$, e la forma bilineare $(\Phi\Psi)$ tra le X e le Y si dirà forma *congiunta* della forma $(\varphi\psi)$.

L'equazione $(\Phi\Psi)=0$ stabilisce una corrispondenza *correlativa* tra le rette x ed y dei due piani, essendo corrispondenti due rette quando con le loro coordinate verificano l'equazione proposta. Presa ad arbitrio nel primo piano la retta x, ad essa corrisponderà nel secondo piano una retta qualunque appartenente al punto Y determinato dall'equazione

$$(aX)\,b_1 Y_1 + (aX)\,b_2 Y_2 + (aX)\,b_3 Y_3 = 0,$$

che si dirà punto corrispondente alla retta x nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questo punto siano

$$(3) \qquad y_1=(aX)\,b_1, \qquad y_2=(aX)\,b_2, \qquad y_3=(aX)\,b_3;$$

similmente presa ad arbitrio nel secondo piano la retta y, ad essa corrisponderà nel primo piano una retta qualunque appartenente al punto X determinato dall'equazione

$$(bY)\,a_1 X_1 + (bY)\,a_2 X_2 + (bY)\,a_3 X_3 = 0,$$

che si dirà punto corrispondente alla retta y nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questo punto siano

$$(3) \qquad x_1=(bY)\,a_1, \qquad x_2=(bY)\,a_2, \qquad x_3=(bY)\,a_3.$$

Indicando con $[\varphi\psi]=[\psi\varphi]$, e con $(a,b)=(b,a)$ la forma congiunta, ed il discriminante della forma $(\Phi\Psi)=(\Psi\Phi)$, vale a dire ponendo

$$(4) \quad [\varphi\psi]=-\begin{vmatrix} a_1b_1, & a_2b_1, & a_3b_1, & y_1 \\ a_1b_2, & a_2b_2, & a_3b_2, & y_2 \\ a_1b_3, & a_2b_3, & a_3b_3, & y_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{o pure} \quad [\psi\varphi]=-\begin{vmatrix} b_1a_1, & b_2a_1, & b_3a_1, & x_1 \\ b_1a_2, & b_2a_2, & b_3a_2, & x_2 \\ b_1a_3, & b_2a_3, & b_3a_3, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3, & 0 \end{vmatrix},$$

$$(a,b)=\begin{vmatrix} a_1b_1, & a_2b_1, & a_3b_1 \\ a_1b_2, & a_2b_2, & a_3b_2 \\ a_1b_3, & a_2b_3, & a_3b_3 \end{vmatrix}, \quad \text{o pure} \quad (b,a)=\begin{vmatrix} b_1a_1, & b_2a_1, & b_3a_1 \\ b_1a_2, & b_2a_2, & b_3a_2 \\ b_1a_3, & b_2a_3, & b_3a_3 \end{vmatrix},$$

sarà $[\varphi\psi]=(A,B)\,(\varphi\psi)=[\psi\varphi]=(B,A)\,(\psi\varphi)$, $(a,b)=(b,a)=(A,B)^2=(B,A)^2$, e l'elemento reciproco dell'elemento $a_i b_j = b_j a_i$ del determinante $(a,b)=(b,a)$ sarà eguale all'elemento $A_i B_j = B_j A_i$ del determinante $(A,B)=(B,A)$ moltiplicato per lo stesso determinante. Allorchè il discriminante della forma bilineare $(\varphi\psi)$ è diverso da zero, si potrà supporre eguale all'unità, introducendo nei coefficienti della forma un fattore conveniente, ed allora la forma $(\varphi\psi)$ ed il determinante (A,B) si dedurranno dalla forma $(\Phi\Psi)$ e dal determinante (a,b), come viceversa $(\Phi\Psi)$ e (a,b) si sono dedotti da $(\varphi\psi)$ ed (A,B).

Se tra le coordinate di tre punti X, X′, X″ appartenenti ad una retta, o di tre rette x, x', x'' appartenenti ad un punto, del primo piano si hanno le relazioni

(5) $$x_i = \omega' x'_i + \omega'' x''_i, \qquad X_i = \Omega' X'_i + \Omega'' X''_i,$$

tra le coordinate delle tre rette corrispondenti nella correlazione y, y', y'', che apparterranno ad uno stesso punto, o dei tre punti corrispondenti nella correlazione Y, Y′, Y″, che apparterranno ad una stessa retta, del secondo piano si avranno le relazioni

(5) $$Y_i = \omega' Y'_i + \omega'' Y''_i, \qquad y_i = \Omega' y'_i + \Omega'' y''_i,$$

e viceversa; e se tra le coordinate di quattro punti qualunque X, X′, X″, X‴, o di quattro rette qualunque x, x', x'', x''' del primo piano si hanno le relazioni

(6) $$x_i = \omega' x'_i + \omega'' x''_i + \omega''' x'''_i, \qquad X_i = \Omega' X'_i + \Omega'' X''_i + \Omega''' X'''_i,$$

tra le coordinate delle quattro rette corrispondenti nella correlazione y, y', y'', y''', o dei quattro punti corrispondenti nella correlazione Y, Y′, Y″, Y‴, del secondo piano si avranno le relazioni

(6) $$Y_i = \omega' Y'_i + \omega'' Y''_i + \omega''' Y'''_i, \qquad y_i = \Omega' y'_i + \Omega'' y''_i + \Omega''' y'''_i,$$

e viceversa.

Prendendo per terne fondamentali nei due piani terne di punti e di rette corrispondenti nella correlazione, le equazioni della forma bilineare proposta, e della sua congiunta, prenderanno la forma *canonica*

(7) $$\begin{aligned}(\varphi\psi) &= A_1 B_1 x_1 y_1 + A_2 B_2 x_2 y_2 + A_3 B_3 x_3 y_3 = 0,\\ (\Phi\Psi) &= a_1 b_1 X_1 Y_1 + a_2 b_2 X_2 Y_2 + a_3 b_3 X_3 Y_3 = 0,\end{aligned}$$

e tra le coordinate dei punti e delle rette corrispondenti nella correlazione si potranno supporre relazioni della forma

(8) $$x_1 : x_2 : x_3 :: Y_1 : Y_2 : Y_3 :: \omega' : \omega'' : \omega''', \qquad X_1 : X_2 : X_3 :: y_1 : y_2 : y_3 :: \Omega' : \Omega'' : \Omega'''.$$

La corrispondenza correlativa tra i punti X con le rette x del primo piano e le rette y con i punti Y del secondo piano è definita adunque dal sistema delle due equazioni $(\varphi\psi) = 0$, e $(\Phi\Psi) = 0$. Il primo, o il secondo, sistema delle formole (1) e (3) servono per passare dai punti e dalle rette del primo, o del secondo, piano alle rette ed ai punti corrispondenti nella correlazione del secondo, o del primo, piano. Nella corrispondenza correlativa fra due piani ad ogni punto, o ad ogni retta, in ciascuno dei due piani corrisponde una retta, o un punto, nell'altro piano; e se più punti appartengono ad una stessa retta, o più rette appartengono ad uno stesso punto, le rette corrispondenti apparterranno al punto corrispondente a quella retta, o i punti corrispondenti apparterranno alla retta corrispondente a quel punto. Le forme geometriche, (punteggiate e fasci di rette) che si corrispondono così nella correlazione sono proiettive. La costruzione di due figure correlative in due piani si otterrà facilmente allorchè si conoscano quattro punti, o quattro rette, qualunque della prima figura e le quattro rette, o i quattro punti, corrispondenti della seconda figura.

Ponendo per un punto X, e per una retta x nel primo piano (con $i = 1,2,3$)

(9) $$x_i = \omega' x'_i + \omega'' x''_i, \qquad X_i = \Omega' X'_i + \Omega'' X''_i,$$

le coordinate della retta y corrispondente al punto X, e del punto Y corrispondente alla retta x, nel secondo piano saranno rispettivamente

$$(10) \qquad Y_i = \omega'(Ax')B_i + \omega''(Ax'')B_i, \qquad y_i = \Omega'(aX')b_i + \Omega''(aX'')b_i;$$

o pure viceversa ponendo

$$(9) \qquad y_i = \omega' y'_i + \omega'' y''_i, \qquad Y_i = \Omega' Y'_i + \Omega'' Y''_i$$

sarà

$$(10) \qquad X_i = \omega'(By')A_i + \omega''(By'')A_i, \qquad x_i = \Omega'(bY')a_i + \Omega''(bY'')a_i,$$

sicchè indicando con $A'B' = B'A'$, $A''B'' = B''A''$, ... simboli equivalenti ad $AB = BA$, con $a'b' = b'a'$, $a''b'' = b''a''$, ... simboli equivalenti ad $ab = ba$, con x ed y le rette cui appartengono sempre rispettivamente il punto X, ed il punto Y, variando $\omega' : \omega''$, e con X ed Y i punti cui appartengono sempre rispettivamente la retta x, e la retta y, variando $\Omega' : \Omega''$, si troverà eliminando dal primo o dal secondo sistema delle (10) ω', ω'' ed Ω', Ω''

$$(11) \quad \begin{cases} (\Phi\Psi) = (A'x')(A''x'')(B'B''Y) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(A'x'), & (A''x') \\ (A'x''), & (A''x'')\end{vmatrix}(B'B''Y) = \frac{1}{2}(A'A''X)(B'B''Y) = 0, \\ (\varphi\psi) = (a'X')(a''X'')(b'b''y) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(a'X'), & (a''X') \\ (a'X''), & (a''X'')\end{vmatrix}(b'b''y) = \frac{1}{2}(a'a''x)(b'b''y) = 0, \end{cases}$$

o pure viceversa

$$(11) \quad \begin{cases} (\Psi\Phi) = (B'y')(B''y'')(A'A''X) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(B'y'), & (B''y') \\ (B'y''), & (B''y'')\end{vmatrix}(A'A''X) = \frac{1}{2}(B'B''Y)(A'A''X) = 0, \\ (\psi\varphi) = (b'Y')(b''Y'')(a'a''x) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(b'Y'), & (b''Y') \\ (b'Y''), & (b''Y'')\end{vmatrix}(a'a''x) = \frac{1}{2}(b'b''y)(a'a''x) = 0, \end{cases}$$

come si otterrebbe ancora trasformando simbolicamente i determinanti (2) e (4) per mezzo delle relazioni

$$a_i b_j = \tfrac{1}{2}(A'A'')_i (B'B'')_j, \quad A_i B_j = \tfrac{1}{2}(a'a'')_i (b'b'')_j.$$

Si avrà poi con analoghe trasformazioni

$$(12) \quad \begin{cases} (A,B) = A'_1 A''_2 A'''_3 (B'B''B''') = \frac{1}{6}(A'A''A''')(B'B''B'''), \\ (a,b) = a'_1 b''_2 a'''_3 (b'b''b''') = \frac{1}{6}(a'a''a''')(b'b''b'''), \end{cases}$$

o pure viceversa

$$(12) \quad \begin{cases} (B,A) = B'_1 B''_2 B'''_3 (A'A''A''') = \frac{1}{6}(B'B''B''')(A'A''A'''), \\ (b,a) = b'_1 b''_2 b'''_3 (a'a''a''') = \frac{1}{6}(b'b''b''')(a'a''a'''). \end{cases}$$

Supponiamo che sia il determinante $(A, B) = (B, A) = 0$, e dinotiamo come sopra con $a_i b_j = b_j a_i$ l'elemento reciproco dell'elemento $A_i B_j = B_j A_i$ di questo determinante. In tal caso si vedrà, per le formole (1), che nella correlazione definita dall'equazione $(\varphi\psi) = 0$, pel punto singolare X^0 del primo piano, e pel punto singolare Y^0 del secondo piano, di cui le coordinate sono date rispettivamente da

$$(13) \qquad \frac{x_1^0}{a_1 b_j} = \frac{x_2^0}{a_2 b_j} = \frac{x_3^0}{a_3 b_j}, \ (j=1,2,3); \quad \frac{y_1^0}{b_1 a_i} = \frac{y_2^0}{b_2 a_i} = \frac{y_3^0}{b_3 a_i}, \ (i=1,2,3)$$

la retta corrispondente y del secondo piano, e la retta corrispondente x del primo piano, sono indeterminate; a tutti i punti X del primo, o Y del secondo piano, che

sono per dritto col punto singolare, corrisponderà una stessa retta y del secondo, o x del primo piano, appartenente al punto singolare. In tal caso la forma $(\Phi\Psi)$, congiunta della forma proposta $(\varphi\psi)$, si decompone nei due fattori di primo grado $(x^0 X)(y^0 Y)$. Analogamente si potrà supporre invece che sia il determinante $(a, b) = (b, a) = 0$, dinotando con $A_i B_j = B_j A_i$ l'elemento reciproco dell'elemento $a_i b_j = b_j a_i$ di questo determinante: in tal caso si vedrà, per le formole (3), che nella correlazione definita dall'equazione $(\Phi\Psi)=0$ per la retta singolare x^0 del primo piano, e per la retta singolare y^0 del secondo piano, di cui le coordinate sono date rispettivamente da

$$(13) \qquad \frac{X_1^0}{A_1 B_j} = \frac{X_2^0}{A_2 B_j} = \frac{X_3^0}{A_3 B_j}, \ (j=1,2,3); \ \frac{Y_1^0}{B_1 A_i} = \frac{Y_2^0}{B_2 A_i} = \frac{Y_3^0}{B_3 A_i}, \ (i=1,2,3)$$

il punto corrispondente Y del secondo piano, ed il punto corrispondente X del primo piano, sono indeterminati; a tutte le rette x del primo, o y del secondo piano, che concorrono sulla retta singolare, corrisponderà uno stesso punto Y del secondo, o X del primo piano, appartenente alla retta singolare. In tal caso la forma $(\varphi\psi)$, congiunta della forma proposta $(\Phi\Psi)$, si decompone nei due fattori di primo grado $(X_0 x)(Y^0 y)$.

Finalmente supponiamo che si annullino tutti i determinanti minori $a_i b_j = b_j a_i$ del determinante $(A, B) = (B, A)$; allora, per la correlazione $(\varphi\psi) = 0$, nel primo piano vi saranno infiniti punti singolari X, appartenenti ad una stessa retta singolare, per ciascuno dei quali la retta corrispondente y del secondo piano è indeterminata, e nel secondo piano vi saranno infiniti punti singolari Y, appartenenti ad una stessa retta singolare, per ciascuno dei quali la retta corrispondente x del primo piano è indeterminata. Le rette singolari del primo e del secondo piano sono determinate rispettivamente dalle equazioni

$$(14) \qquad (Ax)\,B_j = 0\,,\ (j = 1, 2, 3)\ ; \qquad (By)\,A_i = 0\,,\ (i = 1, 2, 3)\,.$$

Per ogni punto non singolare X del primo, o Y del secondo piano, la retta corrispondente y del secondo, o x del primo piano, coinciderà sempre con la retta determinata dalle equazioni

$$(15) \qquad \frac{Y_1}{A_i B_1} = \frac{Y_2}{A_i B_2} = \frac{Y_3}{A_i B_3}, \ (i=1,2,3), \ \text{o pure} \ \frac{X_1}{B_j A_1} = \frac{X_2}{B_j A_2} = \frac{X_3}{B_j A_3}, \ (j=1,2,3)$$

cioè con la retta singolare del secondo, o del primo piano. Questo caso ha luogo quando la forma bilineare proposta si decompone in due fattori di primo grado; allora la forma $(\Phi\Psi)$ congiunta di $(\varphi\psi)$ si annulla identicamente. — Analogamente per la correlazione $(\Phi\Psi)=0$, allorchè si annullano tutti i determinanti minori $A_i B_j = B_j A_i$ del determinante $(a,b)=(b,a)$.

2. Supponiamo ora che il primo ed il secondo piano coincidano tra loro, e riferendo i punti e le rette ad una stessa terna fondamentale di rette e di punti, consideriamo le due forme bilineari congiunte

$$(\varphi\psi) = (Ax)\,(By) = \tfrac{1}{2}\,(a'a''x)\,(b'b''y) = 0, \ (\Phi\Psi) = (aX)\,(bY) = \tfrac{1}{2}\,(A'A''X)\,(B'B''Y) = 0.$$

Nella correlazione delle due figure nel piano, definita da queste equazioni, il luogo dei punti V ai quali appartengono le rette corrispondenti v, e l'inviluppo delle rette

v alle quali appartengono i punti corrispondenti V, sono rispettivamente di 2° ordine e di 2ª classe, e rappresentati dalle equazioni

$$(1)\quad (\theta\theta)=(\mathrm{A}v)(\mathrm{B}v)=\tfrac{1}{2}(a'a''v)(b'b''v)=0,\quad (\Theta\Theta)=(a\mathrm{V})(b\mathrm{V})=\tfrac{1}{2}(\mathrm{A'A''V})(\mathrm{B'B''V})=0;$$

le due rette x ed y di $(\Theta\Theta)$ appartenenti ad un punto V di $(\theta\theta)$ sono le rette che corrispondono nella correlazione al punto V, passando dalla seconda figura alla prima, e dalla prima figura alla seconda; similmente i due punti X ed Y di $(\theta\theta)$ appartenenti ad una retta v di $(\Theta\Theta)$ sono i punti che corrispondono nella correlazione alla retta v, passando dalla seconda figura alla prima, e dalla prima figura alla seconda: segue da ciò che se le due rette di $(\Theta\Theta)$ appartenenti ad un punto qualunque V determinano in $(\theta\theta)$ le coppie di punti (X′, Y′), (X″, Y″), saranno X′X″ ed Y′Y″ le rette che nella correlazione corrispondono al punto V; e se V è un punto di $(\Theta\Theta)$, e la retta di $(\Theta\Theta)$ che gli appartiene determina in $(\theta\theta)$ la coppia di punti (X, Y), le tangenti di $(\theta\theta)$ in questi punti saranno le rette che nella correlazione corrispondono al punto V: similmente se i due punti di $(\theta\theta)$ appartenenti ad una retta qualunque v determinano in $(\Theta\Theta)$ le coppie di rette (x', y'), (x'', y''), saranno $x'x''$ ed $y'y''$ i punti che nella correlazione corrispondono alla retta v; e se v è una tangente di $(\theta\theta)$, ed il punto di $(\theta\theta)$ che le appartiene determina in $(\Theta\Theta)$ la coppia di rette (x, y), i punti di contatto di $(\Theta\Theta)$ con queste rette saranno i punti che nella correlazione corrispondono alla retta v. È facile dedurre dalle cose dette che le due linee (1) di 2° ordine e di 2ª classe hanno tra loro doppio contatto, come risulta ancora dal calcolo seguente.

L'equazione di $(\theta\theta)$ in coordinate di punti, e l'equazione di $(\Theta\Theta)$ in coordinate di rette essendo rispettivamente

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 v_1^2 + \ldots + (\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3 + \mathrm{A}_3\mathrm{B}_2)\,v_2 v_3 + \ldots = 0,\\ &a_1 b_1 \mathrm{V}_1^2 + \ldots + (a_2 b_3 + a_3 b_2)\,\mathrm{V}_2\mathrm{V}_3 + \ldots = 0,\end{aligned}$$

l'equazione di $(\theta\theta)$ in coordinate di rette, e l'equazione di $(\Theta\Theta)$ in coordinate di punti saranno rispettivamente

$$\begin{vmatrix} 2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1, & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2+\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1, & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_3+\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1, & \mathrm{V}_1\\ \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1+\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2, & 2\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2, & \mathrm{A}_2\mathrm{B}_3+\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2, & \mathrm{V}_2\\ \mathrm{A}_3\mathrm{B}_1+\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3, & \mathrm{A}_3\mathrm{B}_2+\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3, & 2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3, & \mathrm{V}_3\\ \mathrm{V}_1, & \mathrm{V}_2, & \mathrm{V}_3, & 0 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2a_1b_1, & a_1b_2+a_2b_1, & a_1b_3+a_3b_1, & v_1\\ a_2b_1+a_1b_2, & 2a_2b_2, & a_2b_3+a_3b_2, & v_2\\ a_3b_1+a_1b_3, & a_3b_2+a_2b_3, & 2a_3b_3, & v_3\\ v_1, & v_2, & v_3, & 0 \end{vmatrix}=0;$$

sviluppando ed introducendo simboli equivalenti ad AB, ab, verrà

$$(2)\quad 2(\mathrm{A'A''V})(\mathrm{B'B''V})-(\mathrm{A'B'V})(\mathrm{A''B''V})=0,\ 2(a'a''v)(b'b''v)-(a'b'v)(a''b''v)=0,$$

ovvero

$$(\Theta\Theta)-\tfrac{1}{4}(\mathrm{ABV})^2=0,\qquad (\theta\theta)-\tfrac{1}{4}(abv)^2=0;$$

adunque le due linee (1) di 2° ordine e di 2ª classe hanno tra loro doppio contatto; il punto d'incontro V^0 delle due loro tangenti comuni v', v'', e la retta congiungente v^0 dei due loro punti comuni V′, V″, hanno rispettivamente per equazioni

$$(3)\qquad (\mathrm{ABV})=0,\quad \text{ed}\quad (abv)=0.$$

A ciascuno dei punti V^0, V', V'' corrisponde nella correlazione una stessa retta v^0, v', v'', passando dalla prima figura alla seconda, o dalla seconda figura alla prima; per trovare direttamente questi punti e queste rette *involutorie* si porranno le condizioni

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{(Av)\,B_1}{(Bv)\,A_1} = \frac{(Av)\,B_2}{(Bv)\,A_2} = \frac{(Av)\,B_3}{(Bv)\,A_3} = -\frac{m}{n}\,, \\ \frac{(aV)\,b_1}{(bV)\,a_1} = \frac{(aV)\,b_2}{(bV)\,a_2} = \frac{(aV)\,b_3}{(bV)\,a_3} = -\frac{M}{N}\,, \end{aligned}$$

dalle quali eliminando le v_i e le V_i si troverà successivamente

$$\begin{vmatrix} m A_1 B_1 + n B_1 A_1\,, & m A_1 B_2 + n B_1 A_2\,, & m A_1 B_3 + n B_1 A_3 \\ m A_2 B_1 + n B_2 A_1\,, & m A_2 B_2 + n B_2 A_2\,, & m A_2 B_3 + n B_2 A_3 \\ m A_3 B_1 + n B_3 A_1\,, & m A_3 B_2 + n B_3 A_2\,, & m A_3 B_3 + n B_3 A_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} (m^3 + n^3)\,(A'A''A''')\,(B'B''B''') + 3\,mn\,(m+n)\,(A'A''B''')\,(B'B''A''') = 0\,, \\ (m+n)\Big[(m^2+n^2)\,(A,\,B) - mn\Big\{(A,B) - (aB)\,(bA)\Big\}\Big] = 0\,, \end{aligned}$$

ed

$$\begin{vmatrix} M a_1 b_1 + N b_1 a_1\,, & M a_1 b_2 + N b_1 a_2\,, & M a_1 b_3 + N b_1 a_3 \\ M a_2 b_1 + N b_2 a_1\,, & M a_2 b_2 + N b_2 a_2\,, & M a_2 b_3 + N b_2 a_3 \\ M a_3 b_1 + N b_3 a_1\,, & M a_3 b_2 + N b_3 a_2\,, & M a_3 b_3 + N b_3 a_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} (M^3 + N^3)\,(a'a''a''')\,(b'b''b''') + 3\,MN\,(M+N)\,(a'a''b''')\,(b'b''a''') = 0\,, \\ (M+N)\Big[(M^2+N^2)\,(a,\,b) - MN\Big\{(a,\,b) - A(b)\,(Ba)\Big\}\Big] = 0\,. \end{aligned}$$

Le equazioni (5) si vedrà facilmente che hanno le stesse radici. Per ciascuna radice $\frac{m}{n}$, o $\frac{M}{N}$ di queste equazioni le (4) determineranno un punto, o una retta, che ha nella correlazione la stessa retta corrispondente, o lo stesso punto corrispondente, sia che si passi dalla prima figura alla seconda, o dalla seconda figura alla prima. La radice $\frac{m}{n} = -1$, o $\frac{M}{N} = -1$, conduce al punto V^0, o alla retta v^0, poichè le equazioni (4) danno allora

$$\frac{v_1}{(AB)_1} = \frac{v_2}{(AB)_2} = \frac{v_3}{(AB)_3}\,, \quad \text{o} \quad \frac{V_1}{(ab)_1} = \frac{V_2}{(ab)_2} = \frac{V_3}{(ab)_3}\,,$$

d'accordo con le formole (3); le altre due radici delle equazioni (5) condurranno poi ai punti V', V'' ed alle rette v', v''.

Le due radici $\frac{m}{n}$, o $\frac{M}{N}$ di (5) che annullano il fattore di secondo grado sono evidentemente reciproche tra loro: se esse diventano eguali avranno il valore $+1$ o -1. Sia $\frac{m}{n} = +1$, sarà ancora $\frac{M}{N} = +1$, poichè nell'uno e nell'altro caso dovrà verificarsi la condizione

$$(6)\qquad (aA)\,(bB) + 3\,(aB)\,(bA) = 0.$$

Essendo sempre V^0 e v^0 il punto e la retta determinati dalle equazioni (4) per la radice $\frac{m}{n} = -1$, o $\frac{M}{N} = -1$ delle (5), le stesse equazioni (4) per la radice doppia $\frac{m}{n} = +1$, o $\frac{M}{N} = +1$ delle (5) determineranno due punti V', V'' coincidenti in un punto W, o due rette v', v'' coincidenti in una retta w; il punto W apparterrà alle rette v^0 e w, e la retta w apparterrà ai punti V^0 e W. Osservando che, per la radice doppia che si considera, le equazioni (4) diventano le derivate delle equazioni (1) rispetto alle v_i o le V_i ($i = 1, 2, 3$), si annulleranno i discriminanti di queste equazioni, sicchè in tal caso la linea di 2° ordine ($\vartheta\vartheta$) si ridurrà ad una coppia di rette, appartenenti a W, e la linea di 2ª classe ($\Theta\Theta$) si ridurrà ad una coppia di punti, appartenenti a w; quella coppia di rette è coniugata armonica rispetto all'altra coppia di rette (w, v^0), e quella coppia di punti è coniugata armonica rispetto all'altra coppia di punti (W, V^0).— Sia in secondo luogo $\frac{m}{n} = -1$, sarà ancora $\frac{M}{N} = -1$, poichè nell'uno e nell'altro caso dovrà verificarsi la condizione

$$(aA)\,(bB) - (aB)\,(bA) - 0\,,$$

o sia

$$(ab)_1\ (AB)_1 + (ab)_2\ (AB)_2 + (ab)_3\ (AB)_3 = 0. \tag{7}$$

Questa equazione esprime che il punto V^0 appartiene alla retta v^0: coincideranno ora con lo stesso punto V^0 i due punti V', V'', e con la stessa retta v^0 le due rette v', v''; in tal caso le due linee di 2° ordine e di 2ª classe ($\vartheta\vartheta$) e ($\Theta\Theta$) hanno tra loro contatto di terzo ordine nel punto V^0 sulla retta v^0.

Nella supposizione di due radici eguali delle equazioni (5), $\frac{m}{n} = +1$ ed $\frac{M}{N} = +1$, se per questo valore di $\frac{m}{n}$ e di $\frac{M}{N}$ si annullano inoltre i determinanti minori di 2° ordine dell'uno o dell'altro dei determinanti (5), per lo stesso valore di $\frac{m}{n}$ o di $\frac{M}{N}$ le equazioni (4) dinoteranno una stessa retta coincidente con v^0, o uno stesso punto coincidente con V^0; in tal caso nella correlazione delle due figure ad ogni punto V appartenente a v^0 corrisponderà la retta VV^0, e ad ogni retta v appartenente a V^0 corrisponderà il punto $v\,v^0$, passando dalla prima figura alla seconda, o dalla seconda figura alla prima: le due rette x ed y che corrispondono ad un punto qualunque V, con la retta $V\,V^0$ concorrono su v^0, formandosi un gruppo armonico di quattro rette, ed i due punti X ed Y che corrispondono ad una retta qualunque v, con il punto $v\,v^0$ sono per dritto con V^0, formandosi un gruppo armonico di quattro punti. La linea di 2° ordine ($\vartheta\vartheta$) si ridurrà a due rette coincidenti con v^0, e la linea di 2ª classe ($\Theta\Theta$) si ridurrà a due punti coincidenti con V^0. La correlazione si dirà in tal caso *omologica*.

Finalmente nella supposizione di due radici eguali delle equazioni (5) $\frac{m}{n} = -1$, ed $\frac{M}{N} = -1$, (e quindi di tutte e tre le radici eguali), se per questo valore di

$\frac{m}{n}$ e di $\frac{M}{N}$ si annullano inoltre gli elementi dell'uno o dell'altro dei determinanti (5), per lo stesso valore di $\frac{m}{n}$ e di $\frac{M}{N}$ le equazioni (4) saranno soddisfatte identicamente; in tal caso essendo

$$(AB)_1=(AB)_2=(AB)_3=0\,,\ \text{o simbolicamente}\ \frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}\,,$$

(8) e quindi ancora

$$(a\,b)_1=(a\,b)_2=(a\,b)_3=0\,,\ \text{o simbolicamente}\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\,,$$

la retta v^0 ed il punto V^0 saranno indeterminati, e le equazioni (1) rappresenteranno una stessa linea di 2° ordine e di 2ª classe: ad ogni punto, o ad ogni retta, corrisponderà nella correlazione una stessa retta, o uno stesso punto, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima; il punto e la retta che si corrispondono tra loro sono polo e polare rispetto alla linea $(\theta\theta)$, $(\Theta\Theta)$, la correlazione si dirà perciò correlazione *polare* o *coincidente*. Ponendo invece di A e B uno stesso simbolo F, ed invece di a e b uno stesso simbolo f, alle forme bilineari proposte potrà darsi in questo caso la forma

$$(\varphi\psi)=(Fx)(Fy)=\tfrac{1}{2}(f'f''x)(f'f''y)=0\,,\quad (\Phi\Psi)=(fX)(fY)=\tfrac{1}{2}(F'F''X)(F'F''Y)=0\,,$$

(9) e sarà

$$(\theta\theta)=(Fv)^2=\tfrac{1}{2}(f'f''v)^2=0,\quad (\Theta\Theta)=(fV)^2=\tfrac{1}{2}(F'F''V)^2=0.$$

Nel caso generale della correlazione prendendo per terna fondamentale la terna $(v^0v'v'',\ V^0V'V'')$, e ponendo per i nuovi valori dei coefficienti $A_iB_j=C_{ij}$, $a_ib_j=c_{ij}$, per la nuova forma che dovranno avere le equazioni (1) e (3) si avranno le condizioni

$$C_{11}=0,\ C_{22}=0,\ C_{23}=C_{32}=0,\ C_{31}=C_{13}=0;\ c_{11}=0,\ c_{22}=0,\ c_{23}=c_{32}=0,\ c_{31}=c_{13}=0,$$

e si potrà supporre

$$C_{12}\,C_{21}\,C_{33}=1,\quad c_{12}\,C_{12}=1\,,\quad c_{33}\,C_{33}=1,\quad c_{21}\,C_{21}=1,\quad c_{12}\,c_{21}\,c_{33}=1;$$

le forme bilineari congiunte avranno allora la forma

$$(10)\quad (\varphi\psi)=C_{12}x_1y_2+C_{21}x_2y_1+C_{33}x_3y_3=0,\ (\Phi\Psi)=c_{12}X_1Y_2+c_{21}X_2Y_1+c_{33}X_3Y_3=0,$$

e le equazioni (1) e (5) diverranno rispettivamente

$$(C_{12}+C_{21})\,v_1v_2+C_{33}v^2{}_3=0\,,\qquad (c_{12}+c_{21})\,V_1V_2+c_{33}V^2{}_3=0\,,$$

$$(m+n)\ (mC_{12}+nC_{21})\ (mC_{21}+nC_{12})\,C_{33}=0\,,$$

$$(11)\qquad (M+N)\ (Mc_{12}+Nc_{21})\ (Mc_{21}+Nc_{12})\,c_{33}=0.$$

Dal paragone delle equazioni (5) ed (11) risulta che, prescindendo da una potenza del modulo della trasformazione lineare per passare dalla prima terna fondamentale alla seconda, sarà

$$(12)\quad \begin{array}{l} C_{12}C_{21}C_{33}=(A,B),\ \ (C^2{}_{12}+C_{12}\,C_{21}+C^2{}_{21})\,C_{33}=(aB)\,(bA),\\ c_{12}\,c_{21}\,c_{33}=(a,b)\,,\ \ (c^2{}_{12}+c_{12}\,c_{21}+c^2{}_{21})\,c_{33}=(Ab)\,(Ba). \end{array}$$

Ad ogni punto V appartenente alla retta v^0 corrisponderà nella correlazione una retta v appartenente al punto V^0, e viceversa: le due coppie di rette $(V^0\,V,\ v;\ v',\ v'')$,

o le due coppie di punti ($v^0 v$, V; V', V''), avranno sempre lo stesso rapporto anarmonico $-\frac{C_{12}}{C_{21}}$, o $-\frac{c_{12}}{c_{21}}$, qualunque sia il punto V, o le retta v, e quel rapporto anarmonico si cambia nel reciproco quando, invece di passare dalla prima figura alla seconda, si passa dalla seconda figura alla prima; questi due rapporti anarmonici reciproci sono le due radici reciproche tra loro delle equazioni (11). Allorchè l'invariante $(aB)(bA)=(Ab)(Ba)=0$, il rapporto anarmonico di quelle due coppie di rette, e di quelle due coppie di punti, è una radice cubica immaginaria dell'unità negativa, e quindi quel gruppo di quattro rette, o di quattro punti, sarà equianarmonico: finalmente se quel rapporto anarmonico ha il valore $+1$, o -1, si avrà come sopra la correlazione omologica, o la correlazione polare.

3. Siano V', V'' i punti che una retta qualunque v ha di comune con la linea di 2° ordine $(\theta\theta)$, e siano $v' v''$ le rette che un punto qualunque V ha di comune con la linea di 2ª classe $(\Theta\Theta)$; un punto qualunque appartenente a v, e la retta che gli corrisponde nella correlazione determinano con la coppia di punti (V', V'') un rapporto anarmonico $\frac{m}{n}$; similmente una retta qualunque appartenente a V, ed il punto che le corrisponde nella correlazione determinano con la coppia di rette (v', v'') un rapporto anarmonico $\frac{M}{N}$: questi rapporti anarmonici sono dati dalle formole

$$\frac{m}{n}=-\frac{(Av')(Bv'')}{(Av'')(Bv')}, \quad \frac{M}{N}=-\frac{(aV')(bV'')}{(aV'')(bV')}.$$

Formando le espressioni di $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2$, $\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^2$, ed osservando che per appartenere a $(\theta\theta)$ i punti V', V'', ed a $(\Theta\Theta)$ le rette v', v'', si può scrivere

$$\Big[(Av')(Bv'')+(Av'')(Bv')\Big]^2-\Big[(Av')(Bv'')-(Av'')(Bv')\Big]^2=$$
$$4\Big[(A'v')(B'v'')(A''v'')(B''v')-(A'v')(B'v')(A''v'')(B''v'')\Big],$$
$$\Big[(aV')(bV'')+(aV'')(bV')\Big]^2-\Big[(aV')(bV'')-(aV'')(bV')\Big]^2=$$
$$4\Big[(a'V')(b'V'')(a''V'')(b''V'')-(a'V')(b'V')(a''V'')(b''V'')\Big],$$

si troverà

$$2(A'A''V)(B'B''V)-\frac{4mn}{(m+n)^2}(A'B'V)(A''B''V)=0,$$
$$2(a'a''v)(b'b''v)-\frac{4MN}{(M+N)^2}(a'b'v)(a''b''v)=0,$$

o sia

$$(1)\qquad (\Theta\Theta)-\frac{mn}{(m+n)^2}(ABV)^2=0, \quad (\theta\theta)-\frac{MN}{(M+N)^2}(abv)^2=0:$$

adunque l'inviluppo di quelle rette v, o il luogo di quei punti V, per un dato valore del rapporto anarmonico $\frac{m}{n}$ o $\frac{M}{N}$ è una linea di 2ª classe, o una linea di

2^o ordine, la quale variando quel rapporto anarmonico ha sempre lo stesso doppio contatto con $(\Theta\Theta)$ e $(\vartheta\vartheta)$: la linea di 2^a classe o di 2^o ordine rimane la stessa se quel rapporto anarmonico si cambia nel suo reciproco, si riduce a $(\Theta\Theta)$ o $(\vartheta\vartheta)$ se quel rapporto anarmonico ha il valore zero o infinito, a $(\vartheta\vartheta)$ o $(\Theta\Theta)$ se ha il valore $+1$, alla coppia di punti (V', V''), o alla coppia di rette (v', v''), se ha per valore l'una o l'altra delle due radici reciproche delle equazioni (5) od (11) del numero precedente, e finalmente a due punti coincidenti con V^0, o a due rette coincidenti con v^0 se ha il valore -1, che è la terza radice delle suddette equazioni. La linea di 2^a classe e la linea di 2^o ordine, che corrispondono ad uno stesso valore $\frac{m}{n} = \frac{M}{N}$ del rapporto anarmonico, sono linee corrispondenti nella correlazione, vale a dire che ai punti ed alle tangenti di ciascuna di esse corrispondono le tangenti ed i punti dell'altra, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima; quelle linee si diranno perciò *involutorie* nella dipendenza correlativa.

Se passando dalla prima figura alla seconda si trovano le rette y ed i punti Y, o i punti Y e le rette y, che corrispondono nella correlazione successivamente ad un punto X o ad una retta x, si avranno figure consecutive, le quali con la figura primitiva saranno alternativamente in dipendenza di correlazione o di collineazione; queste dipendenze saranno definite rispettivamente dalle equazioni

$$(Ax)(By)=0, \quad (Ax)(a'B)(A'b')(B'y)=0, \quad (Ax)(a'B)(A'b')(a''B')(A''b'')(B''y)=0, \dots$$
$$(Ax)(a'B)(b'Y)=0, \quad (Ax)(a'B)(A'b')(a''B')(b''Y)=0, \dots$$

(2) o dalle equazioni

$$(aX)(bY)=0, \quad (aX)(A'b)(a'B')(b'Y)=0, \quad (aX)(A'b)(a'B')(A''b')(a''B'')(b''Y)=0, \dots$$
$$(aX)(A'b)(B'y)=0, \quad (aX)(A'b)(a'B')(A''b')(B''y)=0, \dots;$$

similmente se passando dalla seconda figura alla prima si trovano le rette x ed i punti X, o i punti X e le rette x, che corrispondono successivamente nella correlazione ad un punto Y, o ad una retta y, si avranno figure consecutive, le quali con la figura primitiva saranno alternativamente in dipendenza di correlazione, o di collineazione; queste dipendenze saranno definite rispettivamente dalle equazioni

$$(By)(Ax)=0, \quad (By)(b'A)(B'a')(A'x)=0, \quad (By)(b'A)(B'a')(b''A')(B''a'')(A''x)=0, \dots$$
$$(By)(b'A)(a'X)=0, \quad (By)(b'A)(B'a')(b''A')(a''X)=0, \dots$$

(3) o dalle equazioni

$$(bY)(aX)=0, \quad (bY)(B'a)(b'A')(a'X)=0, \quad (bY)(B'a)(b'A')(B''a')(b''A'')(a''X)=0, \dots$$
$$(bY)(B'a)(A'x)=0, \quad (bY)(B'a)(b'A')(B''a')(A''y)=0, \dots$$

Tutte queste figure in correlazione avranno sempre la terna $(V^0 V' V'', v^0 v' v'')$ per quella degli elementi involutorii, e tutte queste figure in collineazione avranno sempre la stessa terna $(V^0 V' V'', v^0 v' v'')$ per quella degli elementi uniti. Prendiamo questa terna per terna fondamentale; le equazioni che definiscono la correlazione primitiva saranno

$$C_{12} x_1 y_2 + C_{21} x_2 y_1 + C_{33} x_3 y_3 = 0, \quad c_{12} X_1 Y_2 + c_{21} X_2 Y_1 + c_{33} X_3 Y_3 = 0,$$

(4) con

$$C_{12} C_{21} C_{33} = 1, \quad C_{12} c_{12} = 1. \quad C_{33} c_{33} = 1, \quad C_{21} c_{21} = 1, \quad c_{12} c_{21} c_{33} = 1,$$

essendo inoltre

$$(\theta\theta) = (C_{12} + C_{21})(v_1 v_2 + C_{33} v^2_3 = 0, \quad (\Theta\Theta) = (c_{12} + c_{21}) V_1 V_2 + c_{33} V^2_3 = 0 :$$

siano $V^{(0)}, V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots V^{(\lambda)}, v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots v^{(\lambda)}$ i punti e le rette, o pure $v^{(0)}, v^{-(1)}, v^{-(2)}, \ldots v^{-(\lambda)}; V^{(0)}, V^{-(1)}, V^{-(2)}, \ldots V^{-(\lambda)}$ le rette ed i punti che si corrispondono alternativamente e successivamente, passando dalla prima figura alla seconda, o pure dalla seconda figura alla prima, si troverà (per λ positivo o negativo)

$$(5)\quad \begin{aligned}
&v_1^{(\lambda)} = \left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^\lambda v_1^{(0)}, \quad v_2^{(\lambda)} = \left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^\lambda v_2^{(0)}, \quad v_3^{(\lambda)} = v_3^{(0)},\\
&V_1^{(\lambda)} = \left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^\lambda C_{21} v_2^{(0)}, \quad V_2^{(\lambda)} = \left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^\lambda C_{12} v_1^{(0)}, \quad V_3^{(\lambda)} = C_{33} v_3^{(0)},\\
&V_1^{(\lambda)} = \left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^\lambda V_1^{(0)}, \quad V_2^{(\lambda)} = \left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^\lambda V_2^{(0)}, \quad V_3^{(\lambda)} = V_3^{(0)},\\
&v_1^{(\lambda)} = \left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^\lambda c_{21} V_2^{(0)}, \quad v_2^{(\lambda)} = \left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^\lambda V_1^{(0)}, \quad v_3^{(\lambda)} = c_{33} V_3^{(0)}.
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si deduce

$$(6)\quad \begin{aligned}
&\frac{v_1^{(\lambda)} v_2^{(\lambda)}}{\left(v_3^{(\lambda)}\right)^2} = \frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{\left(v_3^{(0)}\right)^2}, \quad \frac{V_1^{(\lambda)} V_2^{(\lambda)}}{\left(V_3^{(\lambda)}\right)^2} = \frac{V_1^{(0)} V_2^{(0)}}{\left(V_3^{(0)}\right)^2},\\
&\frac{v_1^{(\lambda)} v_2^{(\lambda)}}{\left(v_3^{(\lambda)}\right)^2} = \frac{c_{12}\, c_{21}}{c^2_{33}} \frac{V_1^{(0)} V_2^{(0)}}{\left(V_3^{(0)}\right)^2}, \quad \frac{V_1^{(\lambda)} V_2^{(\lambda)}}{\left(V_3^{(\lambda)}\right)^2} = \frac{C_{21}\, C_{12}}{C^2_{33}} \frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{\left(v_3^{(0)}\right)^2},
\end{aligned}$$

da cui si fa manifesto che tutti i punti $V^{(\lambda)}$, o tutte le rette $v^{(\lambda)}$, apparterranno, qualunque sia λ, ad una stessa linea di 2° ordine, o ad una stessa linea di 2ª classe, che passando per $V^{(0)}$, o toccando $v^{(0)}$, ha con $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ lo stesso loro doppio contatto: queste due linee di 2° ordine e di 2ª classe hanno rispettivamente per equazioni

$$(7)\quad \frac{v_1 v_2}{v^2_3} = \frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{\left(v_3^{(0)}\right)^2}, \quad \frac{V_1 V_2}{V^2_3} = \frac{V_1^{(0)} V_2^{(0)}}{\left(V_3^{(0)}\right)^2},$$

essendo

$$\frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{\left(v_3^{(0)}\right)^2} = \frac{c_{21}\, c_{12}}{c^2_{33}} \frac{V_1^{(0)} V_2^{(0)}}{\left(V_3^{(0)}\right)^2}, \quad \text{o sia} \quad \frac{V_1^{(0)} V_2^{(0)}}{\left(V_3^{(0)}\right)^2} = \frac{C_{21}\, C_{12}}{C^2_{33}} \frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{\left(v_3^{(0)}\right)^2}.$$

Le due linee (1) corrispondenti ad uno stesso valore $\frac{m}{n} = \frac{M}{N}$, che nella correlazione delle due figure si corrispondono involutoriamente, sono due delle linee (7); esse coincideranno in una stessa linea di 2° ordine e di 2ª classe quando si ha

$$\frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{\left(v_3^{(0)}\right)^2} = \pm \tfrac{1}{2} \frac{C_{33}}{\sqrt{C_{12}\, C_{21}}}, \quad \text{onde} \quad \frac{V_1^{(0)} V_2^{(0)}}{\left(V_3^{(0)}\right)^2} = \pm \tfrac{1}{2} \frac{c_{33}}{\sqrt{c_{12}\, c_{21}}},$$

sicchè le equazioni

$$(8)\qquad 2v_1 v_2 \sqrt{C_{12} C_{21}} \mp C_{33} v^2_3 = 0\,, \quad 2V_1 V_2 \sqrt{c_{12} c_{21}} \mp c_{33} V_3^2 = 0\,,$$

rappresenteranno, in coordinate di punti ed in coordinate di rette, l'una o l'altra (a motivo del doppio segno) di due linee di 2° ordine e di 2ª classe, ciascuna delle quali corrisponde a se stessa nella correlazione.

I punti $V^{(0)}$ ai quali appartengono le rette $v^{(\lambda)}$, e le rette $v^{(0)}$ alle quali appartengono i punti $V^{(\lambda)}$, nella correlazione d'ordine λ delle figure consecutive dedotte dalla correlazione primitiva, apparterranno rispettivamente alla linea di 2° ordine $(\vartheta\vartheta)^{(\lambda)}$, ed alla linea di 2ª classe $(\Theta\Theta)^{(\lambda)}$, rappresentate dalle equazioni

$$(9)\qquad \begin{aligned} (\vartheta\vartheta)^{(\lambda)} &= \left[C_{12}\left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\lambda} + C_{21}\left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\lambda}\right] v_1 v_2 + C_{33} v^2_3 = 0\,, \\ (\Theta\Theta)^{(\lambda)} &= \left[c_{12}\left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\lambda} + c_{21}\left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\lambda}\right] V_1 V_2 + c_{33} V^2_3 = 0\,. \end{aligned}$$

La retta comune ad un punto qualunque ed al suo corrispondente nella collineazione d'ordine λ, appartenenti entrambi alla linea di 2^0 ordine (7), ed il punto comune ad una retta qualunque ed alla sua corrispondente nella collineazione d'ordine λ, appartenenti entrambe alla linea di 2ª classe (7), apparterranno rispettivamente alla linea di 2ª classe, ed alla linea di 2° ordine rappresentate dalle equazioni

$$(10)\qquad \begin{aligned} \left[\left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} + \left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^2 \frac{V_1 V_2}{V_3^2} &= \frac{\left(v_3^{(0)}\right)^2}{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}\,, \\ \left[\left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} + \left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^2 \frac{v_1 v_2}{v_3^2} &= \frac{\left(V_3^{(0)}\right)^2}{V_1^{(0)} V_2^{(0)}}\,. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che sia

$$\left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\lambda} = 1, \quad \text{onde anche} \quad \left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\lambda} = 1\,;$$

per le formole (5) il punto $V^{(\lambda)}$ coinciderà col punto $V^{(0)}$, e la retta $v^{(\lambda)}$ coinciderà con la retta $v^{(0)}$; allora nella serie delle figure consecutive, dedotte dalla correlazione primitiva, gli elementi corrispondenti nella collineazione d'ordine λ coincideranno tra loro, e quindi se λ è un numero dispari la correlazione d'ordine $\frac{\lambda-1}{2}$, in quella serie di figure, sarà involutoria; se poi λ è un numero pari sarà involutoria la collineazione d'ordine $\frac{\lambda}{2}$. La correlazione primitiva si dirà in tali casi periodica d'ordine λ. Osservando che $\frac{C_{21}}{C_{12}} = \frac{c_{12}}{c_{21}}$, e $\frac{C_{12}}{C_{21}} = \frac{c_{21}}{c_{12}}$ sono, col segno mutato, le radici reciproche tra loro delle equazioni (11) o (5) del numero precedente, la condizione

generale affinchè la correlazione proposta sia periodica d'ordine λ sarà, indicando con r o R una radice di grado λ dell'unità:

$$(11)\quad (r^2+1)(\mathrm{A}a)(\mathrm{B}b)+r\Big[(\mathrm{A}a)(\mathrm{B}b)-(\mathrm{A}b)(\mathrm{B}a)\Big]=0,$$

o

$$(\mathrm{R}^2+1)(a\mathrm{A})(b\mathrm{B})+\mathrm{R}\Big[(a\mathrm{A})(b\mathrm{B})-(a\mathrm{B})(b\mathrm{A})\Big]=0;$$

i casi speciali di r o R eguale a ± 1 sono stati esaminati precedentemente.

Notiamo finalmente le forme invariantive fondamentali del sistema delle due forme ternarie quadratiche $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$. Essendo

$$(\theta\theta)=(\mathrm{A}v)(\mathrm{B}v)=\tfrac{1}{2}(a'a''v)(b'b''v)=0,\quad (\Theta\Theta)=(a\mathrm{V})(b\mathrm{V})=\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{V})(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{V})=0,$$

saranno

$$(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{A}''')(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{B}''')+3(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{B}''')(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{A}'''),\quad (a'a''a''')(b'b''b''')+3(a'a''b''')(b'b''a'''),$$

(12) i discriminanti di queste forme, ed

$$(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{A}''')(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{B}''')+(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{B}''')(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{B}'''),\quad (a'a''a''')(b'b''b''')+(a'a''b''')(b'b''a''')$$

i loro invarianti simultanei fondamentali. Inoltre ponendo

$$v^0_1=(\mathrm{AB})_1,\ v^0_2=(\mathrm{AB})_2,\ v^0_3=(\mathrm{AB})_3;\quad \mathrm{V}^0_1=(ab)_1,\ \mathrm{V}^0_2=(ab)_2,\ \mathrm{V}^0_3=(ab)_3,$$

saranno

$$(13)\quad \begin{aligned} &2(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{V})(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{V})-(\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{V})(\mathrm{A}''\mathrm{B}''\mathrm{V})=4(\Theta\Theta)-(v^0\mathrm{V})^2=0,\\ &2(a'a''v)(b'b''v)-(a'b'v)(a''b''v)=4(\theta\theta)-(\mathrm{V}^0v)^2=0,\end{aligned}$$

le forme congiunte, o i contravarianti di $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$.

Le linee di 2° ordine e di 2ª classe

$$(\mathrm{A}v)(\mathrm{B}v)-\mathrm{K}(\mathrm{V}^0v)^2=0,\quad (a\mathrm{V})(b\mathrm{V})-\mathrm{K}(v^0\mathrm{V})=0,$$

hanno sempre con le linee $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ lo stesso loro doppio contatto, qualunque siano k e K. Le forme congiunte di queste due forme ternarie quadratiche saranno rispettivamente

$$(14)\quad \begin{aligned} &2(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{V})(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{V})-(\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{V})(\mathrm{A}''\mathrm{B}''\mathrm{V})-4\mathrm{K}(\mathrm{A}\mathrm{V}^0\mathrm{V})(\mathrm{B}\mathrm{V}^0\mathrm{V})=0,\\ &2(a'a''v)(b'b''v)-(a'b'v)(a''b''v)-4\mathrm{K}(av^0v)(bv^0v)=0.\end{aligned}$$

Le equazioni

$$(\mathrm{A}\mathrm{V}^0\mathrm{V})(\mathrm{B}\mathrm{V}^0\mathrm{V})=0,\quad (av^0v)(bv^0v)=0,$$

rappresenteranno rispettivamente la coppia dei punti di contatto comuni V′ e V″, e la coppia delle tangenti di contatto comuni v' e v'' di $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$; e le equazioni

$$(15)\quad \begin{aligned} &2(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{V})(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{V})-(\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{V})(\mathrm{A}''\mathrm{B}''\mathrm{V})-(\mathrm{A}\mathrm{V}^0\mathrm{V})(\mathrm{B}\mathrm{V}^0\mathrm{V})=0,\\ &2(a'a''v)(b'b''v)-(a'b'v)(a''b''v)-(av^0v)(bv^0v)=0,\end{aligned}$$

rappresenteranno il contravariante fondamentale, ed il covariante fondamentale del sistema delle due forme $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$, vale a dire l'inviluppo delle rette di cui i punti comuni con le due linee di 2° ordine $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ formano un gruppo armonico di quattro punti, ed il luogo dei punti di cui le rette comuni con le due linee di 2ª classe $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ formano un gruppo armonico di quattro rette.

I tufi vulcanici della Tuscia romana, loro origine, diffusione ed età.

Memoria del Socio G. PONZI

letta nella seduta del 6 febbraio 1881.

Nel progresso della scienza geologica varie volte è accaduto che, o per insufficienza d'osservazioni, o per inesattezza di giudizi, o anche per semplice detto di qualche illustre autorità, si sono sollevate questioni, che hanno aperto il campo a lunghi e calorosi dibattimenti, i quali poi coll' andare del tempo, rettificate le idee, o sono per loro stessi scomparsi, ovvero si sono risoluti col torto o colla ragione di tutti. Così fu al principio di questo secolo della celebre controversia fra i nettunisti e i plutonisti: così di quella dei crateri di sollevamento promossa da De Buch, e così anche accadrà dell'altra di più recente data, sulla origine ed estensione dei tufi vulcanici, che, sebbene contenuta in più ristretti confini, pure per non essere stata mai risoluta è mestieri venga definitivamente eliminata dall'agone scientifico.

Quella fertile regione dell'Italia centrale, che al nord-ovest si estende in lunghezza dalla città di Roma al confine toscano, e in larghezza dagli Appennini al mare Tirreno, fu negli antichi tempi la contrada abitata dagli Etruschi, i quali vi mantennero la loro dominazione, finchè non venne conquistata dai Romani. Dopo la fusione di quei popoli il paese venne detto la Tuscia romana. Il suolo è per la più gran parte vulcanico; imperocchè nel suo seno si comprendono i tre centri di emanazioni terrestri, che si conoscono coi nomi di vulcani, Vulsinio, Cimino e Sabatino, i quali potrebbero dirsi anche etruschi come facciamo dei Laziali, Ernici, Campani ecc. A questi tre spiragli si diressero le forze eruttive del pianeta terrestre per compiere in ciascuno una lunga serie di tremende conflagrazioni, durante il passaggio dell'eccezionale periodo glaciale. I loro crateri rilevati sull' altitudine di tre larghissimi coni di dejezione, si seguono l'un dietro l'altro sulle pianure subappennine per dar principio a quella lunga catena di vulcani costituente la zona eruttiva italiana, che accenna al cammino d'una grande fenditura della crosta terrestre, scorrente su tutte le radici dei monti appennini del piovente tirreno.

Da tali crateri traboccò quella immensa quantità di materiali detritici, elaborati dal fuoco, che costituiscono i conglomerati o tufi vulcanici distinti da caratteri loro propri e ben pronunciati. Le loro assise sedimentarie, sovrastanti ai terreni terziari, sono diffuse per centinaia di chilometri quadrati, ed occupano una gran parte delle distese subappennine nell' Italia centrale. Basta dire che dal confine toscano i tufi vulcanici radendo le frastagliate radici dei monti maggiori s'introducono, oltre l'accennata area, a ricuoprire gran parte della valle del prisco Lazio percorsa dal fiume

Sacco, e all'esterno dalla catena lepina li vedi ricomparire sotto Cori e Norma, fino alle paludi Pontine.

Ma così grande estensione non dee far meraviglia, perchè riconosciuta di fatto da tutti i geologi. La quistione non è questa: la differenza delle opinioni concerne piuttosto il mezzo che la natura adoperò per ispandere quelle sostanze a così rimote distanze dai centri di emissione, e alla età geologica a cui riferire la grande manifestazione vulcanica nell'Italia centrale. È questo appunto l'argomento che dobbiamo trattare. Ma prima d'affrontare un problema così importante, mi sembra pregio dell'opera fare una rassegna bibliografica di tutto quello che è stato scritto sui tufi vulcanici in questione. Per altro siccome una tale impresa sorpasserebbe i confini d'una Memoria, così conviene restringersi solo ai lavori di coloro che parlarono sulla origine dei tufi vulcanici, onde apprezzare la diversità delle opinioni emesse, e perchè il problema venga meglio compreso e risoluto con soddisfazione.

Erano già precedute le peregrinazioni scientifiche dello Spallanzani nelle estreme regioni dell'Italia ([1]), e quelle del Santi sulle altitudini toscane del monte Amiata ([2]); quando al principiare di questo secolo la geologia, ancor minorenne, vide comparire due personaggi distinti, i quali si possono considerare come gl' istitutori della moderna vulcanologia. Questi furono Scipione Breislak delle scuole Pie, e Giovanni Brocchi ispettore delle miniere sotto il governo italico. Il primo di questi si occupò a preferenza dei vulcani della bassa Italia, ovvero della Campania, limitando il campo delle sue osservazioni al corso del Garigliano ([3]). L'altro fece soggetto dei suoi studi l'Italia centrale trascorrendo prima lo spazio che intercorre fra il Garigliano e il Tevere; poi vedendo che i terreni vulcanici si estendevano a nord-ovest molto al di là della città di Roma, passò il fiume e si spinse fino alla Toscana dove hanno termine quei terreni. Laonde esaminò diligentemente i vulcani degli Ernici nel bacino di Frosinone attraversato dal Sacco, e quelli del Lazio che lor succedettero, quindi i Sabatini, i Cimini, i Vulsinii colle rilevate cupole di Trachiti da esso chiamate Necroliti, alle quali si trovano associati. Paesi ancor vergini perchè fino a lui non erano stati mai trascorsi da veruno scienziato. Perito in tutti i rami di storia naturale, classificò le trachiti e le lave, le scorie e i lapilli, e gli altri ingredienti dei conglomerati, descrivendoli nel suo catalogo ragionato delle roccie italiane ([4]). Riconobbe i feldspati come proprietà di quei vulcani, e le pomici derivate dalla loro fusione, come caratteristiche dei tufi romani. Finalmente considerando 1° che le roccie tufacee sono regolarmente e per lunghissimi spazi stratificate e coordinate anche a considerevoli distanze dai crateri di origine; 2° che vi si contengono ciottoli di lave e calcarie rotondati per lungo attrito di trasporto; 3° che vi si racchiudono altresì spoglie di grandi quadrupedi, come sono le ossa elefantine; 4° che il suolo presenta la forma ondeggiante delle marne e delle ghiaje; 5° che i conglomerati

([1]) *Viaggi alle due Sicilie, e in alcune parti dell'Appennino*, di Lazzaro Spallanzani. Milano 1825.

([2]) *Viaggio al Monte Amiata*, di Giorgio Santi, professore di storia naturale nella università di Pisa. Pisa 1795.

([3]) Breislak, *Topografia fisica della Campania*. Firenze 1798.

([4]) *Catalogo ragionato di una raccolta di roccie disposte con ordine geografico per servire alla geognosia dell'Italia*, di G. Brocchi membro dell'istituto. Milano 1817.

di quei vulcani sono evidentemente impastati dalle acque, per cui risultano roccie dure e compatte da servire come pietre da fabbrica; 6° che in alcuni luoghi, tuttochè rari, pur sono stati rinvenuti rimasugli d'essere marini; ne deduce con ragione che quei vulcani sbucarono nel fondo del mare, allorchè questo ricuopriva ancora le colline subappennine. Tale fu l'opinione del Brocchi [1] sulla origine dei tufi vulcanici.

Contemporaneo a questi era il mio suocero Francesco Saverio Barlocci, professore di fisica sperimentale nell'archiginnasio della Sapienza di Roma, che coltivò anche la geologia, quando questa scienza navigava ancora in acque basse. Egli scrisse sulle cause probabili dei vulcani, e pubblicò una Memoria sul lago Sabatino, e sulle acque dei suoi dintorni. In essa [2], fatta la topografia della contrada, viene esaminata la profondità del lago, e riferite le esperienze a conoscerne la temperie e le arene. Si dà ragione delle sorgive, specialmente di quella termale di Vicarello e acidule di Anguillara, e delle loro virtù. Sebbene in questi lavori non si parli della formazione dei tufi, tuttavia l'autore professava le stesse dottrine del suo amico Brocchi; al quale fu anche socio, insieme al prof. di chimica Morichini, nelle esperienze allora istituite sulla malaria di Roma al Campo Verano prima che fosse convertito in necropoli.

Nell'anno 1844 il mio amico marchese Lorenzo Pareto a cui fui compagno e guida nelle peregrinazioni sui monti Laziali, fece di publica ragione una Memoria in cui si contengono le sue osservazioni geologiche dal monte Amiata a Roma [3]. Dopo aver data una descrizione geografica del distretto vulcanico circoscritto dai fiumi Fiora, Paglia e Tevere, dà ragione dei terreni che lo costituiscono. Passa in rivista le masse trachitiche che sotto forma di cupole o mammelloni vi si trovano sparse, i principali dei quali sono i monti Amiata, Cimino, Virginio, le prominenze tolfetane e del Sasso, ad esso attinenti. Determinati quindi i crateri vulsinii prossimi al lago di Bolsena, il Cimino, e i Sabatini alle radici del Virginio, esamina le numerose correnti di lave che irradiarono attorno a essi, e la immensa quantità di materie sciolte, che conglomerate, vennero dalle acque diffuse su tutta la regione etrusca. Finalmente mette fuori il suo giudizio su questi vulcani apparentemente spenti, e rapporto ai tufi da principio si mostra dubbioso a quali acque abbiasi ad attribuire l'impasto dei conglomerati; ma poi non avendovi rinvenuta traccia alcuna di spoglie marine, è condotto ad una opinione contraria a quella di Brocchi; cioè avere quei vulcani spiegata la loro azione entro un gran lago rappresentato dalla stessa estensione dei tufi, che secondo questo modo di vedere sarebbero conglomerati d'acqua dolce.

Allorchè il progresso scientifico fece meglio conoscere la scala stratigrafica delle roccie nettuniane, e per mezzo dei fossili furono determinate le epoche della Terra,

[1] Leggi la introduzione all'opera sopracitata, pag. XXII.

[2] *Ricerche fisico-chimiche sul lago Sabatino, sulle sorgenti delle acque minerali che scaturiscono nei suoi contorni e principalmente sulle acque minerali di Vicarello.* Memoria di Saverio Barlocci professore di Fisica sperimentale nell'Archiginnasio della Sapienza di Roma e membro del Collegio filosofico. 3ª Edizione corretta. Anno 1843.

[3] *Osservazioni geologiche dal monte Amiata a Roma*, del marchese Lorenzo Pareto. Giornale Arcadico, tom. C, fascicolo di luglio. Roma 1844.

i tufi vulcanici dell'Italia centrale presero un posto fra i terreni terziari e particolarmente furono collocati da Lyell nel suo vecchio pliocene, precedente alle assise che chiamò nuovo pliocene, comprese in seguito nel periodo quaternario o postpliocenico. E poichè le assise dei tufi concordano nella giacitura colle marne turchine e sabbie gialle che gli formano letto, così furono giudicate come plioceniche di sedimento marino. Tale fu l'opinione adottata dal Murchison ([1]) e da tanti altri che ancora la ritengono. Così anche io ne fui seguace come la più razionale, allorchè nell'anno 1863, diedi in luce una Nota sui vulcani sabatini ([2]); nella quale dopo aver accennati i numerosi crateri, taluni dei quali ancora incogniti, per la prima volta feci conoscere che il bacino del lago di Bracciano non è già un cratere eruttivo, come si era fino allora creduto, ma una depressione prodotta da sventramento di materie, riempita d'acque, e resa circolare dalle medesime: il qual fatto si è poi verificato anche per il lago di Bolsena. Cosicchè si mantenne ancor viva nella scienza la dottrina primitiva di Brocchi della origine sottomarina dei tufi vulcanici.

Però questo giudizio non piacque all'abate Rusconi di Monticelli per lo stesso motivo del non aver egli mai rinvenuti fossili marini nei tufi del suo paese. Quest'uomo abilissimo cercatore di fossili, rese utili servigi alla scienza per le ricche collezioni che ne fece. Ma le sue perlustrazioni non oltrepassarono i confini delle prominenze cornicolane, del monte Gennaro e parte dell'agro romano, circostanti al suo centro di ricerche. In vece di resti marini, non avendo raccolto nei tufi che una grande quantità di reliquie organiche di esseri terrestri, giudicò quei depositi derivati da vulcani atmosferici, e che le materie dei conglomerati, scorie, lapilli e ceneri eruttate e trasportate dai venti, fossero piovute dal cielo, e accumulate senza l'intervento d'acque di veruna specie.

Di tale scoperta l'autore divenne entusiasta. In una visita che io feci sulla faccia del luogo insieme al P. Secchi e al prof. M. S. De Rossi, guidati dallo stesso Rusconi, dopo un diligente esame dei tufi di quelle contrade, e riconosciuto che la roccia contenente i fossili terrestri era perfettamente identica a quelle descritte da Brocchi nei contorni di Roma col nome di tufi terrosi, composti di minuti elementi, procurammo fargli notare che i fossili in quelle circostanze perdono tutto il loro valore, al cospetto d'altri caratteri chiari e salienti, tratti dalla giacitura ed estensione dei depositi, onde persuaderlo a desistere dalla pubblicazione della sua nuova ipotesi, o almeno attendere ulteriori osservazioni per esternare un giudizio. Ma egli non accettando i nostri consigli il giorno 11 novembre 1864 nella Corrispondenza scientifica di Roma per l'avanzamento delle scienze, fece di pubblica ragione la sua Memoria col titolo: *L'origine atmosferica dei tufi della campagna romana trovata dall'ab. D. Carlo Rusconi* ([3]). In questa Memoria impiegò tutta la forza dell'argomentazione di cui seppe far uso per dimostrare il suo assunto, e perchè la sua nuova

([1]) *On the geological structure of the Alps, Appennines, and Carpathians.* By Sir Roderick Impey Murchison: The quarterly journal of the geological society of. London. 1849.

([2]) Ponzi, *Osservazioni geologiche sui vulcani sabatini.* Accademia pontificia dei nuovi Lincei; 3 maggio 1863.

([3]) Vol. VII, n. 19-20 1865.

dottrina venisse sostituita a quella di Brocchi. Però non ebbe il risultato desiderato non essendo stata letta che da pochi geologi.

Frattanto il dott. Bleicher, medico militare dell'armata francese d' occupazione in Roma, diede in luce le sue ricerche geologiche fatte nei contorni di questa città, nelle quali egli mostra professare l'opinione che i tufi vulcanici dell' Etruria siano pliocenici sottomarini, come si riteneva dalla comune dei naturalisti [1]. Opinione che fu altresì ritenuta dal De Mortillet nella sua Memoria, *Sulla Geologia dei contorni di Roma* [2].

Ora viene in campo Frère Indes, sotto direttore delle scuole cristiane in Roma, con due lettere dirette all'insigne geologo francese M. De Verneuil inserite nel Bollettino della Società geologica di Francia. La prima in data di novembre 1868 ha il titolo: *Sur la formation des tufs des environs de Rome, et sur une caverne à ossements* [3]. L'autore dopo aver parlato delle assise componenti la sezione del monte delle Gioje, rilevato presso la foce dell'Aniene nel Tevere, e di una caverna in esso scolpita, da cui ricavò un gran numero di ossa fossili e di conchiglie terrestri, conclude che i tufi della campagna romana sono prodotti subaerei perchè la comparsa del vulcanismo nell'Italia centrale avvenne dopo il ritiro delle acque subappennine. La seconda in data di gennaio 1870: *Sur la formation des tufs des environs de Rome* [4], conferma la medesima dottrina con argomenti tratti dai materiali contenuti, dalla deficienza dei fossili marini, e dalla presenza dei terrestri, come fece il Rusconi.

Il prof. G. Von Rath di Bonn nel 1868 mandava alle stampe i suoi frammenti mineralogici e geologici sull'Italia, nei quali ragionando dei tufi romani, attesa la loro diffusione e potenza, conviene che sieno d'età pliocenica, sebbene privi di fossili, e depositati da un mare profondo. Fa quindi osservare che la sommità dei coni eruttivi soltanto emersi sulle acque sono costituiti da stratificazioni subaeree [5].

Il prof. Gosselet di Lilla dopo aver peregrinato in Italia, ritornato in patria, pubblicò le sue osservazioni geologiche fatte nel nostro paese. Dopo aver parlato dei vulcani ardenti dell'Italia inferiore, passa a dire del Lazio, e con teorica propria fa derivare i materiali dei tufi romani da crateri che non hanno mai esistito, e quindi depositati sotto le acque; senza dirci se queste erano dolci o salate. Perciò la sua Memoria non risponde al nostro problema [6].

Ma le viste dell'ab. Rusconi non furono del tutto dispregiate dal prof. A. Stoppani, il quale dimostra che sebbene quei vulcani sieno subaerei, pure le loro materie possono essere state depositate dalle acque marine, e ne dà ragione. « Quando, egli

[1] *Recherches géologiques faites dans les environs de Rome*, par M. le D. Bleicher, medecin aide-major de l'armée de Rome. Colmar. 1855.

[2] *Géologie des environs de Rome*, par G. De Mortillet. Atti della Società italiana delle scienze naturali, vol. VI, seduta del 26 giugno 1864.

[3] Bulletin de la Société géologique de France. Tom. 26, série 2e, 1868-1869.

[4] Bulletin de la Société géologique de France. Tom. 27. Séance du 24 janvier 1870.

[5] Zeitschrift der Deutschen geologischen Gesellschaft. Vol. XX, 1868.

[6] *Observations géologiques faites in Italie*, par M. Gosselet professeur de géologie a la faculté des sciences de Lille. Lille 1869.

« scrive, eruppero le isole Giulia e Sabrina funzionarono, non v'ha dubbio, come vul-
« cani subaerei. Quando le eruzioni fossero avvenute in maggior prossimità del lido,
« ovvero fossero state più vigorose, avrebbero potuto piovere le ceneri, e le sabbie
« e i lapilli, l'una sulle coste di Sciacca, l'altra sulle isole Azzorre: i monti spor-
« genti dal mare sarebbero stati così ricoperti da un tufo vulcanico. Al tempo istesso
« però il fondo del mare riceveva i prodotti della eruzione subaerea che si disten-
« devano sul suo fondo fino a distanze ignote e si accumulavano talmente intorno
« al centro eruttivo, che ne nacquero due isole, l'una delle quali la Giulia vantava
« tre miglia di circonferenza. Possono dunque essersi formati contemporaneamente
« degli accumulamenti tufacei sulla terra asciutta e dei sedimenti d'immediata deje-
« zione vulcanica in mare. Se il secondo caso siasi veramente verificato nei vulcani
« di Roma io non saprei decidere » [1].

Ad un tal quesito noi risponderemmo affermativamente; conciossiachè i nostri tufi, oltre la giacitura in potenti strati leggermente ondulati, offrono tal carattere di compattezza lapidea, indicante un impasto acquoso, da farli servire come pietra da scalpello; mentre i depositi dei vulcani laziali sono costituiti da strati corti e così facili a disgregarsi, da essere adoperati come pozzolane.

Il prof. Paolo Mantovani nella sua descrizione geologica dell'agro romano asserisce che, percorrendo i contorni di Roma, in vari luoghi rinvenne nei tufi un gran numero di fossili d'acqua dolce, come al monte Verde, alla punta dei Nasoni, al Campo Verano ecc., quali sono linnei, paludine, planorbi insieme a vegetabili terrestri di cui conserva i saggi [2]. Come avvenne all' ab. Rusconi, non avendo mai adocchiato in quelle roccie alcun fossile marino, riprodusse l'opinione del Pareto, cioè che i tufi vulcanici fossero stati depositati da acque dolci o salmastre nel fondo di laghi o paludi entro una grande area.

Il distinto geologo R. Ludwig nelle sue osservazioni geologiche sull'Italia, rispetto ai tufi accenna che quegli o sono stati depositati dalle acque del mare, ovvero sono subaerei, volendo forse alludere ai vulcani del Lazio [3].

Parlando dei nostri tufi vulcanici, mi trovo condotto, mio malgrado, a ritornare sopra un involontario abbaglio preso dal distinto paleontologo microscopista il dott. Guglielmo Terrigi, nell'interpretare una sezione geologica del monte Quirinale, scoperta negli scavi di fognatura della via Nazionale presso la villa Aldobrandini. Io ringrazio il dott. Terrigi della stima che mi professa, e del conto che fa de' miei lavori; ma non per questo, per amor della scienza, posso convenire che la sezione scoperta al Quirinale sia la vera struttura geologica di quella prominenza. Egli nel 1877 presentò alla r. Accademia dei Lincei una Nota col titolo: *Considerazioni geologiche sul Quirinale* [4], nella quale considera come vera roccia del monte gli addossamenti alluvionali di marne e sabbie, con foraminifere, ricorrenti su tutta la fiancata della gran valle tiberina dal Pincio all' Esquilino. A tale Nota risposi con

[1] *Corso di geologia*, del prof. Antonio Stoppani, vol. III, geologia endografica. Milano 1873, pag. 382.

[2] Mantovani, *Descrizione geologica della campagna romana*. Roma 1874.

[3] R. Ludwig, *Appunti geologici sull' Italia*. Bulletin de la Société impériale des naturalistes de Moscou. Année 1874, n. 1.

[4] Transunti, serie terza, vol. I, anno 1877.

altra mia alla stessa Accademia: *Sui lavori del Tevere e sulla variata condizione del suolo romano* [1] facendo conoscere l'errore. Ma egli a confermare la sua opinione, nella prefazione della sua pregiata opera, *Sulla Fauna vaticana a foraminifere* [2], si appella alla descrizione del suolo fisico di Roma di G. Brocchi [3]. E Dio volesse che egli l'avesse davvero consultata; imperocchè avrebbe da se stesso letto a pag. 131, che la massa del monte Quirinale è essenzialmente costituita da grossi banchi di tufa granulare e terroso con pomici, similissimo a quello del Pincio, di cui non è che la continuazione. Brocchi lo riscontrò nelle cantine dell' ora palazzo reale, alla via delle Quattro Fontane, a s. Carlino, al convento di s. Andrea detto del Noviziato, e sotto l'obelisco nel mezzo della piazza, ove anch'io lo rinvenni in occasione di un cavo per livellare la strada, e di cui conservo i saggi nel gabinetto della Università. Dunque il tufa del Quirinale è diverso dalle assise alluvionali esaminate dal Terrigi sotto la villa Aldobrandini; poichè il primo, secondo Brocchi, è marino e queste sono fluviali. D'altronde nutro speranza che il buon senso dell'autore e nuove osservazioni lo persuaderanno della verità, e così sarà tolto ogni ostacolo al libero progresso della scienza.

Il capitano del Genio militare Antonio Verri nell'anno 1878 pubblicava nel r. Istituto lombardo di scienze e lettere [4] una Memoria nella quale si mostra inclinato a riconoscere nei tufi litoidi, correnti fangose scaturite da bocche eruttive e diffuse in una laguna o maremma.

In quello stesso anno 1878, l'ingegnere Felice Giordano, sulla origine dei tufi, si tenne in una certa riserva. Nondimeno sembra disposto a considerarli depositati nel seno di un grande estuario, poi messo in secco per sollevamento del suolo [5].

Anche il Lotti nello stesso anno, parlando nel Bollettino del Comitato geologico italiano [6] sulle trachiti del monte Amiata, non ha creduto metter fuori alcuna opinione sulla formazione dei tufi che ricuoprono l'Etruria.

Ma eccoci giunti a questo 1880, durante il quale lo stesso capitano Verri ha presentato alla r. Accademia dei Lincei un'altra Memoria, *Sui vulcani Cimini* [7], da cui risulta che, dopo la eruzione sottomarina dei materiali feldspatici, che a modo di un' isola sollevarono il mammellone Cimino, il mare si ritirò da quelle regioni. Passato un certo periodo di tranquillità, per effetto sismico, si aprì una squarciatura in quel cono dando passaggio allo sbocco d' un cratere da cui scaturirono lave, e furono lanciate materie sciolte contenenti leuciti che trasportate dalla forza dei venti

[1] Transunti, serie terza, vol. IV.

[2] *Sulla Fauna vaticana a foraminifere.* Atti dell'Accademia pontificia dei nuovi Lincei, Sess. II, gennaio 1880.

[3] *Dello stato fisico del suolo di Roma*, di G. Brocchi. 1820.

[4] Verri, *Sulla cronologia dei Vulcani tirreni e sulla idrografia della Val di Chiana.* Seduta del 21 febbraro 1878.

[5] *Condizioni topografiche e fisiche di Roma e campagna romana.* Cenni dell'ing. Felice Giordano. Nella monografia archeologica e statistica di Roma e campagna romana, presentata dal governo italiano alla Esposizione universale di Parigi nell'anno 1878 pag. 31.

[6] B. Lotti, *Nota sul monte Amiata.* Bollettino del Comitato geologico italiano. 7-10. 1878.

[7] *I vulcani cimini.* Memoria di Antonio Verri capitano del Genio militare. R. Accad. dei Lincei, Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. VIII. 7 marzo 1880.

caddero in forma di pioggie di sabbie e lapilli, e in ultimo traboccarono correnti di fango, che seppellirono il paese per un 10-14 chilometri di raggio. Alla consolidazione di queste masse fangose si deve attribuire la formazione dei tufi gialli con leuciti, diffusi sopra un' area immensa.

Tali sono le opere messe fuori dai geologi che hanno trattato della origine dei tufi vulcanici: però a rendere completa una rassegna di questa specie mi sembra abbiasi ad aggiungere anche quelle che ancora non videro luce, ovvero sono in via di lavoro. A queste appartiene la carta geologica della provincia di Roma da me costrutta, impiegandovi buona parte di mia vita a fine di pagare il proprio tributo con illustrare il paese nativo. In essa chiaramente apparisce l'immensa area occupata dai tufi vulcanici spinti alle più rimote distanze dai centri eruttivi. L' espressione grafica credo sia il miglior mezzo a concepire una giusta idea per giudicare del mezzo impiegato dalla natura onde effettuare il loro trasporto. Questa carta, premiata alla esposizione universale di Parigi del 1878, trovasi presso il Comitato geologico italiano come materiale per servire alla grande carta geologica della intera penisola.

Finalmente possiamo annunciare una nuova carta che speriamo in breve sarà fatta di pubblica ragione, e che l'avv. Tommaso Tittoni sta rilevando sui monti trachitici del Sasso, sovrastanti alla via Aurelia e sul littorale che si distende alle loro radici. La diligenza e l'impegno che l'autore impiega in questo lavoro ci fanno sperare che sarà per riuscire utilissimo alla scienza e all'incremento della nostra geologia.

Premessa la rassegna bibliografica, entriamo in argomento.

Allorchè le materie detritiche sono scaraventate da un vulcano subaereo per la semplice forza di esplosione, sono sottoposte ad una legge alla quale costantemente obbediscono. Circoscritte entro un' area pressochè circolare il cui raggio è in ragione della forza eruttiva impiegata, i loro materiali sono distribuiti secondo il proprio peso. Imperocchè dai più sottili e leggieri periferici, come le ceneri e i minuti lapilli, passano successivamente ai più gravi del centro, come sono le scorie, che presto si arrestano per l'innalzamento dei coni di dejezione e per la formazione dei loro crateri. Le lave che con meno impeto risalgono contro la legge di gravità, filtrando nelle pareti del cratere ne costituiscono l'ossatura e debordando all'esterno, scendono in correnti prolungate a modo di fiumi raggianti all'intorno in ragione diretta della loro fluidità. Così anche le correnti di fango, le quali o scaturite dai crateri, ovvero originate esternamente dalle dirotte acque degli uragani vulcanici, si spandono sul suolo circostante per rivestirne le estreme pendenze. Abbiamo esempî di tutte queste forme di prodotti nei vulcani del Lazio, i quali avendo spiegato il loro periodo vitale dopo il ritiro delle acque, sono restati inalterati, e si mantengono tali, onde il geologo può esaminare tutte le fasi eruttive da essi spiegate.

Ma se le materie si rinvengono a grandi distanze dalle bocche d'uscita, rimescolate e disordinatamente diffuse, sorge subito spontaneamente l'idea che altre forze espansive vi si associassero per ispingerle a più lontane contrade. Tali potenze addizionali possono essere spiegate o dalle acque, specialmente marine in gran movimento ondoso, ovvero da venti impetuosi e gagliardi. In questi casi però i depositi stessi chiaramente dimostrano il mezzo di trasporto, e il modo d'agire della sua

forza; e il trasferimento acqueo ci si fa manifesto per gli effetti d' un rimescolamento di materiali diversi e per l'attrito da essi sofferto, non che per l'impasto, dal cui diseccamento risultarono poscia roccie dure e compatte alle quali diamo il nome di tufi vulcanici e ce ne serviamo nell' arte edilizia come pietre da scalpello. Chè dove il trasferimento fu causato da correnti aeree, ivi le deposizioni, costituite da materie sottili cadute sotto forma di pioggie, non alterate dall'attrito, e non avendo subìto rimaneggiamento sono restate incoerenti e polverose, come si vede nelle pozzolane delle quali ci serviamo eziandio nell'arte edilizia per comporre le malte. A questi prodotti utilizzabili si aggiungono altresì quelli dei versamenti fangosi che sotto forma di conglomerati più o meno lapidei non lungi si rinvengono dai crateri d'origine, con tutti i caratteri dello scorrimento in masse sopra un suolo asciutto. Questi sono i peperini pietrosi che similmente ai tufi sono adoperati per fabbricare come pietre da taglio, e di cui fecero tanto uso i Latini e i Romani. Fra tutti questi prodotti vulcanici intendiamo parlare solamente dei tufi, perchè sono quelli sui quali caddero differenze di giudizi, e formano l' argomento speciale di questa Memoria.

Tutti conoscono i tufi vulcanici che comunemente si dicono romani, perchè sono stati meglio studiati presso questa città, ma che potrebbero piuttosto appellarsi etruschi per l'area che occupano. Sono roccie composte, o conglomerate d' elementi diversi, di color rossastro, giallastro o bigio, più o meno tenaci e compatti, ovvero lapidei, risultanti da un' accozzaglia di scorie, lapilli e ceneri associate a pomici, a pezzi di lave ora solide ora scoriacee, e a roccie erratiche; tutti conditi di cristalli di anfigeni per lo più farinosi, di pirosseni, di sanidina, dalla cui fusione derivarono le pomici, di lamine di mica e di altri minerali vulcanici, evidentemente rimaneggiati e impastati da acque in agitato moto ondoso. La giacitura di questi sedimenti è in genere orizzontale, ma così largamente ondulata da indicare onde gigantesche liberamente scorrenti sopra un vastissimo fondo.

Essendo gli ultimi nella scala delle roccie subappennine si trovano diffusi per costituire il sottosuolo della grande area che a destra del Tevere raggiunge il confine toscano. Altrettanto sarebbe a sinistra se i vulcani del Lazio eruttati in tempi posteriori non li avessero celati colla sovrapposizione delle loro materie. Nondimeno i tufi si manifestano sottoposti a queste dove le erosioni li misero allo scoperto, ovvero là dove non giunsero a ricuoprirli, come lungo le radici dei monti Appennini. Così si vedono alla valle degli Arci presso Tivoli, a Cave vicino Palestrina, sotto Paliano, Anagni, Montelanico nella valle latina, a Cori e a Norma, alla base della catena lepina, e in altri luoghi notevolmente distanti dalla loro origine.

I vulcani della Tuscia romana dai quali uscì tanta quantità di materiale dovettero avere una vita lunghissima, protratta per molti e molti secoli, accusata dalla grande potenza di quei depositi, dalle numerose loro stratificazioni, che in qualche luogo hanno uno spessore di 30-40 metri senza vederne il fine, sotto forma di rupi scoscese. Ne abbiamo esempi a Civita Castellana, a Borghetto, e dovunque le frane o le erosioni spiegarono su loro la più potente azione.

Ora conviene mettere sott' occhio del lettore i diversi giudizi pronunciati dai geologi sul mezzo di trasferimento adoperato dalla natura nella diffusione dei tufi

vulcanici. Dalla esposta rassegna bibliografica facilmente si desume che tali differenze possono ridursi a quattro, cioè:

1.° Il giudizio dato prima di tutti gli altri al principiar del corrente secolo dai celebri vulcanologi Brocchi e Breislak, i quali considerata la potenza, forma e giacitura orizzontale, proclamarono i nostri tufi vulcanici essere stati trasportati e sedimentati dalle acque d'un mare agitato.

2.° Quello del marchese Lorenzo Pareto che pensò di attribuire lo spandimento dei tufi al moto ondoso d'un gran lago, come deposizioni di acqua dolce, opinione avvalorata dai fossili raccolti dal Mantovani.

3.° L'origine subaerea dell'ab. Rusconi di Monticelli che dice essere i tufi costituiti da lapilli e ceneri trasportate da venti impetuosi sotto forma di pioggie cadute sopra un suolo emerso ed asciutto.

4.° Finalmente l'opinione del capitano Verri che riconosce nelle regioni circostanti al cono Cimino, tanto gli spandimenti sottomarini, quanto le correnti fangose traboccate dai crateri nel seno dell'atmosfera e corse in secco a causa delle oscillazioni sismiche del suolo.

Di ciascuna di queste opinioni si rende necessaria un' analisi critica e speciale, onde respinte le altre per eliminazione, resti in fine quella che dotata di maggiori probabilità merita d'essere con soddisfazione abbracciata e ritenuta come la più verosimile. Così lasciata indietro la prima, della quale si parlerà in seguito, ci si presenta la dottrina del marchese Pareto.

Considerando questo illustre geologo che i tufi vulcanici da lui esaminati si presentano sotto la forma di conglomerati orizzontalmente stratificati duri e pietrosi, evidentemente impastati dalle acque, in principio dubitò a quali acque attribuire quella vastissima sedimentazione. Ma poi sedotto dalla mancanza delle reliquie organiche d'esseri marini, si decise per una formazione d'acqua dolce fatta da un lago, niente meno così grande da comprendere tutta la Tuscia romana. Eppure accompagnò la sua Memoria con un abbozzo di carta geologica che abbraccia tutto il campo delle sue osservazioni, distinguendo in essa la diversa natura delle parti costituenti. Che se nel rilevare quella carta il marchese Pareto avesse avvertito alla mancanza d'un rilievo necessario a cingere e chiudere un bacino lacustre; ma in vece avesse notato tutto il lato meridionale aperto ad un libero mare: se allorchè marcava il confine dei tufi vulcanici si fosse accorto che disegnava la linea delle spiaggie di un immenso golfo, al quale serve d'antemurale il gruppo dei monti Ceriti e della Tolfa, nel mezzo del quale comparisce un arcipelago d'isole eruttive, spettanti ai tre vulcani Vulsinio, Cimino e Sabatino: se in fine il marchese Pareto nelle sue peregrinazioni di ricerca fosse giunto a raccogliere colle sue proprie mani quegli stessi tufi dell'Etruria alle radici dei monti lepini tanto distanti dalla loro origine, io credo che, nella dubbiezza in cui era, avrebbe abbracciata più volentieri la dottrina di Brocchi, e si sarebbe schierato tra quelli che sostengono la formazione marina come la più veritiera.

Quanto ai fossili lacustri e fluviali dell'amico Mantovani e di Frère Indes, raccolti nei tufi delle vicinanze di Roma, non devono far meraviglia, quando si faccia attenzione al gran seno di mare in cui si scaricava tanta quantità di fiumi discesi

dagli Appennini, e alle loro piene, conducenti a dovizia materie di trasporto di ogni specie. Il Fiora, il Paglia, la Chiana, il tronco superiore del Tevere, arricchito delle acque del Chiascio, e del Maroggia, il Nera reso superiore a tutti gli altri per la immissione del Velino, del Salto e del Turano, il Farfa e finalmente l'Aniene, con tutti gli altri torrenti di minor conto, ora concorrenti a far parte del gran sistema tiberino; i quali tutti erano tante vie aperte, per le quali anche conchiglie d'acqua dolce poteano raggiungere la sedimentazione marina dei tufi. Per questa ragione li vediamo qua e là seminati di tronchi e foglie di piante terrestri, insieme ad elici bulimi, ciclostome ecc., specialmente nella periferia dei loro depositi ove li raccolse l'ab. Rusconi, e a quelle d'acqua dolce che determinarono il Mantovani e Frère Indes a stimare i tufi quali prodotti lacustri.

Passiamo ora ai depositi subaerei voluti dall'ab. Rusconi che per aver rinvenuti fossili terrestri nei tufi di Monticelli li credette prodotti da pioggie di lapilli e ceneri trasportate dai venti. Ma l'ab. Rusconi non avendo mai estese le sue osservazioni nell'immenso campo vulcanico, fu il geologo speciale del suo paese nativo. Egli non rifletteva che il difetto dei fossili marini potea dipendere da cause fortuite contrarie alla vita degli esseri viventi nelle acque salse: non pensava alle violenti agitazioni di una sconvolta natura, nè allo stato tempestoso d'un mare nel cui seno venivano rimaneggiati dal trasporto materiali aridi, incapaci d'alimentare la vita vegetale sostenitrice dell'animale, fra loro inseparabili: non vedevà che i suoi fossili terrestri giacevano alle radici d'ardite scogliere dalle quali precipitavano i torrenti che li trasportavano. Che se Brocchi asserisce essere stati rinvenuti nei tufi rimasugli di corpi marini, questi accennano piuttosto alla distruzione operata dall' attrito entro acque potentemente agitate, a cui la vita non regge. Finalmente il Rusconi non avvertì all'impasto acqueo dei tufi litoidi di Monticelli, che dà alla roccia un carattere ben diverso dalla incoerenza delle materie piovute, come osserviamo nei depositi del Lazio caduti sulla terra secca. Che se l'ab. Rusconi, ascoltati i consigli, fosse uscito dal suo paese ed avesse aggiunto ulteriori osservazioni, forse non avrebbe precipitato il suo giudizio.

Ma che diremo delle correnti fangose del Verri? Questo modo di diffusione può essere applicato ai tufi della campagna romana? Che le emissioni di fango, come le pioggie di ceneri, fra gli altri fenomeni eruttivi siano possibili, nessuno può negarlo; ma che l' origine fangosa si abbia a riconoscere nelle nostre roccie vulcaniche non mi sembra giusto. Imperocchè esaminate con attenzione non mostrano alcun segno di stivamento in massa, come le lave, nè si accavalcano le une sulle altre per assumere l'aspetto di strati irregolari e discordanti. Al contrario i nostri tufi, come abbiamo già detto, offrono i caratteri di materiali sciolti, trascinati e rimescolati dalle acque, e distesi sul fondo da grandi onde, in potenti banchi largamente ondulati e paralelli, ovvero abrasi, o tronchi dalle successive passate dei flutti in burrasca. Laonde per queste ragioni, e per tutto ciò che dicemmo di sopra, non potrei che confermare l'origine sottomarina dei nostri tufi.

Esclusa pertanto l'ipotesi del Pareto d'un gran lago esteso su tutta la Tuscia romana; respinta l'origine subaerea dei tufi di Monticelli immaginata dall'ab. Rusconi, e dimostrata improbabile quella delle correnti fangose del Verri, non resta

che la sentenza primitiva di Brocchi che opinò per una deposizione sottomarina. I più distinti geologi delle più colte nazioni l'abbracciarono; Lyell, Murchison, Beaumont, Rath, Ludwig e tanti altri rappresentanti l'aristocrazia della scienza, scesi in Italia, esaminarono coi propri occhi queste roccie sulla scala stratigrafica subappennina, e nelle lore opere tutti le indicarono come deposizioni marine e plioceniche. Io che a molti di coloro fui guida nelle peregrinazioni scientifiche non potrei essere d'opinione contraria a quella che professa la generalità dei geologi, ai quali fa eccezione qualcuno che per ispirito di distinzione ha creduto dover seguire l'esempio del defunto Rusconi.

Ma raggiunti i tempi che corrono, la scienza della Terra, in mezzo a tanto progresso, potrà mai restar soddisfatta, senza una perfetta cognizione di quei vulcani, che signoreggiarono l'Etruria fatta teatro di tremende scene sovversive e tutta inondata dei loro prodotti? Se quella regione dell' Italia centrale fu un gran golfo del mare subappennino: se nel suo seno si aprirono una via tre enormi vulcani: se fu messa a soqquadro da tremendi terremoti, che la sfigurarono e finirono di metterla in secco: se i fuochi, terminata la loro parabola d'azione eruttiva, scomparvero per trasferirsi altrove; egli è certo che quella regione ha una storia di stupendi fenomeni, alla quale si dovrebbero dirigere le investigazioni dei geologi, piuttosto che rivangare la questione dei tufi, oramai vecchia e inconcludente. Per quanto mi fu possibile io potei far la storia dei vulcani laziali; ma ora l'età e lo stato di salute non mi permettono più di muovermi alla scoperta di avvenimenti ignoti. Perciò queste imprese appartengono ai neogeologi che anelano a farsi onore.

Laonde per ragione di giustizia merita lode il capitano Verri, che primo diresse le sue osservazioni ad uno dei centri eruttivi della Tuscia romana. La sua Memoria sui vulcani cimini dà ragione dei diversi prodotti eruttivi, costituenti il gran cono Cimino, e delle loro giaciture e distribuzione attorno quel centro d' uscita. Ma il lavoro del Verri non è che l'abbozzo parziale d'un gran quadro su cui il pittore deve ancora esercitare la sua abilità, perchè tutte le parti costituenti meglio risultino visibili e definite nei loro contorni. Laonde ci lusinghiamo che il Verri vorrà proseguire i suoi studî, e che altri ne imiteranno l'esempio.

Frattanto per questi lavori e per le mie anteriori ricerche, possiamo oggi distinguere quel gran periodo di sovvertimenti tellurici in due grandi epoche. Nella prima si comprende tutto quel tempo in cui si sollevarono ed emersero dal mare i mammelloni trachitici, e sbucarono i primi crateri alla sommità dei coni di dejezione, i quali presto anch' essi si fecero subaerei. Le materie eruttate dalle loro bocche fatte preda di onde tempestose furono sparse a distanze notevoli, fino ad essere gettate sulle radici degli Appennini. Io sarei d'avviso doversi riferire a quest'epoca la deposizione dei tufi romani; imperocchè questi sulla scala stratigrafica si trovano succedere alle sabbie gialle plioceniche e alle breccie diluviali, vale a dire quando ancora le bassure subappennine erano sommerse.

Alla seconda epoca appartiene tutto ciò che avvenne dopo il ritiro delle acque, per il quale scomparve il gran golfo e i vulcani furono fatti atmosferici. Allora i depositi dovettero rendersi più circoscritti, pioggie di lapilli e ceneri e correnti di fango si dovettero spandere sopra un suolo oscillante, e dovettero aver luogo tutti

gli altri fenomeni accennati dal Verri nella sua Memoria. Quando sarà occupato il vuoto che tuttora esiste nella geologia italiana, sarà meglio conosciuto a quale immenso cataclisma vulcanico andò soggetta tutta intera la nostra penisola.

Benchè altre volte io abbia parlato dell'età dei vulcani etruschi e dei loro prodotti, pur nondimeno giova ritornare sullo stesso argomento, sia per aggiungere ulteriori osservazioni, sia per completare il concetto della loro origine. Allorchè Brocchi scriveva la sua Conchigliologia fossile subappennina, la geologia era ancora bambina e la Paleontologia appena nello stato rudimentario. Però fin da quel tempo le scienze della natura presero così rapido incremento, che presto incominciarono a diradarsi le tenebre dei secoli, e la scala stratigrafica incominciò a delineare la storia fisica del nostro pianeta, e le diverse epoche trascorse comparvero coi fossili in essa contenuti. Fu allora che i tufi vulcanici insieme alle altre assise sottostanti presero un posto nella serie, essendo stati considerati siccome le ultime deposizioni marine del gran periodo terziario, distinte da Lyell col nome di pliocene, ove si conservano tuttora da una gran parte dei moderni geologi, per non aver mai portato su di essi un esame critico.

Ma nell'anno 1868, essendomi occorso di fare un confronto fra la scala stratigrafica subappennina dei contorni di Roma, accettata qual tipo di quella serie di roccie, e la subalpina, tanto ben definita dai geologi lombardi, trovai fra loro quella corrispondenza che non potea mancare essendo l'una continuazione dell'altra. Se non che mi avvidi allora che i tufi romani sostituivano esattamente il terreno morenico, che non comparisce sui nostri più prossimi monti Appennini, e perciò manca nella serie delle nostre assise quaternarie.

Allorchè era in gran voga lo studio dei ghiacciai e delle loro morene si domandava dai geologi perchè la gronda tirrena degli Appennini mancasse di quei depositi, e solo se ne mostrassero traccie negli ultimi recessi dei monti? Il problema restò insoluto fino a tanto che non si venne a conoscere l'accennata sostituzione. Allora, alzato il sipario, si scuoprì nella Italia la coincidenza del periodo glaciale col gran cataclisma vulcanico che precedette i tempi nostri. Il fuoco terrestre scorazzava furioso saltando dall'uno all'altro dei numerosi crateri schierati in catene, specialmente lungo il piovente Tirreno, dai quali scaturivano fiumi d'infuocate lave. Tanti centri d'emanazioni telluriche, o per dir meglio tanti centri d'irraggiamento calorifico, doveano produrre certamente i loro effetti: moderare cioè gli eccessivi rigori del freddo straordinario ond'era invasa la terra, fino ad arrestare la formazione dei ghiacciai e delle loro morene; la qual formazione ci rappresenta quell'abbassamento di temperatura che recò al globo terrestre sì notevoli cangiamenti da ridurlo allo stato geografico attuale. Tale a me sembra essere la spiegazione della differenza che si osserva nella nostra scala, e che mi portò al riordinamento geologico dei terreni subappennini [1], e a distinguere quell'avvenimento cosmico col nome di vulcanico-glaciale.

Le umane reliquie raccolte tanto nelle breccie marine, che rappresentano il diluvio appennino, quanto nei tufi che sostituiscono le morene, dicono abbastanza che

[1] *Sopra un nuovo ordinamento geologico dei terreni subappennini.* Nota del prof. G. Ponzi. Atti della Società italiana di scienze naturali, vol. XI. Milano 1868.

l'uomo esisteva già sulla terra avanti il periodo vulcanico-glaciale. Tali anticaglie consistono in ischeggie di pietra focaia ridotte, talune per servire da taglio come piccoli coltelli, altre da punta come piccole freccie di rozzo lavoro. La loro provenienza è probabilmente quella stessa dei fossili terrestri rinvenuti dall'ab. Rusconi, ovvero d'acqua dolce del Mantovani; scesi cioè colle piene dei fiumi nel mare sottostante. Laonde ne deriva che al principiare del gran periodo vulcanico l'uomo primigenio era scorridore delle foreste appennine e lottava colle belve per la conquista d'una spelonca di asilo, onde ripararsi dalla sferza d' una sconvolta natura. Uscirei d'argomento se volessi parlare più diffusamente dell' uomo in quella sua prima età infantile; a me basta far notare la sua coincidenza coi vulcani della Tuscia romana; e che mentre era spettatore sulle altitudini dei monti delle loro formidabili conflagrazioni, sotto i suoi piedi, nel seno del mare, si deponevano i nostri tufi vulcanici.

Giunti alla fine di questa narrazione, quali ne saranno le conclusioni? Eccole: i tufi vulcanici, così ben conosciuti dai geologi italiani e stranieri, sono costituiti dalle materie detritiche eruttate dai vulcani Vulsinio, Cimino e Sabatino surti nel mezzo del gran golfo di mare subappennino, che comprendeva tutta la Tuscia romana.

Le materie eruttate date in balìa d'onde tempestose furono travolte e diffuse su tutto il fondo marino, che venne ricoperto d'un potente strato fino alle più distanti spiaggie.

Le condizioni del mare che rimescolava tali materie si trovarono così contrarie alla vita degli esseri abitatori delle acque salse, che i tufi stessi mancano affatto della loro propria fauna e flora; ma solamente contengono quei fossili che vennero ivi condotti dalle piene dei fiumi scaricantisi nel gran golfo.

Per la deficienza dei resti organici, l'età dei tufi vulcanici viene determinata dalla loro compattezza che accenna ad impasto acqueo, dalla loro potenza e stratificazione, dalla giacitura ed estensione dei loro depositi; ma specialmente dalla lor successione e concordanza colle più vecchie assise della scala stratigrafica già cognite, che li collocano al posto del terreno morenico, o dell' epoca glaciale.

Finalmente, allorchè si svolgevano i primi fenomeni della manifestazione vulcanica in Italia, l'uomo primigenio già esisteva sulla terra e già abitava le selvose balze degli Appennini, per essere testimonio dei grandi avvenimenti di natura che si compivano nella nostra penisola.

Nuovi studî sulla natura della malaria [1].

Memoria dei dottori GIUSEPPE CUBONI ed ETTORE MARCHIAFAVA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 gennaio 1881.

(Con una tavola)

La dottrina sulla natura parassitaria della malaria ha ricevuto la prova più luminosa dai recenti studî di Klebs e Tommasi-Crudeli pubblicati dall'Accademia dei Lincei nell'anno decorso. Da questi studî veniva dimostrato, che nel suolo delle località malariche si trova un organismo del genere *Bacillus*, il quale introdotto nel corpo di animali di prove o insieme alle terre convenientemente preparate, o isolato dopo coltivazioni in varî liquidi di coltura, vale a produrre febbri, che hanno tutte le caratteristiche cliniche (intermittenza) ed anatomiche (tumore splenico, melanosi splenica e ghiandolare) delle febbri da malaria.

Dopo tali risultati, da' quali veniva rischiarato uno dei più importanti problemi eziologici, rimaneva a studiare la infezione malarica nell'uomo, molto più accuratamente di quello che non si fosse fatto finora, e seguendo lo stesso indirizzo. Nella Memoria dei professori è ricordato come uno di noi (Marchiafava) trovasse nel sangue, nella linfa, nella milza e nel midollo osseo dei cadaveri di tre uomini morti di febbre perniciosa, e sezionati freschissimi, microrganismi identici a quelli descritti dai medesimi, cioè spore e bacilli di varia lunghezza, e in altri due casi soltanto spore. Ma ciò non bastava a completare tali studî.

Nella estate testè decorsa seguendo i consigli del prof. Tommasi-Crudeli, nel laboratorio di Anatomia patologica, da lui diretto, si proseguirono in più larga scala gli studî sulla natura della malaria, tanto sulle terre malariche quanto nell'organismo dell'uomo ammalato. In questi studî ci furono compagni i sigg. dottori Ferraresi e Sciamanna. Noi ci proponemmo di studiare:

1° Se nelle terre malariche si ritrovasse costantemente il *Bacillus malariae*, se nelle medesime nella stagione estiva si svolgessero i vari stadî del suo sviluppo, dalla *spora* al *bacillo sporigeno*, e a qual grado giungesse la sua elevazione nell'atmosfera.

2° Se la infezione malarica fosse trasmissibile dall'uomo agli animali per mezzo del sangue.

3° Se nel sangue degli uomini febbricitanti per malaria si ritrovassero microrganismi, e se questi avessero o no relazione con quelli descritti.

[1] Una comunicazione preventiva di tali studî fu fatta da uno degli autori (Marchiafava) al Congresso medico di Genova nel settembre decorso.

§ 1. Per fare gli studî sulle terre malariche, uno di noi (Cuboni) si recò in Ostia nel mese di luglio, quando cioè infierivano le febbri da malaria, e si aveano notizie di parecchi lavoranti alla mietitura, colpiti in quelle tenute da gravi febbri perniciose. Il giorno 24 dello stesso mese, nella località detta *Ponticelli*, dalle 11 ant. fino alle 3, si raccolsero campioni di fango e di acque in differenti punti dello stagno di Ostia, sia dove lo stagno è scoperto, sia dove è coperto da una folta macchia di *Phragmites comunis* e *Scirpus palustris*. Il fango fu raccolto e conservato per le colture in cassette di latta identiche a quelle usate da Klebs e Tommasi-Crudeli nelle loro ricerche. Per raccogliere e conservare i saggi di acqua furono usati dei tubetti di vetro, capillari alle due estremità, riscaldati prima ad alta temperatura e poi saldati alla lampada, affine di escludere ogni germe di organismi. Rompendo l'estremità di uno di questi tubetti sotto l'acqua, questa sale fino a riempirne circa la metà, così si ha il vantaggio di avere nel tubetto una sufficiente quantità di aria che permette la vita e lo sviluppo di *schizomiceti aerobi*. Furono così raccolti più di cinquanta saggi di acqua, che si esaminarono man mano nei giorni successivi, ed alcuni furono conservati fino nel settembre. Parecchi saggi furono anche raccolti in tubicini capillari di vetro nastriformi, secondo un metodo suggerito dal prof. Pedicino, nei quali tubicini il liquido, che vi sale per capillarità, può essere esaminato direttamente al microscopio senza estrarlo. Il fango e le acque raccolte furono in parte sottoposti ad esame microscopico immediatamente in Ostia stessa coll' *Oggettivo* n. 10 (Hartnack). In questo esame come nei successivi non abbiamo tenuto conto che delle forme appartenenti al gruppo degli *schizomiceti*, persuasi come siamo, non solo per le ricerche di Klebs e Tommasi-Crudeli, ma anche per le molte ragioni esposte da Nägeli [1] che solamente fra gli *schizomiceti* vanno cercati gli organismi capaci a produrre malattie del genere delle malariche. Dall' osservazione microscopica fatta sotto questo punto di vista, si constatò che, sia nelle acque, sia nel fango, esistevano grande quantità di *Bacillus* isolati, o riuniti in filamenti più o meno lunghi, a protoplasma omogeneo, e perfettamente identici a quello figurati da Klebs e Tommasi-Crudeli nella tav. II, fig. 3 della loro Memoria. Così fu verificato l'ipotesi da loro emessa, che cioè nei mesi della estate si trovino nei terreni malarici quei bacilli, che essi, lavorando nell' inverno o in primavera ottennero, ponendo il fango in acquitrini, ai quali si procuravano artificialmente le condizioni di temperatura, e di umidità che si verificano nella estate. Per vedere se tali forme di Bacilli si trovassero per avventura anche nell'aria soprastante allo stagno, si esaminò il sudore che grondava copioso dalla fronte dell' osservatore e di un altro che lo accompagnava (il termometro segnava 33° all'ombra), e in tutti i preparati fatti (dieci) si constatò qualche Bacillo. Identiche osservazioni si ripetevano in altre località presso Roma (Valle d' inferno) nel mese di settembre. Un esame di confronto fu fatto pure dallo stesso (Cuboni) in luoghi non malarici (Intra sul Lago maggiore). Nelle preparazioni fatte coll' identico metodo tenuto non si constatò alcun Bacillo.

Le culture fatte in orina bollita, con terre di località malariche, furono sempre positive, perchè dopo due o tre giorni sulla superficie del liquido si presentò una

(¹) *Die niederen Pilze und ihren Beziehungen zu den Infection Krankeiten*. München, 1877.

membranella formata da una miriade di filamenti bacillari. Culture identiche fatte con fango raccolto in località non malariche (Intra) riuscirono negative, perchè l'orina si mantenne acida, e limpida. È a notare come tali culture furono eseguite colle stesse norme suggerite da Klebs e Tommasi-Crudeli.

§ 2. Dalle esperienze di Klebs e Tommasi-Crudeli risulta la capacità negli animali (conigli) a prendere l'infezione malarica. Difatti introducendo nel loro organismo o le terre malariche, o la pianta microscopica coltivata in vario modo ed isolata dai liquidi di coltura, si suscitano febbri, che hanno le note caratteristiche delle febbri da malaria. Ora era importante la ricerca, se tale infezione si potesse destare negli animali, introducendo nel loro organismo il sangue di uomini febbricitanti per infezione da malaria, e questo sperimento dovea riuscire, dato che nel sangue si trovassero i microrganismi produttori della infezione. Nè ci sconfortava da queste esperienze il fatto riconosciuto da tutti della non contagiosità della febbre da malaria da uomo ad uomo, essendo già provato per altri morbi infettivi non contagiosi, nel senso comune della parola, la possibilità di trasmetterli dall'animale ammalato al sano per mezzo del sangue [1].

Le esperienze furono eseguite principalmente sui cani. Gli animali erano tenuti in una camera spaziosa, bene aereata, nutriti convenientemente; essi erano pesati, e la loro temperatura rettale veniva misurata varie volte nelle 24 ore, per alcuni giorni avanti l'esperimento.

La introduzione del sangue dei malati febbricitanti nell'organismo degli animali fu fatta nei seguenti modi: *a*) injezione sottocutanea di sangue defibrinato; *b*) trasfusione di sangue defibrinato nella cavità del peritoneo; *c*) injezione di sangue nella trachea. Il numero dei cani assoggettati all'esperimento ascese a sei. In tre cani, ai quali il sangue fu introdotto sotto la pelle, il risultato fu negativo o dubbio, negli altri tre si ebbero risultati di un qualche valore, e a questi la introduzione del sangue fu fatta in uno nella cavità del peritoneo, negli altri due nella trachea. In questi cani si ebbero accessi febbrili che cessarono presto, non oltrepassando il numero di quattro. Ecco in breve il riassunto delle tre esperienze.

1° Ad un cane del peso di chilogrammi 9 s'injettano nella trachea, per mezzo della siringa di Pravez, poche goccie di sangue aspirato dalla milza di un febbricitante nell'acme dell'accesso, nel mezzodì del giorno 10 agosto. L'andamento della temperatura si rileva dalla fig. 1 tav. I, donde risulta, che nei due giorni seguenti alla injezione si ebbero due innalzamenti marcati della temperatura, ai quali seguì negli altri due giorni un distinto abbassamento. Il cane durante i due primi accessi si mostrò abbattuto, e le pulsazioni ascesero a 120-130. L'animale fu ucciso quattro giorni dopo l'ultimo accesso febbrile, ma non si potè constatare tumore splenico; nè tale risultato ci maravigliò, considerando che non si ebbero che due soli accessi, e che troppo tempo era decorso dall' ultimo all'epoca della morte.

2.° Ad un cane del peso di chilogrammi 11 furono injettati nella cavità del peritoneo cinque grammi di sangue defibrinato, estratto per salasso da una vena del

[1] Tizzoni, *Studî sulla natura del tifo addominale*. Annali universali di medicina vol. 251. Anno 1880.

braccio di un febbricitante. L'operazione fu eseguita in modo che col sangue non entrassero nel peritoneo materiali infettivi. Il cane si mantenne tranquillo e vispo durante la giornata, si nutrì come il solito, e non manifestò alcun segno di sofferenza. In questo cane la temperatura oscillò per qualche giorno avanti l'operazione fra 38° e 39°, 1. La curva (fig. 2, tav. I) della temperatura mostrò quattro non gravi innalzamenti della stessa, tre nei tre giorni successivi all'operazione sempre nelle ore antimeridiane, e un quarto nel quinto giorno preceduto e seguito da un marcato abbassamento della temperatura. Il cane si lasciò vivere, nè si manifestarono altri accessi.

3.° Ad un cane del peso di chilogrammi 13 s'injettarono nella trachea com-al cane n. 1 poche goccie di sangue di un febbricitante. In questo cane la temperatura misurata per 12 giorni di seguito non aveva superato il 39°, 1. La fig. 3, tav. I, mostra due marcati innalzamenti della temperatura nei due giorni successivi all'operazione, nelle ore antimeridiane, e due leggieri nel terzo giorno, seguiti da un abbassamento della medesima per più giorni di seguito. In questo cane si manifestò pure assai evidente l'abbattimento, l'affanno, e la frequenza del polso (120-130) durante gli accessi.

Se le injezioni sottocutanee furono inefficaci in tre cani, non lo furono in un coniglio del peso di grammi 1665, al quale furono injettate sotto la pelle del ventre due siringhe di diluzione di polpa splenica di un uomo morto di perniciosa comatosa. Dalla curva della temperatura (fig. 4, tav. I) risultano innalzamenti di temperatura accessionali corrispondenti da principio al tipo terzanario semplice. Ucciso l'animale nel settimo giorno della injezione si trovò notevole tumore splenico (fig. 5, tav. II) il quale si rilevò coi stessi criteri dei quali si giovarono Klebs e Tommasi-Crudeli nella misura delle milze dei conigli da loro infettati.

Da questi sperimenti ci sembra di poter ritenere probabile che la infezione malarica sia trasmissibile dall'animale malato al sano per mezzo del sangue. Diciamo probabile e non certo, perchè, oltre le altre obbiezioni che possono facilmente muoversi, la dimostrazione non è così solenne come quella che si può ottenere per certi morbi infettivi, i quali oltre la forma clinica, che negli animali *ha sempre un valore molto relativo,* offrono lesioni così caratteristiche da non poterle confondere con altre, come le alterazioni anatomiche della febbre tifoidea, della pustola maligna, della morva, della eresipela ecc. Inoltre è da considerare che la temperatura nei pochi cani sperimentati, non si levò a quell'altezza a cui suol levarsi nell'uomo febbricitante per malaria, nè si potè verificare il rigonfiamento della milza, o la melanemia per il breve numero e per la poca gravezza degli accessi, effetto anche della poca quantità di sangue contenente il materiale infettivo, introdotta nel corpo degli animali. Però il fatto fondamentale della trasmissibilità della infezione malarica, più che dai notati sperimenti, che devono essere ripetuti in più largo numero, con maggiori cautele, ed esaminando il sangue degli animali, ci sembra dimostrata dalle sperienze di Dochmann [1] di Pietroburgo, il quale colla iniezione sottocutanea del contenuto di vescicole erpetiche prodottosi in

[1] *Zur Lehre von der Febris intermittens* vorl. Mitt. Centralblatt fur die medicinischen Wissenschaften n. 33. 1880.

un infermo di febbri di malaria, fatta in cinque uomini, ottenne in tre una vera febbre intermittente, in uno un semplice malessere, in uno nessuna manifestazione morbosa [1].

§ 3. L'esame del sangue degli uomini febbricitanti per la infezione da malaria fu fatto coll'accuratezza necessaria per simili ricerche. Il sangue fu tolto: *a*) per semplice incisione della pelle; *b*) dalle vene; *c*) dai seni venosi della milza.

a) Avanti di fare la piccola incisione della pelle, questa veniva accuratamente lavata con alcool fenicato; il sangue che usciva dalla ferita veniva raccolto in tubetti di vetro fusiformi chiusi alle due estremità, una delle quali aperta per farvi penetrare il sangue, si chiudeva subito alla lampada. I tubetti entro cui era raccolto il sangue, venivano posti in posizione verticale, e quando dal coagulo cruoroso si era separato il siero, questo veniva esaminato al microscopio, usando vetri nettissimi, e vario ingrandimento (Hartnack Ob. VIII. Oc. IV. Ob. X. Oc. III tubo alzato).

b) Il sangue veniva estratto dalla vena facendo piccoli salassi, e raccogliendo il sangue in vasi di porcellana nettissimi, e poi nei tubetti descritti.

c) Il sangue si estraeva direttamente dai seni venosi della milza con un metodo proposto, ed eseguito dal dott. Sciamanna. Le condizioni necessarie per

 praticare la suddetta operazione sono: 1° che la milza sporga dall'arco costale, fatto frequentissimo negli abitatori della campagna romana; 2° che la milza non sia nè troppo molle nè con capsula sclerotica: non troppo molle perchè l'organo non difetti della tonicità necessaria a far cessare lo stillicidio del sangue, immediatamente dopo l'operazione; non a capsula sclerotica, perchè la resistenza offerta all'ago non sia soverchia, e ostacoli la facile introduzione del medesimo. L'istromento che si adopera è la comune sciringa di Pravaz; essa deve essere accuratamente disinfettata con lavande fatte con alcool fenicato, e conservata in una scatola in mezzo al cotone fenicato. Il processo operatorio è semplicissimo, poichè l'ago estratto dal cotone fenicato viene infisso sotto l'arcata costale verso il centro della milza fino al cappelletto, e si aspira lentamente, quindi estratto l'ago si avvolge di nuovo nel cotone fenicato,

[1] Avevamo già terminato la presente Memoria, quando leggemmo nella Gazzetta medica di Roma, (dicembre 1881) che il dott. Ottavio Leoni ha ripetuto le sperienze di Dochmann injettando sotto la pelle di due giovani contadini il liquido contenuto nelle vescicole erpetiche sorte in gran numero sul mento e sulle labbra di un malato di febbri intermittenti. In uno si manifestarono, nel posto della injezione, vescicole consimili a quelle osservate nell'infermo, la eruzione delle quali fu accompagnata da malessere generale, senza lo sviluppo di un vero accesso febbrile. Nell'altro alla fine del secondo giorno, si manifestò arrossamento nel punto corrispondente alla injezione, e quindi un accesso febbrile preceduto da brividi, terminato con sudore e che durò dieci ore. Nel giorno seguente, pressochè alla istessa ora, si ripetè l'accesso e con maggiore intensità; allora fu somministrata la chinina e non vennero più accessi. Lo stesso liquido fu inoculato, allo stesso modo col quale s'inocula il pus vaccino, nel braccio di due fanciulli, i quali, dal secondo al terzo giorno dalla inoculazione, manifestarono quello stato di malessere che suol precedere un parossismo febbrile. L'autore, che si dichiara favorevole alla dottrina parassitaria della infezione malarica, sulla quale ha pubblicato altri studî clinici, è inclinato a credere, che nei casi in cui si ebbe un risultato negativo, sebbene non in senso assoluto, si sia avuto pure o un limitato assorbimento del materiale infettivo, o una rapida espulsione dall'organismo mercè i naturali processi eliminativi. Egli inoltre trova che i risultati della patologia sperimentale sono d'accordo con quelli della clinica, dalla quale è noto che individui, che capitano in luoghi malarici, provano talora un malessere generale, come quello che precede l'accesso febbrile, senza che questo si manifesti.

e quindi si procede o all'esame microscopico del sangne, o alla injezione intratracheale nei cani.

L'estrazione del sangue fu per lungo tempo praticata coi metodi descritti nei febbricitanti, nell'acme e sul declinare dell'accesso, perchè si credeva che in quei stadî della febbre l'esame del sangue fosse più importante, e perchè non è molto frequente trovare nell'ospedale febbricitanti nel periodo del freddo. L'esame microscopico del sangue dimostrò costantemente la presenza di microrganismi di forma rotondeggiante, refrangenti fortemente la luce, vivamente oscillanti. Essi si distinguono dalle così dette granulazioni elementari per la loro uniformità, per la resistenza agli acidi e agli alcali, e per la loro figura, e per le ragioni che saranno dette appresso si debbono ravvicinare alle spore semoventi che si trovano nei terreni malarici, e dalle quali si sviluppano i bacilli. Il numero di queste spore è vario, talora sono assai numerose e sono incluse entro i globuli bianchi in guisa da riempirli completamente. In ciò consisteva principalmente il reperto del sangue fatto nell'acme della febbre e nella defervescenza, ma non tanto raramente si trovarono pure piccole forme bacillari, contenenti o no sporule.

Ora, prescindendo da questo ultimo fatto, sul quale ritorneremo appresso, è chiaro come limitandosi a questo il reperto nel sangue, non veniva infirmata la dottrina parassitaria della malaria, relativamente al parassita patogeno descritto da Klebs e Tommasi-Crudeli. E le ragioni di una tale asserzione sono principalmente le seguenti: 1° Il parassita patogeno descritto dai nominati autori è sporigeno, e nulla ostava a credere che la forma bacillare si fosse disfatta lasciando libere le spore, fornite esse stesse del potere morbigeno della pianta sviluppata; 2° perchè negli animali infettati da Klebs e Tommasi-Crudeli con liquidi malarici, e che ebbero manifestato le note cliniche ed anatomiche della infezione malarica, si trovarono talora le forme bacillari nella milza, nel midollo osseo, nelle ghiandole linfatiche, mentre nel sangue non esistevano altro che sporule, o queste soltanto si trovarono nel sangue e negli organi; 3° perchè da colture fatte in colla di pesce in una camera ad aria microscopica, del sangue di un febbricitante contenente unicamente spore, si ebbe nel giorno successivo lo sviluppo abbondante di bacilli, nello stesso modo che Klebs e Tommasi-Crudeli e poi Ceci li ottennero dalla coltura delle spero contenute nel sangue dei conigli infettati; 4° perchè infine, anche in altre malattie prodotte da organismi appartenenti al genere *Bacillus*, nel sangue si ritrovano non raramente soltanto le sporule dei medesimi. Così nella infezione carbonchiosa, determinata certamente da un parassita bacillare (*Bacillus anthracis*), come hanno dimostrato i studî fatti da Davaine in poi, specialmente quelli di Koch [1], nel sangue talora non si trovano che le spore, mentre il *Bacillus* o non vi si trova affatto, o si trova in alcuni distretti vascolari, come nel caso di Buhl che lo trovò soltanto nel sangue della vena porta e de' suoi confluenti. E ad uno di noi (Marchiafava) è occorso di osservare in questi ultimi tempi due casi importanti per tale riguardo sebbene non nuovi. Il primo era un caso di pustola maligna della guancia, terminato colla guarigione, nel quale, mentre nella pustola esisteva un numero infinito

[1] F. Cohn's, *Beitr. z. Biologie de Pflanzen* B. 1° Heft 3°.

di bacilli invadenti tutti i spazi linfatici del connettivo, nel sangue non si trovarono che spore. Nel secondo caso si trattava di edema carbonchioso della palpebre, occorso in un individuo che si era cibato di carni di pecora morta; in questo caso durante la vita si trovarono soltanto spore nel sangue e nel liquido delle vescicole carbonchiose, e dopo la morte, mentre si trovavano soltanto spore nel sangue, si trovarono rare forme bacillari nel liquido dell' enorme edema carbonchioso. I tagli fatti in alcuni organi indurati nell'alcool (intestino, pelle, ghiandole linfatiche, diaframmae tc.) dimostrarono ovunque capillari ripieni di spore brillanti, in mezzo alle quali si poteva vedere soltanto qualche raro bacillo.

Da tutte queste ragioni ci sembra adunque provato che non poteva negarsi, essere la infezione malarica generata da un parassita a forma bacillare, soltanto perchè nel sangue non si ritrovavano che spore.

Dopo avere per qualche tempo osservato il sangue dei febbricitanti nello stadio dell'acme e della remissione, si pensò ad osservare il sangue nel periodo del freddo, sembrandoci probabile che in quel periodo si trovassero i bacilli, i quali poi maturando rapidamente o disfacendosi lasciassero libere le sporule; e tale idea veniva confortata da quello che accade nella febbre ricorrente, dove lo *Spirochaete Obermeieri* Cohn, si trova nel sangue in maggior numero nei primi tempi dell' accesso, e poi gradatamente scompare senza che se ne trovino più traccie negli intervalli fra un accesso e l' altro. Ora nel sangue estratto nello stadio d' invasione dell'accesso, si sono costantemente trovate forme di *schizomiceti* come nella fig. 8, tav. II, dotate di vivacissimi movimenti di oscillazione e di traslazione. Essi sono forme di bacilli corti muniti per lo più alle due estremità di una spora. La forma più frequentemente incontrata è quella segnata colla lettera *a* in cui il bacillo è piegato a guisa di C. La loro lunghezza è variabile fra 1-3 diametri dei globuli rossi: talora oltre le due sporuline terminali ve n'è una mediana (*b*), qualche volta tutto il bacillo è sporulifero e rassomiglia ad una catenella di spore (*c*). Più rare sono le forme in cui esiste una spora ad una sola delle estremità (*d*). Quando la temperatura si fa più elevata nel febbricitante, il numero di queste forme bacillari è minore, e pare invece che cresca il numero delle spore. Il numero di tali forme è variabile, talora (quattro casi) se ne ritrovarono in numero notevole (8-10 sotto il campo microscopico). Qui è però a notare come tali forme bacillari si trovarono ancora nel sangue degli infetti da malaria negli intervalli apirettici, ed in malati dell'ospedale apirettici e non sofferenti di febbri intermittenti; ma finora giammai in quella quantità che fu notata nei febbricitanti nell'esordio dell'accesso febbrile, o qualche ora avanti l'accesso. L'aver trovato nel sangue d' individui sani o malati di altre malattie qualche esemplare delle forme descritte, non deve sorprendere, se si considera che tutti coloro, che vivono in un paese malarico debbono certamente introdurne, specialmente per la via del respiro, nel loro organismo. E si può credere ragionevolmente che sfuggano alla infezione quelli, che hanno la circolazione di tutti quanti gli organi, sopratutto dei reni, in buono stato, non potendosi, in tal guisa, dar luogo alla possibilità di estese nidificazioni. Inoltre è da notare che in paesi malarici, si trovano non raramente individui, che pur non soffrendo di febbri intermittenti, hanno tumore splenico, accompagnato o no da altri disturbi.

Evidentemente le dette forme riscontrate nel sangue rappresentano uno stadio sporigeno di un bacillo ([1]). Saranno esse identiche specificamente alle forme studiate da Klebs e Tommasi-Crudeli, e da essi distinte col nome di *Bacillus malariae*? forme trovate anche da noi sviluppate spontaneamente nei terreni malarici durante la stagione estiva? Chi si limitasse a confrontare la nostra figura n. 8, tav. II, che rappresenta le forme comunemente rinvenute, con quella già citata della tav. II, n. 3 della Memoria di Klebs e Tommasi-Crudeli, figura nella quale più esattamente si riscontrano i caratteri che il Cohn assegna nella sua monografia ([2]) al genere *Bacillus*, dovrebbe rispondere, che nel caso nostro, non solo si tratta di una specie, ma bensì

([1]) Accenniamo per la loro singolarità, alle ricerche di Arndt (Virchow's Archiv. B. 83. Hef. 1. *Untersuchungen an den rothen Blutkörperchen der Wirbelthiere*) il quale studiando gli effetti delle contrattilità de' globuli rossi, è venuto nella opinione che una parte di quelle forme che si trovano nel sangue e si designano come micrococchi e batteri non sieno che frammenti globulari, e filamentosi distaccatisi dai globuli rossi e bianchi. Egli ritiene assai verosimile che le *Spirochaete Obermeieri* che si trovano nel sangue, durante l'accesso della febbre ricorrente, non sieno che filamenti a spirale, originati dal protoplasma dei globuli rossi, dai quali poi si distaccano.

Arndt trova una conferma alle sue vedute nelle ricerche di Ehrlich (*Methodolog. Beiträge z. Physiologie d. verschiedenen Formen d. Leukocyten* Zeitschr. f. klin. Medicin. B. I. Hft. 3) e di Gaule (*Ueber Wurmchen velche aus den Froschblutkörperchen auswandern.* Archiv. f. Anat. u. Physiol. 1880. Heft 1. n. 2). Ehrlich osservò nel sangue dei febbricitanti distaccarsi dai globuli bianchi dei filamenti che si mostravano simili ai frammenti di Spirilli, e Gaule vide dai corpuscoli rossi del sangue defibrinato della rana originare corpi vermiformi (wurmchenähnliche) i quali fattisi liberi dai medesimi a furia di movimenti, seguitano a muoversi con rapidità vertiginosa, si attaccano e si distaccano più volte ai corpuscoli rossi che incontrano, li trascinano con loro e alla fine si dissolvono e spariscono. Arndt non potè riscontrare i fatti osservati da Gaule nel sangue della rana, ma soltanto in quelle del *Bufo variabilis*, e Gaule stesso riscontrò il fatto in una metà degli animali da lui adoperati.

La contrattilità e lo *spezzamento* dei globuli rossi e bianchi sono fatti che non possono essere messi in dubbio. Non è infrequente di vedere nel sangue dei febbricitanti e di altri malati (anemia perniciosa, leucoemia ecc.) i globuli rossi che presentano forme varie e talora bizzarre, o frammenti dei medesimi foggiati a granuli isolati o riuniti fino a formare delle coroncine a biscotti, a fiaschi ecc. Nello stesso sangue dei febbricitanti per malaria, specialmente nei globuli rossi rimasti nel siero raccoltosi al disopra del coagulo, noi osservammo sorgere dal protoplasma dei medesimi, prolungamenti a forma irregolare, aventi il colore dello stesso protoplasma, fino a vederli distaccati completamente per rimanere pressochè immobili accanto ai globuli rossi. E ciò vedemmo senza reagenti, osservando i globuli rossi nel siero sanguigno (nei mesi di agosto, settembre, ottobre), nel quale il fenomeno si rende più rapido e più manifesto. Però dobbiamo confessare che le forme bacillari che noi riteniamo per microrganismi, si distinguono da quei frammenti di globuli rossi per il movimento vivacissimo, per la nettezza dei contorni, per l'aspetto del loro protoplasma scolorato, per l'omogeneità della forma, per la loro indipendenza dai globuli rossi, e per gli altri caratteri già ricordati. Quanto poi allo spirillo della febbre ricorrente, la sua natura parassitaria fu riconosciuta non solo dai più eminenti patologi, ma ancora dai micologi più competenti (Cohn ...), e recentemente il dott. Carter ha dimostrato la trasmissibilità della febbre ricorrente nelle scimmie, nel sangue delle quali si trovano numerosissimi i spirilli, come noi stessi abbiamo potuto vedere nei preparati mostratici dallo stesso autore. Del resto le ricerche di Arndt e degli altri, prescindendo dal loro valore biologico, se possano gettare qualche dubbio sopra alcune forme ritenute parassitarie, che si trovano nel sangue e spingere a studî ulteriori, non valgono a farlo per altre (*M. diptherìcus, M. septicus, B. Anthracis* . . . . .) le quali e per i caratteri nettissimi e per i risultati delle culture, si dimostrano nettamente per microganismi indipendenti dagli organismi elementari del sangue e dei tessuti.

([2]) *Beiträge zur Biologie der Pflanzen* II p. 203.

di un genere diverso. Se non che nella figura citata il *Bacillus* è nello stadio di riproduzione per semplice divisione, i singoli segmenti non contengono sporule e il suo protoplasma è perfettamente omogeneo. Se confrontiamo invece il *Bacillus malariae* (Klebs e Tommasi-Crudeli) quale è stato osservato nelle colture in gelatina del fango di Caprolace e figurato nella tav. II, fig. 7 ognuno vede la rassomiglianza colle forme riscontrate da noi. Inoltre la diagnosi dei detti professori (¹) per stabilire la specie, corrisponde alle forme da noi osservate. Quindi si può ritenere che rappresentino lo stadio sporigeno del *Bacillus malariae* (Klebs e Tommasi-Crudeli). Del resto lo studio di questo bacillo come quello di quasi tutti i schizomiceti è finora troppo incompleto ed incerto dal punto di vista della sistematica rigorosa, e certamente molti altri studî sono da farsi sul *Bacillus* delle terre malariche, per seguirlo nei suoi diversi stadî di sviluppo e sopratutto esaminare le modificazioni che subisce una volta entrato nel circolo sanguigno di un animale, a fine di togliere ogni dubbio sulla perfetta identità specifica fra questo e le forme osservate nel sangue dell'uomo febbricitante per malaria, e perchè possa avere l' importanza diagnostica del *Bacillus anthracis.*

L'esame microscopico del sangue estratto dalla milza ci fece osservare nella maggior parte dei casi numerose sporule e qualche rara forma bacillare. Però è a notarsi che durante l'epoca dei nostri studî, non ci occorse mai alcun caso, da poter esaminare il sangue della milza durante l'invasione febbrile, dal quale esame noi attendevamo importanti risultati. Soltanto in un caso, nel sangue splenico, abbiamo riscontrato forme bacillari distintissime, bene sviluppate, di varia lunghezza come quelle descritte da Klebs e Tommasi-Crudeli, e a quelle trovate in qualche caso nel cadavere d' individui morti di febbre perniciosa, e a quelle ottenute dalle spore mediante le colture del sangue (fig. 6, tav. II). Si trovarono inoltre nel sangue forme bacillari corte isolate o riunite, con spore o senza (fig. 7, tav. II), ma giammai con quella costanza e quantità delle forme disegnate nella fig. 8. Tali forme disegnate nella fig. 7 è probabile che rappresentino uno stadio meno avanzato di sviluppo di quelle della fig. 8, le quali in tal caso rappresenterebbero lo stadio ultimo di disfacimento dei bacilli e di liberazione delle spore.

§ 4. Le osservazioni fatte sui cadaveri degli uomini morti per l'infezione da malaria acuta o cronica, presentarono alcuni fatti non privi d'interesse. Ma noi riserbandoci di pubblicare altrove quelli che solamente riguardano l'anatomia patologica e la clinica della infezione malarica riporteremo in breve quelli che possono valere a farne argomentare la natura parassitaria.

Fu ricordato già da principio che Klebs e Tommasi-Crudeli hanno riferito come uno di noi sezionando i cadaveri di uomini morti per febbre perniciosa trovasse nel sangue, nella linfa, nella milza, nel midollo osseo ecc. microrganismi identici a quelli trovati da loro nei terreni malarici. Noi abbiamo da aggiungere che in altri casi di perniciosa occorsi in appresso non si trovarono che microrganismi rotondeggianti spore nel sangue, nella linfa e negli altri visceri sopratutto nella milza e nel midollo osseo. È noto a tutti come nella infezione malarica, specialmente nelle febbri

(¹) Memoria citata pag. 30.

perniciose, queste viscere inturgidisca e si faccia mollissimo, così da lacerarsi come si tenti di asportarlo dal cadavere; ora in tali casi esaminando a fresco la polpa splenica si trovano spesso numerose spore libere o racchiuse entro gli elementi cellulari linfatici più raramente entro le cellule epiteliali che rivestono i seni venosi. Ed è pure in tale organo ricchissimo di sangue che si trovano accumulati i microrganismi in altre malattie d'infezione parassitaria come nella pustola maligna, nella febbre tifoidea, nella setticoemia ecc. Nel midollo osseo oltre numerose cellule globulifere, e cariche di pigmento (delle quali è ricchissima ancora la milza) si vedono i microrganismi descritti o liberi o inchiusi negli elementi cellulari.

Le facili emorragie sono un fatto ovvio nella infezione da malaria, e ciascuno può facilmente persuadersene al letto del malato e sul cadavere. I due casi però che ora riferiremo, malgrado rientrino in questa categoria di fatti, pure nelle loro particolarità c'interessano per il nostro studio.

Caso 1.° Il 28 agosto mattina è portato nell' ospedale di s. Spirito un giovinetto campagnuolo in un accesso di perniciosa comatosa. Si apprestarono tutti i rimedî opportuni e si fecero injezioni ipodermiche di chinina. Dopo il mezzogiorno dietro profuso sudore la febbre cadde, ma rimase il coma profondo, dal quale il malato non si ridestò più, e la morte avvenne nella sera. All'autossia fatta la mattina si trovò: Melanemia, Melanosi della milza, del midollo osseo, del fegato, tumore splenico mollissimo. Il cervello presentava le meningi con viva injezione, con numerose emorragie puntiformi, la sostanza bianca si mostrava completamente gremita di emorragie puntiformi, numerosissime, talune confluenti, mentre la sostanza grigia periferica e gangliare ne mostravano in numero assai limitato (fig. 9, tav. II); tali emorragie miliariche proseguivano nel ponte del Varolio e digradavano nella midolla oblongata e nella spinale. L'esame microscopico dimostrò come ciascuna emorragia presentasse nel centro un vasellino sanguigno contenente globuli bianchi includenti piccole zolle di pigmento, e accumuli di granuli uniformi, resistenti all'azione dell'acido acetico, ma non colorantisi coi colori di anilina. Nella fig. 10, tav. II sono rappresentate due emorragie di varia grandezza, e i vasellini, dai quali esse sono procedute ripieni del contenuto del quale si è fatta menzione.

Caso 2.° Un giovane robusto morì il giorno 15 decembre nell' ospedale di s. Spirito colla diagnosi di perniciosa comatosa. All'autossia si trovò: Melanemia, tumore splenico mollissimo, edema polmonare. Nel cervello si ebbe l' identico reperto del caso precedente.

Ora lasciando da parte l' interesse clinico ed anatomo-patologico di tali casi di *perniciosa comatosa emorragica* (per distinguerla dalla semplicemente *congestiva*) importa notare che quelle innumerevoli emorragie cerebrali, le quali per loro sole, determinando una così estesa e profonda lesione del sistema nervoso, produssero la morte dei due malati, non possono spiegarsi per le note lesioni di nutrizione dei vasellini sanguigni, esse sono dovute verosimilmente a lesioni di nutrizione delle sottili pareti delle arteriale e dei capillari cerebrali cagionate dalla presenza dei microrganismi produttori della infezione malarica. La qual genesi micotica è stata completamente dimostrata per le emorragie che occorrono nel cervello, nei reni, nella pelle ecc. in altre malattie d' infezione, in ciascuna delle quali nel centro o

in prossimità, si trovano embolismi micotici (Endocardite ulcerosa, Eresipela, Difterite ecc.).

Un' altra osservazione ci sembra pure meritevole di essere ricordata. Il giorno 27 ottobre morì nell'ospedale di s. Spirito un uomo di media età, colla diagnosi di *perniciosa cardialgica.* All'autossia si trovò: Tumore splenico mollissimo leggermente melanotico, congestione ed edema polmonare, emorragie stomacali. Il fegato presentava numerosi nodi periferici di color biancastro, di forma conica, coll' apice volto verso l'interno dell'organo. L'esame microscopico di sezioni complete dei nodi più piccoli, dimostrò i capillari dei singoli lobuli compresi nei medesimi, ripieni di globuli bianchi, i quali ne distendevano le pareti, comprimendo le serie di cellule epatiche circostanti; inoltre nelle piccole diramazioni portali circostanti, oltre numerosi globuli bianchi e pochi rossi, si osservavano accumoli di granulazioni aventi i stessi caratteri di quelle trovate nelle emorragie cerebrali.

Ora se tali accumuli sono costituiti da microrganismi si comprende bene come nel distretto corrispondente alla vena trombizzata da essi e dalle cellule bianche avesse luogo quella stasi linfatica, da rilevarsi ad occhio nudo con quei nodi conici descritti.

APPENDICE

Siamo lieti di pubblicare in appendice a questo resoconto dei nostri studî, una lettera che il distinto micologo romano sig. dott. Matteo Lanzi, ha diretto al prof. Tommasi-Crudeli, dopo l'annunzio dei risultati ai quali noi eravamo giunti.

Egregio professore,

I lavori suoi e del prof. Klebs recentemente pubblicati, ed i risultati degli studî fatti sulla natura della malaria, e comunicati al congresso medico di Genova, non potevano fare a meno di non destare un vivo interesse in me e nel dott. Terrigi che pure insieme ci occupammo già di tali ricerche. Da ciò ne venne, che io, avendo agio di fare osservazioni sul sangue dei febbricitanti nel mio quartiere dell'ospedale di s. Giovanni, mi accinsi a ripetere siffatte indagini, non tralasciando di farne partecipe il mio amico dott. Terrigi.

Il metodo di osservazione da me tenuto, fu quello medesimo da Lei adottato, cioè di raccogliere il sangue dal braccio delle inferme nello stadio di freddo, che accompagna l' invasione di un accesso febbrile. E qui debbo annotare che i risultati delle precedenti nostre indagini e le relative conclusioni, quali appariscono dai nostri scritti, non sono concordi con quello che ora sono per dire, appunto perchè non mai effettuate in tale stadio della malattia.

Non sono in grado al presente di citare gran numero di fatti, però nel sangue di dodici inferme, non una sola volta, sia nell'esame immediato del sangue appena estratto, sia in quello ripetuto poche ore dopo, mancò di farsi vedere il microfito cui Ella e Klebs riferiscono il miasma febrigeno. Anzi credo dover notare che in una donna, dalla quale presi il sangue nel momento, in cui soffriva un freddo intensissimo, accompagnato da macchie cianotiche negli arti superiori, si trovarono quei

microfiti in numero maggiore che negli altri casi, mentre in una, in cui il freddo stava per cessare, se ne trovarono in quantità relativamente minore. Non oso da questi pochi fatti trarre deduzioni, le quali hanno bisogno di ulteriori osservazioni; credo tuttavia che debba tenersene conto da chi si accinga a tale studio.

Inoltre ho praticato colture del sangue estratto, servendomi di un metodo semplicissimo, onde evitare, per quanto mi fosse possibile, un maggiore contatto coll'aria esterna. Questo metodo consiste nell'aggiungere ai tubetti di vetro, contenenti il sangue, poca acqua distillata, servendomi così del sangue stesso come materiale nutritivo. Il tubetto lasciato aperto è chiuso in una piccola camera d'isolamento.

Ora per essere breve dirò sommariamente che nel sangue estratto ho trovato in prevalenza le forme più brevi rappresentate da Lei e da Klebs nella loro Memoria, raramente e non in tutti i malati le forme più allungate del bacillo quali sono pure quelle della fig. 8. Nelle colture invece oltre alle suddette forme corte, immensamente moltiplicate di numero nel lasso di un giorno, viddi anche più frequenti quelle disposte a catenella e le bacillari corrispondenti alle fig. 2, 3, 4 della stessa tavola.

Ora resterebbero a farsi ricerche di controprova, nelle quali debbono usarsi cautele anche maggiori, in individui affetti da altre malattie e in individui sani. Ma presso di noi le difficoltà sono gravi. Quante volte vediamo infermi che, al cedere di altre malattie, sono presi da febbre intermittente, che prima era rimasta latente, e non di rado è dovuta ad una infezione di data anche più antica? Nè più, concludente potrebbe riuscire l'esperimento in persone sane, dopo che sappiamo che coloro, i quali soggiornano in località malariche respirano il miasma febbrigeno, e ne possono rimanere infetti senza tuttavia venirne affetti. Però ritengo che le prove negative da contraporre alle positive, cioè la ricerca di un sangue di persona non infetta dalla malaria, il quale sangue non dovrebbe contenere bacilli, debba eseguirsi in un luogo di aria sana, in individui sani, ciò che non posso fare per ora.

Faccia, egregio professore, quel conto che crede di queste poche mie osservazioni, che non tralascerò di proseguire, e della quale La terrò informata ([1]).

Mi abbia sempre

Roma, 29 novembre 1880.

Dm̃o Matteo Lanzi

([1]) Dai studî che si stanno ora facendo risulta intanto che nel sangue dei febbricitanti rinchiuso nei soliti tubetti di vetro, e tenuto in una stufa alla temperatura costante di 35-40° cent. si è constatato da uno di noi (Cuboni) che dopo due o tre giorni il numero dei bacilli si trova notevolmente accresciuto.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1. Curva termometrica del Cane n. 1. Injezione intratracheale di poche goccie di sangue di un uomo febbricitante.
» 2. Curva termometrica del Cane n. 2. Injezione intraperitoneale di sangue di un febbricitante.
» 3. Curva termometrica del Cane n. 3. Injezione intratracheale di sangue di un febbricitante.
» 4. Curva termometrica di un Coniglio. Injezione sottocutanea di diluzione di polpa splenica di un uomo morto di perniciosa comatosa.

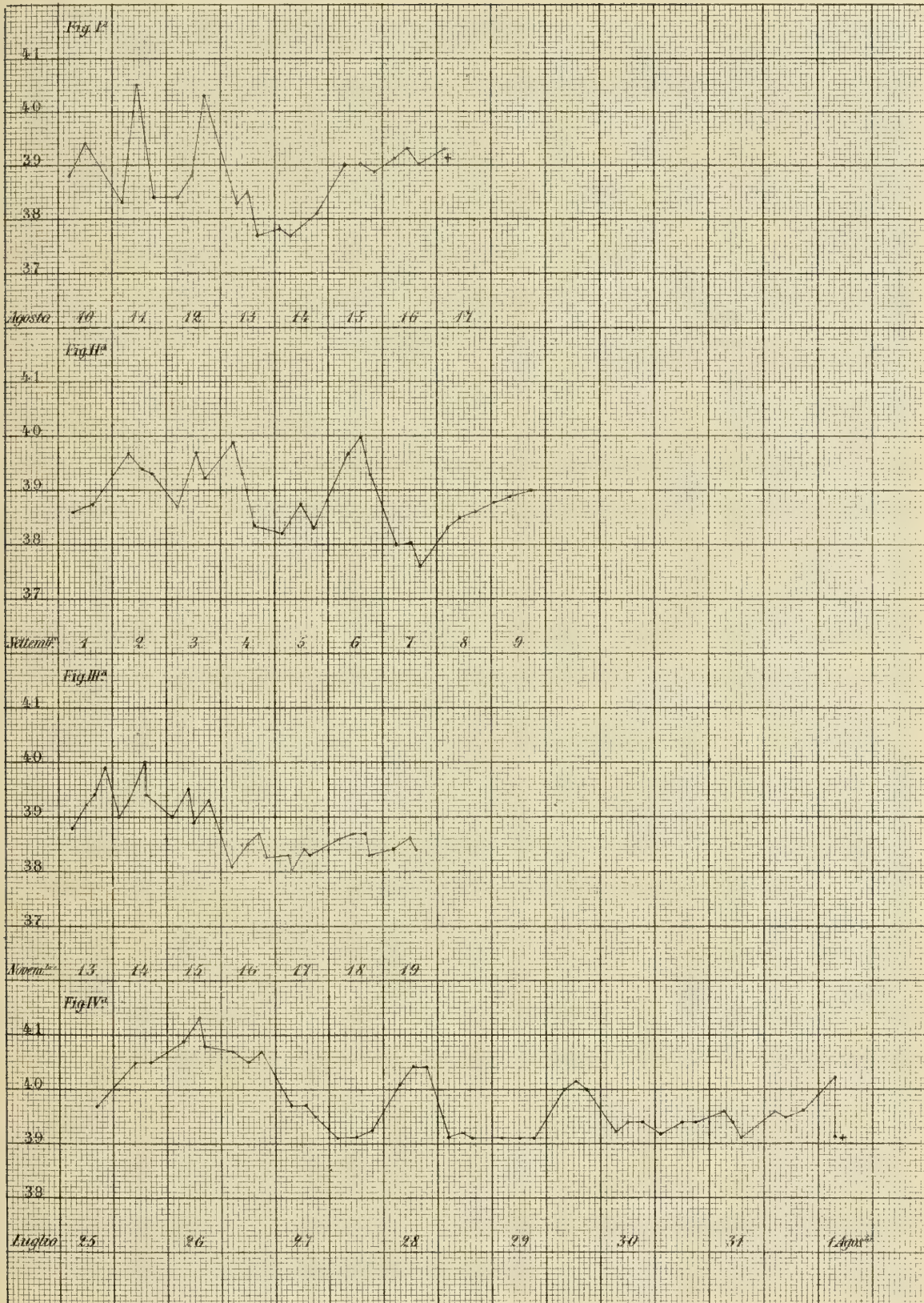
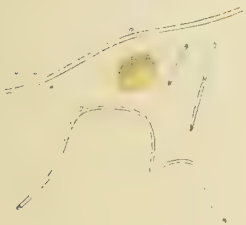
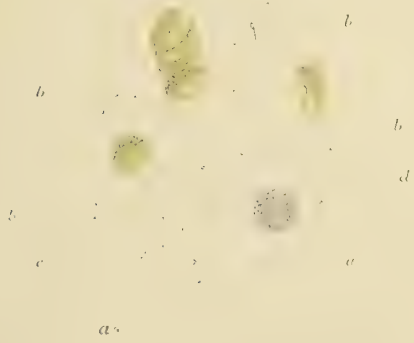
Tavola II.

Fig. 5. Impronta naturale della milza del Coniglio.
» 6. Forme bacillari di varia lunghezza trovate nei cadaveri di uomini morti di perniciosa, ottenute per le colture del sangue dei febbricitanti, e che furono trovate una volta nel sangue espirato dalla milza di un febbricitante (Oc. 3. Obiettivo 10. Hartnack).
» 7. Forme bacillari trovate nel sangue dei febbricitanti (Oc. 3. 10. Hartnack).
» 8. Forme bacillari, le quali si trovano più comunemente nel sangue dei febbricitanti nel periodo d'invasione (Stadio del disfacimento dei bacilli secondo il prof. Tommasi-Crudeli) (Oc. 3. Ob. 10. Hartnack).
» 9. Cervello gremito di emorragie puntiformi di un uomo morto di perniciosa comatosa.
» 10. Due emorragie puntiformi dello stesso cervello. I vasellini sanguigni che si trovano nel centro delle medesime, contengono, oltre cellule bianche pigmentate, granulazioni uniformi, brillanti, resistenti all'azione dell'ac. acetico (Oc. 2. Ob. 7. Hartnack).

Lit. Bruno e Salomone Roma

Fig. 6ª

Fig. 7ª

Fig. 8ª

Contribuzione all'istologia del cervelletto.

Memoria di G. BELLONCI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 marzo 1881.

(Con una tavola)

La terminazione dei grossi processi protoplasmatici delle cellule di Purkinje è uno dei punti più oscuri dell'istologia dei centri nervosi. Studiando il cervelletto dell'*Emys europaea*, in sottili sezioni fatte col metodo dell'acido osmico, ho osservato una particolarità che, io credo, deve contribuire a rischiarare alquanto questo punto.

Questa particolarità consiste in un ordine speciale di ramuscoli emananti ad angolo retto dai rami ascendenti dei grossi processi protoplasmatici delle cellule di Purkinje. Questi ramuscoli (fig. 1, 4 *r*), che sono in grandissimo numero, hanno direzione parallela alla superficie del cervelletto e quindi, considerando questa posta orizzontalmente, sono orizzontali; mentre i lunghi rami in cui si dividono e suddividono i processi protoplasmatici suddetti hanno direzione prevalentemente perpendicolare alla superficie del cervelletto, quindi verticale.

I ramuscoli orizzontali, come ho verificato in buon numero di casi, congiungono fra loro i rami ascendenti dei processi protoplasmatici delle diverse cellule di Purkinje; perciò io li denomino *ramuscoli orizzontali anastomotici.* Non sempre però essi vanno direttamente da un ramo ascendente all'altro: la connessione diretta si verifica solo fra rami ascendenti sottilissimi, ovvero fra un ramo ascendente di media grossezza ed uno sottile. In generale però i ramuscoli orizzontali si dividono e suddividono; ed è per mezzo delle loro suddivisioni che si effettua la connessione reticolata fra i processi protoplasmatici.

I rami ascendenti di questi processi, per le molteplici divisioni e suddivisioni, diventano, in prossimità della superficie del cervelletto, di estrema sottigliezza e spesso s'incurvano ad arco. I filamenti d'unione qui sono pure sottilissimi; e dal loro complesso risulta un fino reticolo (fig. 1 *r'*). Questo reticolo nervoso trovasi in tutto lo strato molecolare; ed è formato dalle divisioni e suddivisioni, già accennate, dei ramuscoli orizzontali e da numerose ramificazioni emananti da un sistema speciale di fibre nervose che trovansi in questo strato: *le fibre orizzontali od arcuate.*

Queste fibre nervose (fig. 1, 3 *b'*) provengono dalle fibre midollari del cervelletto ed hanno decorso orizzontale od arcuato. Esse sono, in generale, sottilissime e in

gran numero; danno rami che le uniscono fra di loro, coi processi protoplasmatici delle cellule di Purkinje e colle cellule nervose che trovansi qua e là disseminate nello strato molecolare. Questo sistema di fibre nervose trovasi sviluppatissimo nella corteccia di tutti i lobi cerebrali ed anche nello strato molecolare della retina.

Le cellule nervose dello strato molecolare del cervelletto dell'*Emys* sono di due specie: alcune anneriscono per l'azione dell'acido osmico e si trovano di preferenza nella zona interna e media dello strato; altre invece restano pallide e si trovano in gran numero nella zona esterna. Queste ultime (fig. 1 *c*) hanno, in generale, un processo discendente il quale si divide e suddivide in rami pure discendenti; da questi si spiccano ramuscoli orizzontali che si congiungono, direttamente o indirettamente, coi rami ascendenti dei processi protoplasmatici delle cellule di Purkinje.

La distinzione fra le cellule nervose della zona esterna dello strato molecolare e le connettive, che pure trovansi in questa zona, è, nei preparati fatti coll' acido osmico, molto netta: le cellule nervose sono pallidissime, piriformi e a contorni delicati; le connettive invece sono stellate ed hanno contorni molto marcati (fig. 2 *a*). Queste ultime sono in piccolo numero ed hanno, spesso, rapporti stretti colle pareti dei capillari sanguigni. I loro prolungamenti concorrono alla formazione dello stroma fondamentale, il quale, per altro, è delicatissimo, ed assume forma più grossolana solo in determinate regioni, massime in prossimità dei vasi.

Potrà rimanere in molti il dubbio che l'anastomosi fra i rami ascendenti dei processi protoplasmatici delle cellule di Purkinje, da me descritta, non sia reale, ma illusoria. Io perciò dichiaro di averla verificata in un discreto numero di casi, in sezioni sottilissime, e con quella massima sicurezza che la difficoltà della visione chiara, in simili casi, consente. Nè io credo che possa nascere il sospetto che alcune delle notate particolarità morfologiche siano dovute all' azione dell'acido osmico: i ramuscoli orizzontali anastomotici sono fibrille nettissime e di aspetto perfettamente simili ai rami ascendenti dai quali si spiccano con base triangolare relativamente larga; ed inoltre presentano le ramificazioni caratteristiche di tutte le fibrille nervose.

E quanto al metodo dell'acido osmico, noterò anzi che se esso produce qua e là coaguli e alterazioni, queste però sono facilmente riconoscibili; ed in generale, esso conserva, colorandole, le più sottili fibrille, le quali, nei buoni preparati, non si presentano granulose, ma spiccano con sorprendente nettezza. Onde l' apparenza granulosa di queste fibrille, che si ha con altri metodi, deve attribuirsi ad un principio di alterazione che finisce col distruggerle. Ed io credo che preparazioni alterate fossero quelle studiate recentemente da Owsjannikow [1], almeno a giudicarne dai disegni.

Però, quanto al metodo, non voglio essere esclusivo: in queste intricate quistioni, ogni osservatore, pur tentando tutti i metodi noti, deve preferirne uno e con esso famigliarizzarsi; chè solo dalla interpretazione razionale dei risultamenti cui giunsero i diversi osservatori coi varî metodi, potrà sorgere la certezza assoluta.

Nel lavoro di Golgi [2] sulla fina anatomia del cervelletto umano sono descritte

[1] Ph. Owsjannikow, *Ueber die Rinde des Grosshirns* etc. *und Bemerkungen ueber die Structur des Kleinhirns.* Mémoires de l'Académie impériale de sciences de St.-Pétersbourg, tome XXVI, n. 11, 1879.

[2] C. Golgi, *Sulla fina anatomia del cervelletto umano.* Milano 1874.

alcune particolarità che offrono ragion di confronto con quelle da me trovate nell'*Emys*. Golgi, rispetto alle diramazioni dei processi protoplasmatici delle cellule di Purkinje, così si esprime: « Trattasi, presso a poco, di un sistema di ramificazioni ema-
« nanti da tutto il contorno dei prolungamenti protoplasmatici, cominciando dalla
« loro prima origine dal corpo cellulare fino alle ultime suddivisioni finora descritte,
« le quali ramificazioni suddividendosi, incrociandosi e contorcendosi nel modo più
« complicato e bizzarro, riescono appunto a costituire quell'uniforme intreccio, d'ap-
« parenza reticolare, esteso dal fondo alla periferia dello strato corticale esterno ». Forse queste ramificazioni corrispondono ai ramuscoli orizzontali anastomotici, o almeno ai più grossolani; e forse nell'uomo l'anastomosi è troppa fina e complicata per essere osservata coi metodi noti.

Golgi descrive pure minutamente le fibrille orizzontali od arcuate dello strato molecolare. Quanto alla loro origine però noto che non vi può essere distinzione essenziale fra quelle che provengono direttamente dai raggi midollari e quelle che provengono dai processi *cilinder-axis* delle cellule nervose. Difatti, che cosa sono questi processi, se non fibre nervose più sottili e ramificate?

I ramuscoli orizzontali anastomotici hanno grande importanza fisiologica. Riflettendo che in una sezione non si vedono chiaramente che quei rami orizzontali i quali sono pressochè paralleli al piano perpendicolare al raggio visivo, potremo avere un'idea del numero sterminato di questi ramuscoli. E riflettendo ancora che l'anastomosi diretta è piuttosto rara, e che, in generale, l'unione fra i diversi ramuscoli si effettua per mezzo di fine e numerose suddivisioni, comprenderemo come le vie di comunicazione fra gli elementi nervosi siano tante e così complicate da superare la nostra immaginazione. E fors' anche la complicazione e la finezza di questi rapporti si eleva nei mammiferi e nell'uomo ad un grado maggiore che nei vertebrati inferiori.

A moltiplicare all'indefinito le relazioni fra gli elementi nervosi centrali si aggiungono le fibrille orizzontali o arcuate, colle loro numerose e fine ramificazioni e anastomosi.

Così la complicazione dell'apparato corrisponde all'elevatezza della funzione.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. Sezione trasversa dello strato molecolare del cervelletto dell'*Emys europaea*. × 500.

Nella parte inferiore della figura sono disegnate soltanto le diramazioni più grossolane dei processi protoplasmatici delle cellule di Purkinje, e sono ommesse le fibre nervose orizzontali, che pure in questa zona sono numerose e in parte midollate:

a. processi prot. delle cellule di Purkinje.
a'. rami ascendenti di questi processi.
r. *ramuscoli orizzontali anastomotici.*
b. fibre nervose ascendenti.
b'. fibre nervose orizzontali o arcuate.
c. Piccola cellula nervosa della zona esterna.
r'. reticolo nervoso.

Fig. 2. Elementi non nervosi di questo strato (× 500).

α cellula connettiva.
β trama connettiva.
γ capillare sanguigno.

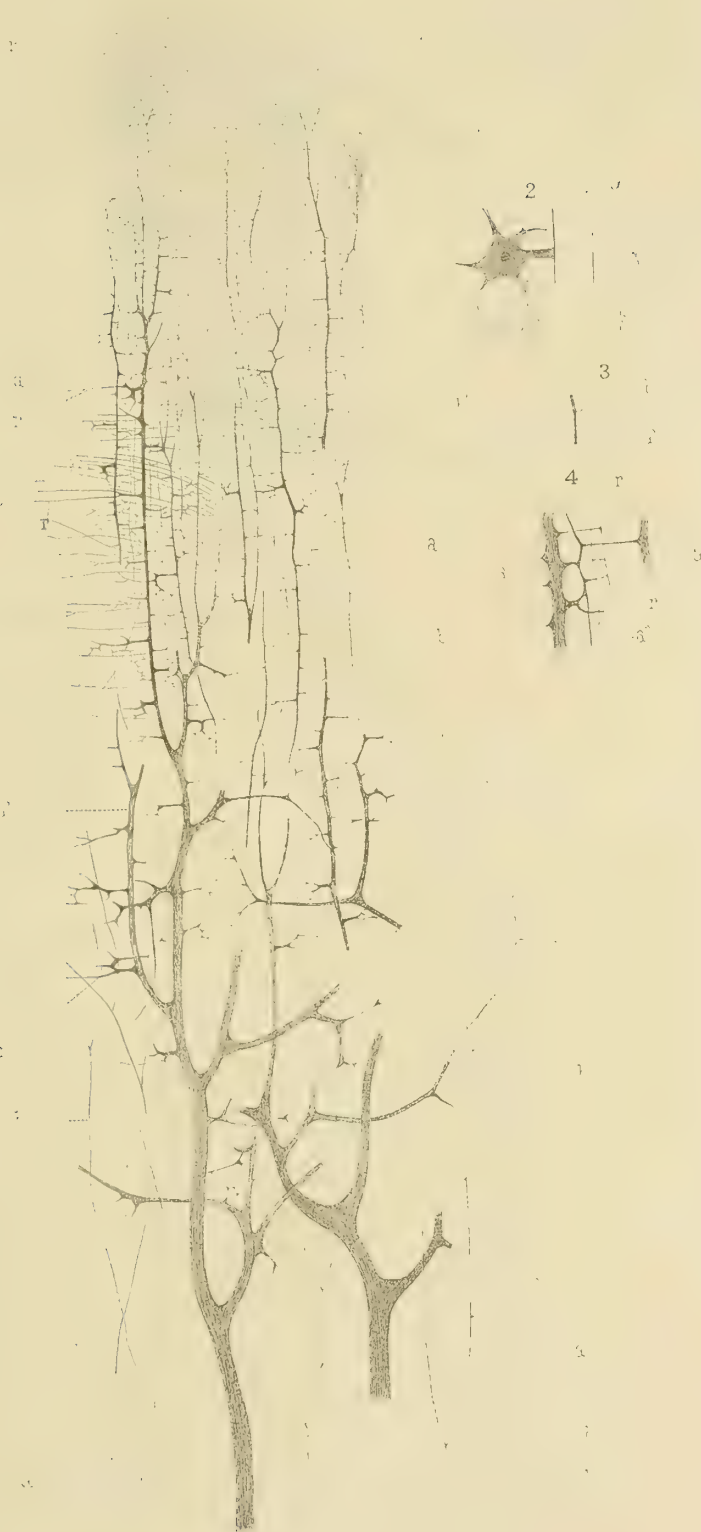
Fig. 3. (× 500) *a''* ramuscolo ascendente di un processo prot. di una cellula di Purkinje.

b' fibrille nervose arcuate.

Fig. 4 (× 1000).

a' rami ascendenti dei processi prot. delle cellule di Purkinje.
a'' loro diramazioni ascendenti più fine.
r ramuscoli orizzontali anastomotici.

G. Bellonci del

Lit Bruno e Salomone Roma

Ricerche dirette alla sintesi del timol.

Nota di E. PATERNÒ e F. CANZONERI

letta nella seduta del 3 aprile 1881.

È opinione generale dei chimici che l'isomeria fra il timol naturale e quello ottenuto sinteticamente dipenda esclusivamente dalla posizione relativa del gruppo OH, e che tanto l'uno che l'altro sieno derivati della parapropilmetilbenzina. Questa opinione è principalmente fondata sulla trasformazione dei due timoli nel medesimo cimene e nello stesso timochinone.

Però per quanta importanza abbiano questi fatti non possono essere considerati come decisivi in una serie dove le trasformazioni del propile in isopropile, e viceversa, avvengono tanto facilmente, tanto più se si conferma la identità osservata da Lippmann e Lange [1] dell'acido ossicuminico (ac. ossiisopropilbenzoico) con l'acido timoossicuminico, ottenuto da Barth per l'azione della potassa fusa sul timol cristallizzato [2].

Allo scopo di risolvere tale quistione abbiamo tentato d'introdurre nel nucleo del cimene il gruppo OH in un posto diverso di quello che occupa nel carvacrol, per paragonare il nuovo fenol, che in tal modo avrebbe dovuto prendere origine, col timol naturale e stabilirne o escluderne la identità.

Fra le diverse vie che avrebbero potuto condurci allo scopo ne abbiamo pel momento scelto due. Da un lato abbiamo cioè tentato, partendo dal solfacido del bromocimene, di trasformarlo, per la sostituzione inversa di Br con H, in un solfacido del cimene che avrebbe potuto essere diverso da quello che si forma direttamente dal cimene e nel quale il gruppo solforico si sarebbe perciò trovato al posto conveniente per condurre ad un fenol isomero del carvacrol e quindi identico o isomero col timol naturale, a seconda della natura della catena laterale $C_3 H_7$ contenuta in quest'ultimo. Dall'altro lato, partendo dalla cimidina, ottenuta per riduzione del nitrocimene liquido e passando pel diazocomposto, abbiamo preparato il corrispondente ossiderivato del cimene.

I risultati che abbiamo fin' ora ottenuti non ci hanno permesso di venire a nessuna conseguenza decisiva; purtuttavia crediamo di doverli esporre salvo a ritornare in seguito sul medesimo argomento.

(1) Wiener Monatshefte für Chem. I, 1880, p. 217.
(2) Berichte. etc. t. XI, p. 567.

PARTE PRIMA

Solfacidi del bromocimene

Lo studio dei solfacidi del bromocimene era stato intrapreso già da alcuni anni da uno di noi insieme al dott. Camillo Colombo [1] e ci aveva condotti al risultato che per l'azione dell'acido solforico sul bromocimene si otteneva un miscuglio di solfacidi, tra i quali uno cristallizzato in aghi, poco solubile nell'acqua bollente, e che non fondeva ancora a 230°: un altro cristallizzato in grossi prismi, solubilissimo nell'acqua e fusibile sotto 100°. Ma le difficoltà allora incontrate per la completa separazione e purificazione di questi prodotti ci hanno consigliato ora a cambiar metodo e per la preparazione del solfacido abbiamo ricorso all'azione della cloridrina solforica sul bromocimene.

Sopra 200 gr. di bromocimene puro, contenuto in un ampio pallone congiunto ad un refrigerante ascendente, abbiamo fatto cadere, raffreddando esternamente con acqua, per piccole porzioni, 200 gr. di cloridrina solforica bollente da 256 a 260°. La reazione è accompagnata da abbondante svolgimento di acido cloridrico, ma vi è poca elevazione di temperatura. Verso la fine abbiamo scaldato per poco tempo a bagno maria. Aggiungendo dell'acqua al prodotto della reazione si depone abbondantemente un olio pesante, inquinato da piccole quantità di bromocimene, che pel raffreddamento si rapprende in una massa cristallina: dalla soluzione, pel riposo, si separa in seguito una polvere bianca cristallina, che fu riconosciuta identica alla sostanza precedente, e tanto l'una quanto l'altra, come avremo l'agio di vedere in seguito, non sono altra cosa che il cloruro del solfacido del bromocimene.

La soluzione separata completamente dalla sostanza solida contiene il solfacido del bromocimene, che può ottenersi cristallizzato concentrandola a piccolo volume a *b. m.* Abbiamo però preferito di trasformarlo in sale baritico e poi per mezzo di questo abbiamo preparato il solfacido puro e gli altri sali.

Senza estenderci in dettagli inutili diremo che un attento esame dei diversi sali ci ha mostrato che in questa reazione il solfacido che si forma è un solo.

L'acido bromocimensolforico puro, ottenuto decomponendo con idrogeno solforato la soluzione del suo sale piombico, si rapprende per lo svaporamento della soluzione acquosa in sottili aghi incolori, per lenta evaporazione cristallizza invece in grosse tavole prismatiche; è solubile nell'etere, nel cloroformio e nella benzina e da quest'ultima può ottenersi facilmente cristallizzato in aghetti bianchi sottili. Contiene 3 H_2O.

Infatti: gr. 1,0612, riscaldato a circa 80° in una corrente di aria secca, perdettero gr. 0,1627 di acqua: ossia in 100 parti:

Acqua perduta 15,33

mentre la teoria per la formola:

$$C_6H_2CH_3C_3H_7Br.HSO_3 + 3H_2O,$$

richiede il 15,56 %

[1] Gaz. Chim. t. VII, p. 421.

Allo stato idrato, per lo scaldamento comincia a rammollirsi al di sopra appena 50° e si fonde completamente verso 100°. Quando è anidro si fonde invece a 130-132°.

Sale potassico. Fu preparato neutralizzando esattamente con carbonato potassico la soluzione acquosa dell'acido, svaporando e riprendendo il residuo con alcool assoluto, per separare le ultime tracce di carbonato. È solubilissimo nell'acqua e nell'alcool bollente e cristallizza in aghi trasparenti, sottili, contenenti dell'acqua di cristallizzazione che non abbiamo determinato.

Il sale secco ha fornito all'analisi i seguenti risultati.

I. gr. 0,4397 diedero gr. 0,1187 di solfato potassico.

II. gr. 0,3465 diedero gr. 0,0925 di solfato potassico.

Cioè in 100 parti:

	I	II
Potassio.	12,09	11,94

mentre per la formola: $C_6H_2CH_3C_3H_7.Br.KSO_3$ si calcola;

Potassio. . . . . 11,74 %

Il *sale ammonico* cristallizza dall'acqua in iscagliette madreperlacee.

Sale baritico. Il sale baritico, che fu preparato neutralizzando l'acido grezzo con carbonato baritico, filtrando e svaporando la soluzione, fu separato per cristallizzazioni frazionate in parecchie porzioni che, oltre ad avere la medesima apparenza, contenevano tutte la stessa proporzione di acqua e possedevano la stessa solubilità. Ecco i dati analitici che si riferiscono a questo sale:

I. gr. 2,5345 scaldato a 120° in una corrente di aria secca, perdettero gr. 0,2795 di acqua;

II. gr. 2,1899, perdettero gr. 0,2312 di acqua;

III. gr. 1,2934 perdettero gr. 0,1433 » »

Ossia per 100:

	I	II	III
Acqua	11,02	10,55	11,07

Risultati che conducono ad un sale con $5H_2O$ della formola:

$$(C_6H_2CH_3C_3H_7BrSO_3)_2Ba + 5H_2O,$$

che richiede:

Acqua . . . . 11,09 %

Due determinazioni di bario pel sale secco hanno dato:

I. gr. 0,5714 del sale fornirono gr. 0,181 di solfato baritico;

II. gr. 0,3374 fornirono gr. 0,1060 di solfato baritico;

Cioè:

	I	II
Bario in 100 p.	18,67	18,47

mentre la teoria richiede:

Bario. . . . . . . 19 %

In quanto alla solubilità:

I. gr. 16,4610 di soluzione satura a 26°, 7, lasciarono un residuo di gr. 0,2237 di sale secco.

II. gr. 9,7274 di soluzione satura a 23° 5, lasciarono residuo di gr. 0,1270.

Dai quali risultati si calcola che alle temperature indicate 100 parti di acqua sciolgono relativamente:

1,37 ed 1,32 p. del sale anidro.

È bene osservare che tutte le determinazioni precedenti furono fatte con porzioni di sale provenienti dalle più lontane cristallizzazioni frazionate.

Questo sale cristallizza in laminette o in prismi.

Sale di piombo. Fu ottenuto dal sale baritico trattandolo con acido solforico diluito e quindi neutralizzando la soluzione con carbonato piombico. Per lo svaporamento della soluzione acquosa cristallizza in iscagliette madreperlacee. Contiene $4 H_2 O$ di cristallizzazione, come mostrano le seguenti determinazioni:

I. gr. 1,4933 di sale, scaldato a 110-120° in una corrente di aria secca, perdettero: gr. 0,1272 di acqua;

II. gr. 1,8827 perdettero gr. 0,1602 di acqua;

III. gr. 2,1645 perdettero gr. 0,1825 » »

IV. gr. 0,9647 perdettero gr. 0,0825 » »

Cioè per 100:

	I	II	III	IV
Acqua.	8,50	8,50	8,43	8,55

La formola $(C_6 H_2 CH_3 C_3 H_7 Br SO_3)_2 Pb + 4H_2 O$ richiede:

Acqua. . . . . 8,34 %

Una determinazione di piombo ha fornito risultati che si accordano colla teoria. Infatti:

gr. 0,3047 di sale anidro, fornirono gr. 0,1141 di solfato piombico, ossia per 100:

Piombo 25,58

mentre si calcola:

Piombo . . . . . . 26,07 %

Per la solubilità:

gr. 6,599 di soluzione, satura a 30°, lasciarono gr. 0,1363 di residuo secco, onde si calcola che 100 p. di acqua sciolgono a 30°.

p. 2,10 del sale anidro.

Cloruro. $C_6 H_2 CH_3 C_3 H_7 Br S O_2 Cl$. Lo abbiamo preparato per l'azione del percloruro di fosforo sul sale potassico secco. Trattando con acqua il prodotto della reazione, il cloruro si separa sotto forma di un olio bruno, pesante, che bentosto si rapprende in una massa bianca cristallina. Si purifica per cristallizzazione dall'etere, dal quale si ottiene sotto forma di grossi prismi ben definiti, perfettamente trasparenti. Si fonde ad 80-81°, non si altera per l'ebollizione con $H_2 O$, scaldato con alcool invece si trasforma in acido bromocimensolforico.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,2118 di sostanza, fornirono gr. 0,2227 di un miscuglio di clòruro e bromuro di argento.

II. gr. 0,2624 di sostanza, fornirono gr. 0,1827 di solfato baritico.

Da questi dati, ammettendo che il miscuglio di Cl Ag e Br Ag sia nel rapporto di una molecola del primo per una del secondo, si calcola per 100:

	I	II
Bromo e Cloro . . . , .	36,52	—
Solfo	—	9,53

mentre la teoria per la formola sopraindicata richiede:

Cloro e Bromo	36,97
Solfo	10,28

In quanto alla determinazione del cloro e bromo dobbiamo osservare che in due esperienze fatte col metodo di Carius abbiamo avuto una perdita considerevole, e che i risultati superiori furono ottenuti aggiungendo al miscuglio di acido nitrico e nitrato di argento, un poco di bicromato potassico.

Come abbiamo superiormente accennato il cloruro bromocimensolforico si forma pure nella preparazione dell'acido bromocimensolforico trattando il bromocimene con la cloridrina solforica, e costituisce la parte che rimane insolubile nell'acqua. Si purifica spremendolo fortemente tra carte e poscia cristallizzandolo dall'etere. È in tutto identico a quello che abbiamo descritto, ed anche all'analisi ci ha dato risultati corrispondenti alla formola.

La formazione dei cloruri acidi nella reazione da noi impiegata non è del resto nuova, e Knapp pel primo nel 1869 ([1]) osservava che per l'azione della cloridrina solforica sulla benzina si ottenevano piccole quantità di cloruro benzolsolforico. Questa reazione è stata, in seguito studiata da Armstrong ([2]) e da Otto e Beckurts ([3]), e riconosciuta per generale; soltanto a noi sembra che nel nostro caso la quantità di cloruro che prende origine sia molto superiore a quella osservata dai cennati chimici in reazioni analoghe.

Amide. $C_6\ H_2\ CH_3\ C_3\ H_7\ Br\ SO_2\ NH_2$. Si forma facilmente scaldando il cloruro con ammoniaca alcoolica in tubi chiusi a 110°; l'abbiamo preparato dal cloruro delle due diverse provenienze cennate. Si presenta in isquamette splendenti o in aghi bianchi e setacei, è quasi insolubile nell'acqua, è solubile abbondantemente nell'alcool e nell'etere. Si fonde a 191°. All'analisi ha fornito i seguenti risultati: gr. 0,1734 di sostanza diedero: gr. 0,2628 di anidride carbonica e gr. 0,0853 di acqua, cioè per $^0/_0$:

Carbonio	41,33
Idrogeno	5,46

mentre per la formola si calcola:

Carbonio.	41,09 $^0/_0$
Idrogeno.	4,79 $^0/_0$

Abbiamo fatto alcune esperienze di riduzione di quest'amide con l'amalgama di sodio, nella speranza di poterla trasformare in un amide dell'acido solfocimenico isomera di quello fin'ora conosciuto con certezza, ed allo scopo che abbiamo indicato in principio di questa Nota. Però attesa la resistenza che tale solfamide offre alla riduzione, i risultati fin'ora ottenuti non sono soddisfacenti, e quantunque fossimo

([1]) Zeitschrift für Chemie 1871.
([2]) Berichte etc. t. IV, p. 356, e t. VII, p. 1024.
([3]) Berichte etc. t. XI, p. 2061.

pervenuti ad un composto privo di bromo ed evidentemente differente dall' amide cimensolforica ordinaria, fusibile a 112°, purtuttavia non ci crediamo autorizzati a trarre nessuna conseguenza. Forse ritorneremo in altra occasione sull'argomento.

Prima di lasciare quest'argomento dell'acido bromocimensolforico crediamo utile di ritornare sui prodotti che si formano per l'azione dell'acido solforico sul bromocimene, come già si disse, studiata da uno di noi insieme al dott. Camillo Colombo sin dal 1877 (¹).

Furono fatte due esperienze. Nella prima si trattarono gr. 100 di bromocimene con un miscuglio di gr. 100 di acido solforico ordinario con gr. 100 di acido solforico di Nordhausen; si scaldò per circa 20 minuti a *b. m.* quindi si lasciò raffreddare, si sciolse in acqua la massa cristallina ottenuta e si trasformò il tutto in sale baritico. Questo si separò per cristallizzazione frazionata in tre parti, oltre a quella rimasta nelle acque madri.

La prima porzione si ridisciolse in acqua e si suddivise nelle frazioni: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, delle quali, tranne che per la *e*, si determinò l'acqua di cristallizzazione ed il bario, e si ebbero i seguenti risultati:

I. Porzione *a* gr. 2,1020 di sale, disseccato a 120° in una corrente di aria secca, perdettero gr. 0,2355 di acqua;
gr. 0,3214 del sale secco fornirono:
gr. 0,1034 di solfato baritico;

II. Porzione *b*. gr. 2,5940 di sale perdettero a 120° gr. 0,263 di acqua;
gr. 0,3267 di sale secco fornirono gr. 0,1047 di solfato baritico;

III. Porzione *c*. gr. 1,66 di sale perdettero gr. 0,16 di acqua;

IV. Porzione *d*. gr. 1,4670 di sale perdettero a 120° gr. 0,1345 di acqua;

V. Porzione *f*. gr. 1,8294 di sale, scaldato a 120°, perdettero gr. 0,1515 di acqua;
gr. 0,2888 di sale secco fornirono:
gr. 0,0913 di solfato baritico.

Da questi risultati si calcola per 100:

	I(*a*)	II(*b*)	III(*c*)	IV(*d*)	V(*f*)
Acqua.	11,20	10,14	9,63	9,16	8,28
Bario nel sale anidro	18,91	18,85	—	—	20,15

Per le solubilità di queste medesime porzioni si ottennero i risultati seguenti:

(*a*) gr. 21,0033 della soluzione di questa porzione di sale satura a 18°,75, lasciarono un residuo che disseccato a 110° pesava gr. 0,1763;
(*b*) gr. 18,214 di soluzione satura a 18°,75 lasciarono un residuo a secco di gr. 0,361;
(*d*) gr. 20,602 di soluzione satura a 18°,75 lasciarono gr. 0,3915 di residuo secco;
(*f*) gr. 7,6495 di soluzione satura a 15°,5 lasciarono un residuo del peso di gr. 0,158.

D'onde si calcola che 100 p. di acqua sciolgono alla temperatura di 18°,75, per le prime tre porzioni, ed a quella di 15°,5 per l'ultima parte:

a	*b*	*d*	*f*
0,84	2,02	1,94	2,10

di sale anidro.

(¹) Gazz. Chim. V. VII, p. 421.

La 2ª e 3ª delle porzioni primitive si riunirono e si cristallizzarono dall'acqua bollente; la parte prima depostasi diede all'analisi:

gr. 3,7053 del sale, scaldato a 110° in una corrente di aria secca, perdettero gr. 0,3731 di acqua;

gr. 0,1840 di sale secco fornirono gr. 0,0910 di solfato baritico;

gr. 5,647 di soluzione satura a 15°,5 lasciarono un residuo secco del peso di gr. 0,128.

Cioè in 100 parti:

Acqua	10,07
Bario	20,21
Solubilità a 15°,5 . .	2,31

Dietro a questi primi risultati il sale baritico fu trasformato in piombico, operando separatamente con le frazioni *b*, *c*, *d*, della 1ª porzione, che secondo i risultati delle analisi sembrano più omogenee, mentre le frazioni *e* ed *f*, si riunirono al sale proveniente dalle frazioni 2ª e 3ª. Una terza porzione di sale piombico si ebbe finalmente dalle acque madri del sale baritico rimaste dopo che si depose la 3ª porzione.

L'analisi di due frazioni depostesi successivamente per cristallizzazione della 1ª porzione di sale piombico diede i risultati seguenti:

I. gr. 2,3458 di sale disseccato a 110° abbandonarono gr. 0,2066 di acqua; gr. 13,319 di soluzione, satura a 15°, lasciarono un residuo di sale secco del peso di gr. 0,2475;

II. gr. 1,5897 di sale abbandonarono gr. 0,143 di acqua.

Si calcola quindi in 100 parti:

	I	II
Acqua.	8,87	8,99
Solubilità a 15° . .	1,89	—

La seconda porzione dal sale piombico diede:

gr. 1,6632 di sale perdettero per lo scaldamento a 110°, gr. 0,1642 di acqua;

gr. 16,0610 della soluzione, satura a 15°, lasciarono gr. 0,4295 di residuo.

Cioè:

Acqua	9,86
Solubilità a 15°. .	2,74

Finalmente dalla 3ª porzione ottenuta come fu detto dalle acque madri del sale baritico primitivo fu ottenuto un sale del quale gr. 1,1665 perdettero per lo scaldamento a 110°, gr. 0,068 di acqua, e che conteneva quindi in 100 p.

Acqua 5,82

Questo sale piombico trattato con idrogeno solforato fornì una sostanza poco solubile nell'acqua bollente, dalla quale cristallizza in belle laminette che per lo scaldamento non si fondono ancora a 230°.

Nella seconda preparazione si trattarono gr. 400 di bromocimene con un miscuglio di gr. 300 di acido solforico ordinario e gr. 300 di fumante, scaldando per un tempo più lungo che nella prima esperienza. Trattando moderatamente con acqua il prodotto della reazione si separò un olio pesante che tosto si rapprese in una massa cristallina, la quale fu raccolta ed esaminata separatamente dalla soluzione solforica.

La parte cristallizzata si fece bollire con acqua e carbonato baritico con che si ebbero sette diverse frazioni, che all'analisi fornirono i seguenti risultati:

I. gr. 2,5444 di sale, diseccato in una corrente di aria secca a 110° perdettero gr. 0,4607 di acqua;
gr. 26,015 di soluzione satura ad 11°,4 lasciarono un residuo secco di gr. 0,175.

II. gr. 2,6178 di sale perdettero gr. 0,479 di acqua;
gr. 0,2543 di sale secco fornirono gr. 0,0813 di solfato baritico;
gr. 17,4936 della soluzione satura ad 11°,4 lasciarono gr. 0,1198 di residuo.

III. gr. 2,8322 di sale perdettero gr. 0,5206 di acqua;
gr. 0,2003 di sale secco fornirono gr. 0,0645 di solfato baritico;
gr. 18,0465 di soluzione satura ad 11°,4, lasciarono gr. 0,1170 di residuo.

IV. gr. 1,736 di sale perdettero gr. 0,3236 di acqua.

V. gr. 1,795 di sale perdettero gr. 0,3227 di acqua;
gr. 0,2852 di sale secco fornirono gr. 0,0905 di solfato baritico.

VI. gr. 3,282 di sale perdettero, per lo scaldamento a 110°, gr. 0,591.

VII. gr. 2,1486 di sale perdettero gr. 0,387 di acqua.

Dai precedenti risultati si calcola:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Acqua.	18,21	18,29	18,38	18,27	17,92	18,06	18,01
Bario (nel sale secco). .	—	18,80	18,94	—	18,65	—	—
Solubilità a 11°,4 . . .	0,67	0,68	0,65	—	—	—	—

Tutte queste porzioni di sale baritico furono riunite e trasformate in sale piombico. Di esso furono ottenute due frazioni che per l'acqua di cristallizzazione e le solubilità fornirono:

I. gr. 2,3016 di sale perdettero per lo scaldamento gr. 0,2138 di acqua;
gr. 15,408 di soluzione satura a 20° lasciarono un residuo di gr. 0,3094.

II. gr. 2,529 di sale perdettero gr. 0,235 di acqua;
gr. 15,0255 di soluzione satura a 20° lasciarono un residuo di gr. 0,2893.

III. gr. 1,5036 perdettero gr. 0,1416 di acqua;

IV. gr. 1,9004 perdettero gr. 0,1773 di acqua.

Cioè in 100 parti:

	I	II	III	IV
Acqua	9,28	9,29	9,41	9,13
Solubilità a 20°. . .	2,05	1,96	—	—

Finalmente il sale piombico trattato con idrogeno solforato fornì il composto cristallizzato in aghetti bianchi, infusibili ancora a 230°, ottenuto nella prima preparazione.

In quanto all' esame delle acque solforiche dobbiamo riconoscere che fu fatto molto incompletamente, purtuttavia dalle poche analisi dei sali di bario o da quelle dei sali di piombo e dallo studio dell'acido libero, ottenuto decomponendo con idrogeno solforato l'ultimo sale, si deduce che in esse era contenuto ancora l'acido che fornisce il sale baritico contenente più del 18 % di acqua, mischiato ad un altro acido a cui corrisponde un sale baritico con minor quantità di acqua di cristallizzazione. Cercando ora di trarre qualche conseguenza dalle esperienze che abbiamo

sommariamente esposto e dalle analisi fatte e di mettere in relazione quest'ultimi risultati con quelli ottenuti trattando il bromocimene con la cloridrina solforica, a noi sembra poter dedurre che per l'azione dell'acido solforico sul bromocimene prendono origine tutti e tre gli acidi bromocimensolforici, la cui formazione si può prevedere in tale reazione. Infatti dalla prima serie di esperienze risulta evidentemente la formazione dell'acido bromocimensolforico da noi descritto in principio di questa Memoria, fusibile allo stato idrato sotto 100°, il cui sale di bario contiene 11,09 % di acqua, del quale 100 p. di acqua ne sciolgono circa 1,35, ed il cui sale di piombo contiene 8,34 % di acqua; però mischiato ad un altro acido i cui sali di bario e piombo contengono molto meno acqua e sono più solubili dei primi.

Nella seconda serie di esperienze, oltre al miscuglio ora cennato, abbiamo ottenuto e nettamente constatato la formazione di un terzo isomero il cui sale di bario, molto meno solubile degli altri due, contiene più del 18 % di acqua e corrisponde alla formola: $(C_6 H_2 CH_3 C_3 H_7 Br SO_3)_2 Ba + gH^2 O$ che richiede per 100:

Acqua. 18,34

Ed il cui sale piombico contiene similmente più acqua, e precisamente 4 e ½ $H_2 O$, per le quali si calcola in 100 parti:

Acqua 9,29

PARTE SECONDA

Trasformazione della cimidina in ossicimene.

La cimidina adoperata in queste ricerche fu preparata col processo indicato da Barlow ([1]) distillando cioè il nitrocimene con limatura di ferro ed acido acetico e bolliva da 248 a 252°; siccome la quantità che in tal modo se ne ottiene è molto scarsa (80 gr. partendo da più di 500 gr. di nitrocimene) abbiamo provato a ridurre il nitrocimene con lo stagno e l'acido cloridrico, ma senza ottenere risultati migliori.

Per trasformare la cimidina nel corrispondente fenol abbiamo in principio fatto un tentativo seguendo le indicazioni di Tiemann e Schötten ([2]) per la preparazione del cresol dalla toluidina, ma non avendo ottenuto risultati soddisfacenti, abbiamo in seguito preferito di ricorrere alla decomposizione con l'acqua del solfato di diazocimene. A questo scopo abbiamo preparato il solfato di cimidina, sciogliendo la base libera nell'etere ed aggiungendovi goccia a goccia la quantità pesata di acido solforico concentrato; si ottiene così sotto forma di una poltiglia costituita di laminette madreperlacee, che raccolte sopra un filtro e lavate con etere si alterano prontamente pel disseccamento all'aria.

Abbiamo tentato di preparare, per l'azione dell'acido nitroso, sul solfato di cimidina sospeso in poca acqua ed aggiunzione successiva di alcool ed etere alla soluzione, il solfato di diaziocimene puro, ma non ci siamo riusciti, sicchè abbiamo dovuto contentarci, compita l'azione dell'acido nitroso, di diluire in molta acqua e

([1]) Jahresbericht.... 1855, p. 546.
([2]) Berichte etc. T. XI. p. 767.

portare quindi all'ebollizione; si separa così rapidamente una sostanza oleosa bruna. Il prodotto della reazione, contenente considerevole quantità di prodotti resinosi, fu distillato in una corrente di vapor d'acqua, che trasporta una certa quantità di un olio giallo, che ha tutti i caratteri di un fenol. Questa sostanza disseccata sul cloruro di calcio e distillata frazionatamente passò per la maggior parte fra i 228 e i 234°, sicchè possiede approssimativamente il punto di ebollizione dei timoli. Avendone a nostra disposizione una quantità troppo piccola per farne uno studio esatto e purificarla completamente, l'abbiamo trasformato in nitroso derivato. Questo si ottiene facilmente e purificato per cristallizzazione dalla benzina si presentava in aghetti gialli fusibili a 152-153°, cioè alla stessa temperatura del nitrosocanfotimolo da noi descritto fin dal 1878 [1]; però essendochè tra esso e il nitrosoderivato del timol naturale, fusibile secondo R. Schiff a 155-156°, si osserva una differenza troppo piccola nel punto di fusione, abbiamo voluto trasformarlo, per l'azione ossidante del ferricianuro potassico in nitroderivato, il quale si può molto più facilmente caratterizzare, essendochè quello del canfotimol si fonde a 77° mentre quello del timol naturale si fonde a 137°. Sventuratamente la quantità del nitrosoderivato a nostra disposizione era troppo piccola, e per quanta cura avessimo adoperato nel condurre l'esperienza non ci fu dato di ottenere che una piccola quantità di una sostanza oleosa che non ci riuscì ad ottenere cristallizzata, e quindi tutto il nostro lavoro rimane pel momento senza risultato. Purtuttavia dobbiamo dichiarare che la lunga abitudine a maneggiare i timoli, il punto di fusione e l'abito del nitrosoderivato, non che la difficoltà già da noi altra volta incontrata ad ottenerne cristallizzato il nitroderivato, ci fanno fortemente sospettare che il timol ottenuto dalla ciminina sia identico al canfotimol.

Se questa identità viene confermata da esperienze ulteriori avremo almeno conseguito lo scopo di stabilire la costituzione del nitrocimene della cimidina e degli aciti nitro ed ossitoluico che possono ottenersi dal primo di questi composti.

[1] Gazz. Chim. T. VIII, p. 502.

Ricerche e considerazioni sulla natura chimica della picrotossina.

Nota di E. PATERNÒ ed A. OGLIALORO

letta nella seduta del 6 febbraio 1881.

In seguito alle nostre ricerche sulla picrotossina (1) le quali mettevano in dubbio la esattezza del lavoro di Barth sul medesimo argomento (2), questo chimico, insieme a Kretschy, ha ripreso lo studio di tale sostanza ed ha presentato nel gennaio dell'anno corrente alla I. R. Accademia delle scienze di Vienna (3) un esteso lavoro sull'argomento. Riuscendo difficile a parer nostro, per coloro che sono estranei alla polemica, dalla lettura del lavoro di Barth e Kretschy, a farsi un concetto chiaro del contingente che ciascuno di noi ha portato per la conoscenza della picrotossina, così crediamo prima d' ogni altro necessario di premettere un rapido cenno dello stato delle cose prima che noi avessimo fatto della picrotossina oggetto di studio; in tal modo sarà a tutti facile di poter valutare l'importanza relativa delle nostre ricerche e di quelle del Barth.

Com' è noto la picrotossina fu scoperta da Boullay nel 1812. Oppermann nel 1833 (4) ne fece pel primo l'analisi e le assegnò la formola $C_5 H_6 O_2$. In seguito Pelletier e Cuerbe nel 1836 (5) da un analisi che loro fornì:

Carbonio 60,91
Idrogeno 6,00

e che, calcolata in rapporto all'attuale peso atomico del carbonio, corrisponde a

Carbonio 59,62
Idrogeno 6,00

ne dedussero la formola $C_{12} H_{14} O_5$ che comunemente viene attribuita al Barth. Risultati a presso a poco corrispondenti ottenne pure per la composizione della picrotossina il Regnault nel 1839 (6).

Oltre ai cennati chimici molti altri fecero della picrotossina argomento del loro studio, ma solo per quella parte che concerne le sue relazioni qualitative ed i varî suoi caratteri, nessuno essendosi più oltre occupato della composizione o d'indagare

(1) Atti della r. Accademia dei Lincei, Transunti t. I, p. 21 ed Atti vol. III, seduta del 6 aprile 1879. — Gazz. chim. ital. t. VI, p. 531, t. VII, p. 193 e t. IX, p. 57.

(2) Sitzungsberichte de k. Ak. d. Wiss. B. XLVIII, p. 25, 1863

(3) Ib. B. LXXXI, p. 7, 1880.

(4) Pogg. Annalen XIII, 445 e Jahresb. XIII, 225.

(5) Annales de chimie et de physique LIV, p. 181 e p. 196.

(6) Annales t. LXVIII, p. 157.

la sua intima natura chimica, sino al 1863, epoca in cui vennero pubblicate le accennate ricerche del Barth (1).

In questo importante lavoro il Barth avendo ripetuto l'analisi della picrotossina ha trovato per il carbonio dei numeri variabili dal 58,79 al 60,25 e per l'idrogeno dal 5,55 al 6,28, donde, attribuendo la differenza alla presenza di un poco di acido menispermico di Boullay, contenente assai meno carbonio, e supponendo quindi più esatti i numeri più alti, credette di confermare la formola $C_{12} H_{14} O_5$, che richiede:

Carbonio 60,50
Idrogeno 5,88.

Il Barth non si limita però a questo. Egli appoggia inoltre la superiore formola sulla esistenza di due derivati cristallizzati, uno bibromurato $C_{12} H_{12} Br_2 O_5$ cioè, ed un nitrato $C_{12} H_{13} (NO_2) O_5$.

Questo era lo stato delle conoscenze sulla picrotossina quando noi nel 1876 (2) abbiamo cominciato ad occuparcene. Relativamente alla composizione della picrotossina, avendo ottenuto nella sua analisi dei numeri variabili per il Carbonio dal 59,07 al 59,49 e per l'idrogeno dal 5,44 al 5,64, abbiamo creduto poterla rappresentare con la formola $C_9 H_{10} O_4$ per la quale si calcola:

Carbonio 59,34
Idrogeno 5,49.

In quanto agli altri risultati del nostro lavoro possono riassumersi così:

1. Trattando la picrotossina in soluzione nell'etere con una corrente di acido cloridrico si depone una sostanza fusibile ad alta temperatura che abbiamo chiamato *picrotosside* e che abbiamo rappresentato con la formola $C_{15} H_{16} O_6$ e resta in soluzione un composto fusibile a 246-248°, detto da noi *idrato di picrotosside* $C_{15} H_{18} O_7$.

2. L' idrato di picrotosside $C_{15} H_{18} O_7$ si forma pure ed in maggiore copia saturando con acido cloridrico una soluzione alcoolica di picrotossina.

3. L' idrato di picrotosside per l'azione del cloruro di acetile si trasforma parzialmente in *picrotosside* e fornisce in parte un derivato acetilico; dà pure un derivato benzoilico.

4. La picrotossina, in sospensione dell'etere, per l' azione del bromo si trasforma in idrato di picrotosside e in un composto bromurato $C_{15} H_{15} Br O_6$ della composizione del *picrotosside monobromurato.*

Come si vede a tutti i derivati della picrotossina noi siamo stati condotti ad attribuire delle formole contenenti C_{15}, mentre alla picrotossina avevamo in principio assegnato una formola con C_9; evidentemente non ci sfuggì la incoerenza ed anzi nella nostra seconda Nota (3) abbiamo detto: « La costituzione di questi com- « posti, le relazioni che li legano alla picrotossina ed il modo come prendono ori- « gine da essa, ci sono fin' ora completamente sconosciuti, e le formole grezze alle « quali la loro composizione conduce non presentano alcun rapporto semplice con la « formola $C_9 H_{10} O_4$, che siamo stati precedentemente condotti ad ammettere per la

(1) Sitzungsberichte d. k. k. Akademie zu Wien, t. XLVIII, p. 25.
(2) Gazzetta chimica, t. VI, p. 531, ed in seguito, t. VII, p. 193 e t. IX, p. 57.
(3) Gazz. chim. VII, p. 195.

« picrotossina » ed in altra occasione [1] abbiamo soggiunto: « alle formole attri-
« buite, sia alla picrotossina, sia ai derivati nelle varie occasioni descritti, non
« annettiamo altro valore nè altro significato che quello di rappresentare, sino ad un
« certo punto, la loro composizione elementare ».

Si vede quindi che se nelle nostre pubblicazioni non abbiamo cambiato la formola della picrotossina è stato non perchè la crediamo menomamente possibile dopo lo studio dei suoi derivati, ma perchè, come abbiamo in più occasioni accennato, aspettavamo da ulteriori ricerche gli elementi per istabilire una formola definitiva non fondata sulla sola composizione centesimale.

Ed anzi aggiungeremo che fino dalla està del 1879, cioè assai prima della pubblicazione del lavoro di Barth, uno di noi, in una lettera al prof. Cannizzaro, comunicandogli i risultati di talune esperienze sulla picrotossina, gli annunziava come da esse risultasse per la picrotossina una formola con 30 at. di carbonio, formola che tutt'ora ammettiamo e manteniamo, anche dietro il lavoro di Barth e Kretschy e che, secondo noi, non solo spiega le relazioni fra picrotossina, picrotosside ed idrato di picrotisside, ma interpetra i nuovi risultati di Barth e Kretschy e dà la ragione di talune discrepanze che sembrano apparire fra i risultati nostri e quelli di questi chimici.

Ma ritornando un poco indietro, si scorge dal sunto che abbiamo fatto delle nostre ricerche sulla picrotossina, come i risultati da noi ottenuti si trovino essenzialmente in contraddizione con quelli contenuti nella Memoria di Barth, essendo impossibile mettere in relazione il picrotosside ed il suo derivato bromurato e l'idrato di picrotasside con la dibromopicrotossina e la nitropicrotossina di Barth.

Evidentemente da una parte o dall'altra vi doveva essere un errore, e noi crediamo di poter affermare che le nuove ricerche di Barth e Kretschy su questo punto diano perfettamente ragione a noi, se non altro perchè non un cenno vi è fatto che tenda a confermare la esistenza della bibromopicrotossina o della formola della nitropicrotossina.

Nel paziente e lungo lavoro di Barth e Kretschy, del quale intraprendiamo ora lo esame, questi chimici, lasciando completamente da parte e quasi dimenticando il lavoro precedente del Barth, al quale noi avevamo portato così grande strappo si circonscrivono allo esame della composizione elementare della picrotossina che essi credono non sia una sostanza unica, ma il miscuglio di tre sostanze diverse, di composizione molto vicina, che si separano assai difficilmente e che hanno chiamato coi nomi di *picrotossina*, *picrotina* ed *anamirtina*.

La sostanza per la quale Barth e Kretschy hanno conservato il nome di *picrotossina* costituisce, secondo questi chimici, il 32 per $^0/_0$ della picrotossina grezza, contiene circa 61,5 per $^0/_0$ di carbonio e corrisponde alla formola $C_{15}\ H_{16}\ O_6$, da noi attribuita al picrotosside; però ne differisce notevolmente per i caratteri di solubilità e pel punto di fusione situato a 201° (p. 23 e seguenti) mentre il nostro picrotosside non si fonde ancora a 310°; si trasforma però facilmente in picrotosside il quale ne sarebbe quindi un polimero. La nuova picrotossina cristallizza con una

[1] Gaz. ch. ital. t. IX, p. 63.

molecola di acqua che perde facilmente; in certe condizioni forse anche con $^1/_4$ H_2O soltanto (p. 28).

La *picrotina* che sarebbe il costituente principale della vecchia picrotossina, ne forma il 66 per $^0/_0$, contiene circa il 57,5 per $^0/_0$ di carbonio, corrisponde secondo Barth e Kretschy alla formola $C_{25}\ H_{30}\ O_{12}$, si fonde a 250-251° e si confonde per tutti i suoi caratteri col nostro idrato di picrotosside, salvo delle differenze che esamineremo in seguito.

Anche la *picrotina* si depone con acqua di cristallizzazione che sembra però in quantità variabile (p. 34).

Finalmente l'*anamirtina* costituisce appena il 2 per $^0/_0$ della picrotossina grezza, contiene soltanto 56 per $^0/_0$ di carbonio, ed è fra tutte la sostanza più solubile nell'acqua. In quanto ad essa ci affrettiamo però a dichiarare che non entreremo in discussione alcuna, perchè, come abbiamo detto nelle nostre pubblicazioni precedenti, noi abbiamo in tutte le nostre ricerche adoperato della picrotossina comprata da Kahlbaum di Berlino e già purificata per parecchie cristallizzazioni; quindi, posto anche che sotto questo riguardo le esperienze di Barth e Kretschy sieno esattissime, è evidente che nel nostro prodotto non poteva più contenersi l'anamirtina. Del resto ed a ogni buon fine osserveremo che noi non abbiamo mancato di purificare ed analizzare la picrotossina ogni volta che ne abbiamo ritirato della nuova, ed anzi una volta ci è riuscito di separare una sostanza diversa fusibile a 71° che abbiamo riconosciuto per acido stearico. Osserveremo pure a questo proposito che noi nelle cristallizzazioni della picrotossina, abbiamo trovato che le ultime porzioni deposte dalle acque madri contenevano sempre delle sostanze inorganiche, quindi potrebbe attribuirsi alla presenza di queste la minor proporzione di carbonio ch'esse contengono; tanto più che delle analisi pubblicate nella prima Memoria di Barth nessuna arriva a questo limite minimo pel carbonio, ed allora è accennato che i prodotti erano privi di cenere, mentre su di ciò nessun cenno è fatto nell'odierno lavoro di Barth e Kretschy.

Comparando ora i risultati delle nostre esperienze con quelli ultimi di Barth e Kretschy si vede chiaramente che la discrepanza principale è quella relativa alla supposizione da essi fatta che l'idrato di picrotosside (picrotina) sia un principio immediato della picrotossina grezza, mentre noi l'abbiamo descritto come un prodotto di trasformazione. Discordiamo pure nella formola dell'idrato di picrotosside; ma del nostro lavoro resta intatto tutto quanto si riferisce al picrotosside, al suo derivato bromurato e in generale ai metodi di produzione dei varî composti da noi descritti.

Mettiamo un certo interesse a che ciò sia messo in chiaro, perchè a noi è sembrato che il lavoro di Barth e Kretschy sia presentato in modo da far scemare ancora il piccolo merito delle nostre ricerche.

Poste le cose nei loro giusti termini, passeremo ad esporre le esperienze e le considerazioni che ci fanno giudicare poco attendibili i risultati di Barth e Kretschy e ci fanno invece supporre che la picrotossina non sia essenzialmente un miscuglio e che tanto meno poi la picrotina (nostro idrato di picrotosside) vi sia contenuta già bella e formata nella proporzione del 66 per $^0/_0$. Esamineremo in seguito la formola di tale sostanza e mostreremo che conviene conservare quella $C_{15}\ H_{18}\ O_7$,

da noi proposta, non avendo nessuna ragione di essere quella $C_{25} H_{30} O_{12}$ suggerita da Barth e Kretschy.

Ma prima di far ciò ci sia permesso di accennare brevemente al metodo seguìto da Barth e Kretschy per separare i loro pretesi costituenti della picrotossina, cioè la nuova picrotossina $C_{15} H_{16} O_6$ e la picrotina $C_{25} H_{30} O_{12}$ non tenendo noi conto alcuno, per le ragioni esposte, di ciò che si riferisce alle porzioni ricavate dalle ultime acque madri, contenenti l'anamirtina.

Cominceremo dal rilevare che cristallizzando dall'acqua la picrotossina, tranne che le ultime porzioni contenenti il cennato 2 per $^0/_0$ di anamirtina, e nelle quali debbono evidentemente accumularsi tutte le impurezze, tutte le altre possiedono la stessa apparenza, lo stesso punto di fusione attorno a 200°, ed a presso a poco la stessa composizione. Infatti le analisi di Barth e Kretschy diedero loro:

Carbonio	60,04	59,88	60,28	59,93	59,90	59,96
Idrogeno	5,58	5,58	5,62	5,65	5,48	5,56
»	60,13	59,64	60,19	60,10	59,44	»
»	5,30	5,64	5,59	5,30	5,54	»

e noi abbiamo ottenuto:

Carbonio	59,38	59,07	59,28	59,45	59,15
Idrogeno	5,44	5,49	5,58	5,64	5,47

ossia in media:

Carbonio	59,74
Idrogeno	5,53

risultati ai quali si può riferire la formola $C_{30} H_{34} O_{13}$ ch'è quella che come abbiamo in principio accennato noi ammettiamo già da un pezzo, e la quale richiede:

Carbonio	59,80
Idrogeno	5,64

In ogni modo si è dalle porzioni le cui analisi abbiamo or ora trascritto che il Barth e Kretschy per cristallizzazioni dalla benzina e successivamente dall'acqua riescono a separare le due sostanze cennate. Ora è bene osservare sin da principio che un miscuglio contenente 32 p. del composto $C_{15} H_{16} O_6$ ($C = 61,64$; $H = 5,48$) e 66 p. di quello $C_{25} H_{30} O_{12}$ ($C = 57,47$; $H = 5,74$) dovrebbe contenere il 58,83 per $^0/_0$ di carbonio, cioè in media circa l'uno per $^0/_0$ meno di quanto le analisi concordi nostre e di Barth e Kretschy mostrano che contiene. Ma a questo fatto, che sarebbe decisivo, non possiamo attribuire l'importanza che pur dovrebbe avere, perchè non possiamo prestar troppo fede e dobbiamo considerare come una semplice approssimazione il rapporto trovato da Barth e Kretschy per i loro pretesi costituenti della picrotossina.

Ma altre considerazioni portano alla medesima conseguenza.

Per conseguire le più volte cennata separazione dei due principali costituenti della picrotossina greggia Barth e Kretschy sciolgono nella benzina a caldo le cennate porzioni ottenute per frazionamento dall'acqua e che all'analisi mostrarono a presso a poco la medesima composizione, e poi esaminano separatamente le porzioni che cristallizzano pel raffreddamento della benzina e quelle che si ottengono distillando la benzina da cui le prime si depongono.

Le porzioni rimaste disciolte nella benzina e ricapitate per distillazione di essa che gli autori indicano con Λ, sono le più ricche in carbonio; diedero loro all'analisi i seguenti risultati:

Carbonio	60,63	61,57	60,27	59,56	61,89
Idrogeno	5,44	5,48	5,55	5,68	5,53
»	60,29	61,27	60,82	58,99	58,51
»	5,71	5,55	5,40	5,65	5,69

Le porzioni invece depositatesi pel raffreddamento della benzina che gli autori indicano con Σ contengono tutte proporzionalmente meno carbonio e diedero all'analisi:

Carbonio	57,40	58,74	57,83	58,58	57,95	59,49
Idrogeno	5,72	5,34	6,01	5,97	5,71	5,65
»	58,54	57,61	57,01	57,44	56,12	»
»	5,73	5,73	5,77	5,82	6,04	»

Dalle porzioni Λ gli autori per nuove cristallizzazioni dalla benzina e dall'acqua bollente isolano il composto $C_{15} H_{16} O_6 + H_2 O$ o $C_{30} H_{32} O_{12} + 2 H_2 O$, pel quale conservano il nome di picrotossina e che sembra possa esistere sotto una modificazione contenente meno acqua di cristallizzazione ($2 C_{30} H_{32} O_{12} H_2 O$) ed il quale può trasformarsi nel nostro picrotosside $C_{15} H_{16} O_6$. Però quello che è rimarchevole nell'esame di queste porzioni Λ si è l'osservazione del fatto che la loro composizione varia notevolmente per la cristallizzazione e che la composizione media delle frazioni non corrisponde a quella delle porzioni da cui derivano. È poi notevolissimo il fatto che cristallizzando dall'acqua il residuo delle ultime acque madri di tutte le varie porzioni con Λ (p. 28) gli autori hanno ottenuto due frazioni f_1 ed f_2 che all'analisi diedero:

Carbonio	59,89	59,84
Idrogeno	5,77	5,66

cioè risultati concordanti con quelli forniti dalla picrotossina grezza cristallizzata dall'acqua, e che conducono alla formola $C_{30} H_{34} O_{13}$ che noi ammettiamo.

Ora non si può negare che questa costanza nella composizione di un preteso miscuglio debba colpire, essendo assai strano che dopo tante cristallizzazioni i due costituenti rimangano sempre nel medesimo rapporto. Sorge quindi spontanea la supposizione che il preteso miscuglio sia un vero e definito composto poco stabile, che la ebollizione con la benzina scinde nei due composti più volte cennati. Un criterio, forse importante, per fare prevalere l'una o l'altra delle ipotesi si avrebbe potuto avere se Barth e Kretschy si fossero dati la pena di registrare i punti di fusione di tutte le varie porzioni da loro analizzate, perchè allora si sarebbe forse potuto meglio giudicare se avveniva una semplice separazione o una decomposizione, essendochè come abbiamo cennato mentre la picrotossina vecchia e la nuova si fondono a circa 200°, la picrotina (idrato di picrotosside), che pure forma il 66 per $^0/_0$ di quel miscuglio si fonde a 250°.

In quanto alle porzioni Σ gli autori hanno insieme riunito da un lato, quelle contenenti attorno al 58,5 per $^0/_0$ di carbonio, e dall'altro quelle contenenti circa il 57,5. Dal primo miscuglio per cristallizzazioni frazionate hanno separato ancora della picrotossina nuova ed una sostanza contenente a presso a poco il 58 per $^0/_0$ di carbonio,

che dicono di non aver potuto studiare per mancanza di tempo e di materiale e della quale hanno trascurato anche di determinare il punto di fusione. In quanto alla riunione delle frazioni contenenti il 57,5 per $^0/_0$ di carbonio esse costituiscono essenzialmente la picrotina di Barth e Kretschy da loro rappresentata colla formola $C_{25}H_{30}O_{12}$ e che in tutti i suoi caratteri presenta la più grande somiglianza con l'idrato di picrotosside da noi descritto già sin dal 1877. Fermiamoci un poco su questo punto. L'identità della picrotina di Barth e Kretschy col nostro idrato di picrotosside oltre che dai caratteri generali risulta dal punto di fusione, da essi trovato a 250-251° e da noi a 248-250°.

Ammessa la identità delle due sostanze, del resto non posta in dubbio nemmeno da Barth e Kretschy, diremo le ragioni per le quali crediamo che debba preferirsi la nostra formola.

Esse sono parecchie, fra le quali due principalissime: la prima che la nostra formola è confermata dalla esistenza dei derivati acetilico e benzoilico, che non potrebbero interpretarsi con una formola con C_{25}; la seconda che, come risulta dalle nostre precedenti esperienze, l'idrato di picrotosside disidratandosi si trasforma in picrotosside. Ora questa sostanza è un polimero della nuova picrotossina di Barth e Kretschy per la quale questi chimici, in conformità alle nostre vedute, emettono la formola $C_{15}H_{16}O_6$, e dovendo, in conseguenza del fatto superiormente accennato, ammettere un rapporto semplice tra questa formola e l'altra dell'idrato di picrotosside, o picrotina, l'una o l'altra delle due formole $C_{15}H_{16}O_6$ e $C_{25}H_{30}O_{12}$ dev'essere errata; col nostro modo di vedere sparisce tale anomalia ed ecco quindi la necessità di preferire per la picrotina la nostra formola. Noi siamo anzi sicuri che se Barth e Kretschy avessero meglio considerato i cennati fatti sarebbero venuti al nostro medesimo risultato. Del resto nemmeno le analisi elementari danno appoggio alla formola $C_{25}H_{30}O_{12}$, perchè bisogna riconoscere che nel numero grande delle loro analisi, senza una ingiustificabile predilezione, Barth e Kretschy non avrebbero avuto ragione di scegliere quelle meno numerose che diedero loro, circa il 57,5 per $^0/_0$ di carbonio, quanto richiede la formola $C_{25}H_{30}O_{12}$, invece delle seguenti altre che togliamo dal loro istesso lavoro:

Carbonio	57,83	57,58	57,95	57,61	57,84	58,04
Idrogeno	6,01	5,97	5,71	5,73	5,52	5,81 (¹)

e che si accordano colla formola $C_{15}H_{18}O_7$, la quale richiede:

Carbonio 58,06
Idrogeno 5,81.

Alle analisi precedenti di Barth e Kretschy possiamo aggiungere le seguenti altre da noi fatte:

Carbonio	57,83	57,92	57,92	57,81	58,25	58,09	58,05	57,59
Idrogeno	5,83	5,90	5,95	5,71	5,89	5,86	5,89	5,80

e sarà facile dedurre che anche per questo riguardo tutte le probabilità sono per la nostra formola. Nè si dica che il nostro prodotto era impuro come il Barth e Kretschy gratuitamente suppongono, perchè un simile sospetto non è da nulla

(¹) Queste analisi sono segnate nella Memoria di Barth e Kretschy coi numeri: 22, 23, 26, 32, 59, 65.

giustificato. La osservazione di Barth e Kretschy (p. 36) che noi abbiamo descritto l'idrato di picrotosside una volta come insolubile nell'etere un'altra volta come solubile riposa sopra un equivoco il quale ha origine dall'avere noi detto che l'idrato di picrotosside, che si forma per l'azione del bromo sulla picrotossina in *sospensione nell'etere bollente*, resta indisciolto, mentre nel caso in cui si fa agire l'acido cloridrico gassoso sulla *soluzione eterea* di picrotossina, l'idrato di picrotosside resta sciolto in questo solvente. Ora le espressioni di *soluzione*, e di *sospensione* usate nei due casi spiegano abbastanza l'equivoco e non crediamo perciò di essere caduti in contraddizione alcuna.

In quanto poi all'altra osservazione, relativa alla velenosità o meno dell'idrato di picrotosside, osserveremo che se uno di noi ha trovato che l'idrato di picrotosside conserva ancora una certa azione tossica sui pesci, mentre il dott. Fleischl ha trovato che la picrotina è innocua verso le rane ed i conigli, non crediamo siano questi fatti comparabili fra loro, e tanto meno crediamo che su di essi si possano fondare dei giudizî simili a quello di Barth e Kretschy. Oglialoro non ha studiato l'azione dell'idrato di picrotosside sulle rane e sui conigli e il dott. v. Fleischl non ha esperimentato la picrotina sui pesci nelle condizioni indicate dall'Oglialoro! Del resto le due osservazioni potranno benissimo esser di accordo, essendochè avendo la picrotossina un'azione speciale ed elettiva sui pesci non è improbabile che i suoi derivati meno velenosi conservino su di questi animali una certa azione mentre poi sono innocui verso altri.

In tutto quanto precede ci siamo ingegnati di provare come il lavoro di Barth e Kretschy, non resista ad un attento esame critico e come da esso le nostre esperienze piuttosto che una scossa ricevono una conferma.

Accenneremo ora alcune altre esperienze che confermano il nostro modo di vedere che cioè le due sostanze, in cui Barth e Kretschy scindono la picrotossina, non preesistono isolate nel prodotto primitivo ma si formano durante le operazioni d'isolamento. E prima di tutto cominceremo dal dichiarare che anche noi abbiamo trattato la picrotossina già cristallizzata dall'acqua, parecchie volte con benzina bollente, separando e qualche volta analizzando le varie frazioni ottenute.

Siamo così riusciti ad ottenere una sostanza fusibile verso 200° e contenente attorno a 61 p $^0/_0$ di carbonio, e quindi identica alla picrotossina (nuova) di Barth e Kretschy ed inoltre alcuni cristalli d'idrato di picrotosside facilmente riconoscibili al punto di fusione e agli altri caratteri. Però ci siamo sempre più convinti che le due sostanze non eran mischiate, se non altro perchè, come osservano Barth e Kretschy, la picrotina (idrato di picrotosside) è insolubile, o quasi, nella benzina, mentre la nuova picrotossina vi si scioglie discretamente; non si spiega quindi come nel prodotto primitivo la separazione avvenga così difficilmente che i prodotti ottenuti dagli ultimi residui contengano il miscuglio nelle stesse primitive proporzioni (vedi sopra), mentre poi nelle porzioni contenenti il 58,5 p. $^0/_0$ di carbonio (p. 29) che evidentemente contenevano il vero miscuglio delle due sostanze la separazione si fa facilmente e trattando con benzina resta indisciolta della picrotina (idrato di picrotosside) pura, le cui analisi sono contenute nella tabella H a pagina 31 della Memoria di Barth e Kretschy.

In ogni modo ecco le nostre esperienze cui abbiano più volte accennato:

1.° In una delle precedenti nostre Memorie (Gaz. Chim. t. IX, p. 57) abbiamo accennato che agitando con etere una soluzione contenente dell'idrato di picrotosside l'idrato di picrotosside viene trasportato da questo solvente; abbiamo da ciò inferito che probabilmente nel caso in cui l'idrato di picrotosside (picrotina) sia realmente bello e formato nella picrotossina grezza, agitando con etere le soluzioni acquose di essa, saremmo riusciti facilmente ad isolarlo ed ottenerlo puro.

Furono presi gr. 25 di picrotossina, come al solito proveniente dalla fabbrica di Kahlbaum, e furono lasciati in una boccia a tappo smerigliato per due giorni, in presenza di due litri di acqua, agitando di tempo in tempo; poscia si separò per filtrazione la parte indisciolta; la soluzione si agitò per tre volte con etere, ed il residuo degli estratti eterei fu cristallizzato dall'acqua bollente: si ebbero così dei cristalli *a*; le acque madri di essi si conservarono.

La porzione di picrotossina rimasta indisciolta nel primo trattamento con acqua si lasciò per altri due giorni in presenza di nuova acqua (2 litri) ed operando come precedentemente, si ottennero altri cristalli dallo estratto etereo, che indichiamo con *b*. La medesima operazione fu ripetuta per altre due volte, e si ebbero così le porzioni cristallizzate *c* e *d*.

Dopo questi quattro trattamenti dei gr. 25 di picrotossina, non rimase che una piccola porzione che cristallizzata dall'alcool indichiamo con *e*.

Le acque madri delle frazioni *a*, *b*, *c*, *d*, si riunirono e fornirono per lo svaporamento oltre due porzioni *f*, *g*.

Finalmente i quattro litri di acqua dei primi due trattamenti, già estratti con etere, si svaporarono a *bagno-maria* ed il residuo cristallizzato dall'acqua fornì due porzioni *m* ed *n*. Similmente dalle acque degli altri due trattamenti, già agitate con etere, si ottenne una porzione *o*.

Ora tutte queste frazioni, oltre a possedere la medesima apparenza si fondevano tutte verso i 200°. Non ci fu quindi possibile in questo modo di separare dalla picrotossina grezza la più piccola quantità d'idrato di picrotosside, che tanto facilmente si distingue al suo punto di fusione elevato.

Checchè possa dirsi questo fatto ci sembra assai eloquente.

2.° Il comportamento della picrotossina con la soluzione d'idrato potassico è a parer nostro un altro argomento in favore della supposizione che la picrotossina non sia un miscuglio, e che l'idrato di picrotosside sia un prodotto della sua trasformazione, perchè come vedremo questo prende origine in tale azione soltanto in condizioni determinate, mentre in altri casi la picrotossina resta inalterata.

Se si prendono infatti gr. 20 di picrotossina con gr. 500 di acqua, nella quale resta per la maggiore parte indisciolta, e quindi vi si aggiunge per piccole porzioni ed agitando continuamente una soluzione di gr. 10 d'idrato potassico in gr. 250 di acqua, la picrotossina si va mano mano sciogliendo per l'aggiunta della potassa e si ottiene infine una soluzione limpida appena colorata in giallognolo. Col riposo la soluzione va sempre più colorandosi in giallo e se dopo un paio di ore si tratta con acido cloridrico sino a reazione fortemente acida essa immediatamente s'intorbida e dopo poco tempo lascia deporre dei cristalli bellissimi che raccolti sopra un

filtro, lavati e disseccati si fondono attorno a 247° decomponendosi. Un prodotto simile si ottiene agitando con etere la soluzione filtrata e cristallizzando il residuo dall'acqua bollente. La sostanza così ottenuta è dell'idrato di picrotosside. All'analisi infatti, le due cennate porzioni hanno fornito:

Carbonio	58,05	57,59
Idrogeno	5,89	5,80

numeri che corrispondono a quelli richiesti dalla formola: $C_{15} H_{18} O_7$

Ricristallizzando dall'acqua le due porzioni precedenti ed abbandonando alla evaporazione spontanea le acque madri, abbiamo ottenuto dei grossi cristalli ben definiti, trasparenti ed incolori, ch' esposti all'aria diventano bianchi ed opachi, che abbiamo riconosciuto per idrato di picrotosside cristallizzato con acqua.

Oltre all'idrato di picrotosside, nella descritta esperienza non siamo riusciti ad ottenere che una piccola quantità di una materia gialla, resinosa.

La quantità d'idrato di picrotosside che si ottiene con questo processo, corrisponde ad un terzo circa della picrotossina impiegata, ma una certa porzione resta disciolta nell'acqua e non poco se ne perde nella purificazione. Il miglior metodo per separarlo dalla resina consiste nel trattare il prodotto colla benzina, che trasporta la prima e lascia indisciolto l'idrato di picrotosside, il quale si cristallizza poi dall'acqua bollente per averlo puro.

I medesimi risultati ora descritti abbiamo ottenuto ripetendo la esperienza più volte e nelle medesime condizioni. Se però invece di lasciare la soluzione potassica per un paio d'ore in riposo, prima di precipitarla con acido cloridrico, si tratta subito con questo, allora le cose vanno diversamente.

Abbiamo posto gr. 100 di picrotossina in sospensione in un litro di acqua, e vi abbiamo aggiunto, come precedentemente, per piccole porzioni, circa due terzi di una soluzione di gr. 50 d'idrato potassico in un litro di acqua; la picrotossina si sciolse quasi interamente; abbiamo filtrato rapidamente la soluzione, ed abbiamo constatato che la parte rimasta sul filtro lavata e cristallizzata dall'etere si fondeva a 195-200°; alla soluzione alcalina si aggiunse subito appena filtrata dell'acido cloridrico sino a *reazione neutra*, si depose immediatamente una sostanza cristallizzata bianca (*a*) che fu raccolta sopra un filtro; dalla soluzione filtrata, per aggiunta di nuovo acido cloridrico, si precipitò un'altra porzione di prodotto (*b*); similmente dal liquido filtrato da questo secondo precipitato, per aggiunta di un eccesso di acido cloridrico, si precipitò un'altra porzione (*c*). La soluzione separata da (*c*) che non precipitava più con acido cloridrico fu agitata con etere ed il residuo lasciato per lo svaporamento di questo, cristallizzato dall'acqua, si fondeva a 195-200°.

Le porzioni *a*, *b*, *c*, furono cristallizzate dall'acqua calda e la *b* frazionata in tre parti. Per tutte queste porzioni fu trovato il punto di fusione 195-200°. Soltanto dalle ultime acque madri di tali prodotti si ottenne una piccola quantità di sostanza fusibile verso 240°.

In questo caso adunque la soluzione potassica non reagì sulla picrotossina, evidentemente perchè si acidificò troppo presto, e tanto la porzione di sostanza rimasta indisciolta, quanto i prodotti ottenuti nelle successive precipitazioni, e quello estratto con etere, presentarono i caratteri della picrotossina primitiva.

L'importanza di questo risultato non può sfuggire a nessuno, perchè riesce per lo meno, assai difficile di poterlo spiegare ammettendo che la picrotossina sia veramente come vogliono Barth e Kretschy, il miscuglio di due sostanze diverse.

Intanto il metodo che veniamo di descrivere si può aggiungere a quelli che abbiamo già annunziato per la preparazione dell'idrato di picrotosside, ed è anzi il più rapido e conveniente.

CONCLUSIONE

Dalla discussione attenta del lavoro di Barth e Kretschy, dai risultati da noi ottenuti e principalmente dal comportamento della picrotossina con l'idrato potassico e da quello della sua soluzione acquosa per l'agitamento con etere, mal si deduce che la picrotossina sia la mescolanza di due sostanze diverse e che l'idrato di picrotosside costituisca più del 60 per $^0/_0$ di tale miscuglio. Risulta invece, come assai probabile, che la picrotossina sia un composto definito, ma poco stabile, il quale si scinde con la più grande facilità in due diversi composti, cioè in idrato di picrotosside $C_{15}\ H_{18}\ O_7$ e nel composto $C_{15}\ H_{16}\ O_6$ pel quale Barth e Kretschy hanno conservato il nome di picrotossina.

Evidentemente però dietro questi risultati, col nome di *picrotossina* deve continuarsi a indicare la sostanza che si estrae dalla coccola del levante, ed è perciò che indichèremo la picrotossina nuova di Barth e Kretschy col nome di *picrotossinina*. In quanto al composto $C_{15}\ H_{18}\ O_7$ da noi chiamato idrato di picrotosside non incontriamo difficoltà a mutarne il nome con quello di *picrotina* proposto da Barth e Kretschy.

La formola $C_{30}\ H_{34}\ O_{13}$, alla quale conduce la composizione elementare della picrotossina, si accorda non solo col modo di vedere da noi più volte esposto, ma rende facile la interpretazione di tutte le trasformazioni sin ora osservate per questa sostanza, le quali, come risulta dai fatti esposti, si riducono alla formazione di picrotossinina $C_{15}\ H_{16}\ O_6$ e di picrotina $C_{15}\ H_{18}\ O_7$, o in quella dei derivati di queste due sostanze. Scomposizione che può rappresentarsi colla equazione:

$$C_{30}\ H_{34}\ O_{13} = C_{15}\ H_{18}\ O_7 + C_{15}\ H_{16}\ O_6$$

Non crediamo che sia necessario d'insistere su questo riguardo per quello che concerne l'azione della benzina, dell'acido cloridrico, del bromo. Ci fermeremo invece sull'azione della potassa e su quella dell'anidride acetica e dell'acetato sodico. Nell'azione della potassa come abbiamo visto in un primo stadio la picrotossina si scioglie inalterata, in seguito si scinde nei suoi costituenti; ora se in questo caso non si riesce ad ottenere la picrotossinina (nuova picrotossina di Barth) nè il suo polimero (nostro picrotosside), si è perchè, come ci siamo accertati, la soluzione potassica resinifica la picrotossinina.

In quanto ai prodotti che si formano dalla picrotossina per lo scaldamento con acetato sodico ed anidride acetica, quello da noi precedentemente rappresentato con

la formola $C_{19}\ H_{20}\ O_8$ deve considerarsi come derivato della picrotossinina, mentre l'altro composto, fusibile a 227°, sarebbe con molta probabilità un corrispondente derivato della picrotina. Infatti esso ha fornito all'analisi:

Carbonio	58,53	58,34	58,36
Idrogeno	5,75	5,74	5.76

e la formola $C_{19}\ H_{22}\ O_9$ richiede

Carbonio	57,87
Idrogeno	5,58.

Ma su questo argomento speriamo di ritornare fra non guari.

Riepilogando adunque noi ammettiamo per la picrotossina e i suoi derivati le formole seguenti:

1° Picrotossina $C_{30}\ H_{34}\ O_{13}$, fusibile verso 200° con decomposizione.

2° Picrotina $C_{15}\ H_{18}\ O_7$, fusibile verso 250°.

3° Picrotossinina $C_{15}\ H_{15}\ O_6$, fusibile a 201°.

4° Acetilpicrotina $C_{15}\ H_{17}\ O_7 .\ C_2\ H_3\ O$, fusibile a 202°.

5° Benzoilpicrotina $C_{15}\ H_{17}\ O_7 .\ C_7\ H_5\ O$, fusibile a 230°.

6° Anidride picrotin-acetica $C_{19}\ H_{22}\ O_9 = C_{15}\ H_{18}\ O_5 = CH - CO_2 - C_2\ H_3\ O$, fusibile a 227° (¹).

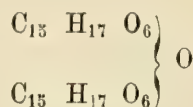
7° Picrotosside n $(C_{15}\ H_{16}\ O_6)$, fusibile sopra 310°.

8° Monobromopicrotossinina $C_{15}\ H_{15}\ Br\ O_6$, fusibile con decomposizione a 240-250°.

9° Anidride picrotossinin-acetica $C_{19}\ H_{20}\ O_8 = C_{15}\ H_{16}\ O_5 = CH - CO_2 - C_2\ H_3\ O$, fusibile verso 245°.

10° Bibromoderivato della precedente $C_{19}\ H_{20}\ Br_2\ O_8$, fusibile à 180°.

Aggiungeremo finalmente che nella picrotossina, la cui formola sviluppata può scriversi

$$\left.\begin{matrix} C_{15}\ H_{17}\ O_6 \\ C_{15}\ H_{17}\ O_6 \end{matrix}\right\} O$$

non è necessario di ammettere che i due radicali $C_{15}\ H_{17}\ O_6$, che danno origine l'uno alla picrotina e derivati, l'altro alla picrotossinina e derivati, siano fra di loro diversi. Sappiamo infatti che tanto la picrotina (idrato di picrotosside) quanto la picrotossinina possono dar luogo alla formazione di un medesimo composto, che è il picrotosside. Potrebbe quindi essere, ed è questo il caso più probabile, che i gruppi costituenti la picrotossina siano di natura tale da dar luogo facilmente a trasformazioni isomeriche. Gli stupendi risultati ottenuti, sotto questo riguardo, nello studio della santonina dal prof. Cannizzaro sono un esempio che può benissimo chiarire il nostro concetto.

(¹) Quando abbiamo descritto questo composto abbiamo accennato a dubbî che avevamo sulla sua costituzione, e se ora lo consideriamo come un'anidride non è già perchè abbiamo raccolti nuovi fatti, ma solo perchè questa ci sembra la ipotesi più semplice.

Non ci nascondiamo che non ostante la base solida che hanno tutte le precedenti considerazioni, noi avremmo desiderato di poterle corredare di un maggior numero di fatti, principalmente per ciò che concerne la distinzione della picrotossina e della picrotossinina. Ed è anzi per questo che, non ostante che i fatti che veniamo di esporre sieno stati da noi osservati molto tempo addietro e comunicati privatamente al prof. Cannizzaro, abbiamo tanto ritardato a pubblicarli. Era nostra intenzione di far cosa più completa; ma varie circostanze, che non è il luogo di esporre, avendoci reso impossibile di condurre ad effetto il desiderio nostro, abbiamo creduto di non frapporre più indugio a render noto il già fatto, nella speranza di potere fra non guari completare l'argomento.

Intorno alla teoria dell' Elettroforo.

Nota del Socio G. GOVI

letta nella seduta del 6 marzo 1881.

L'*Elettroforo* uscito dalle ricerche successive del Wilcke (¹) del Cigna (²) del Beccaria (³) del Volta (⁴), fra il 1762 e il 1775, esercitò la sagacità di moltissimi fisici, ognuno dei quali tentò di spiegarne le proprietà singolari. L'Ingenhousz, il Wilcke, l'Henley, il Kraft, l'Achard, l'Hemmer, il Lichtenberg, il Weber, il Buff, il Riess, il Bezold e molti altri idearono teoriche e sperienze per giungere alla piena spiegazione dell' Elettroforo, ma non sono ancora d' accordo fra loro i fisici su tale proposito.

Fin dal 1866 (⁵) io aveva fatto conoscere all'Accademia delle scienze di Torino certe mie idee sulla teoria dell'Elettroforo, corroborate con diverse esperienze; nel 1869 (⁶) tornai sullo stesso argomento, mostrando a' miei colleghi un *Elettroforo ad aria*, e promettendo di compierne in breve e di pubblicarne la teoria, come io l'aveva concepita e come gli esperimenti mi parevano confermarla. Ma, da allora in poi, distratto in molte altre occupazioni, non potei dar seguito alla promessa fatta, quantunque non l'avessi dimenticata, e quantunque di tempo in tempo ricominciassi ad occuparmene.

Ora che son trascorsi più di 15 anni da quel tempo, senza che io abbia avuto agio di compiere il lavoro incominciato, credo cosa non inutile il pubblicare le mie idee e le sperienze fatte in proposito, affinchè altri possa valersene, sia per confermarle, sia per combatterle. Si tratta d' uno studio già vecchio nel quale potranno riscontrarsi per avventura opinioni o sperienze emesse in questo frattempo da altri, ma avendole io espresse allora pubblicamente dinanzi ai miei colleghi dell'Accademia di Torino, avendole ripetute per più anni di seguito nella scuola, avendole variate nel mio laboratorio coll'assistenza del sig. Carlo Perosino (ora professore di Fisica a Mondovì) e di altri, credo di poterle considerare come mie, in questo senso almeno, da

(¹) Wilcke (Johann Karl), *Ytterligare rön och försök om contraria electriciteterna vid laddningen och dertill hörande delar* (Vetensk. Akad. Handl. 1762). — Pel Wilcke vedi anche: *Collection Académique*. T. XI. pag. 187.

(²) Cigna (Gio. Franc.), *De novis quibusdam experimentis electricis*. (Miscell. Soc. Taurinensis. T. III. 1762-65 pag. 31).

(³) Beccaria (G. Batt.), *Experimenta et observationes quibus electricitas vindex late constituitur atque explicatur*. Aug. Taurin. 1769 in 4.°

(⁴) Volta (Alessandro), *Lettere diverse sull'elettroforo perpetuo*. (Scelta di opuscoli interessanti, Milano 1775, 1776).

(⁵) Atti della R. Accad. delle scienze di Torino. Vol. II. pag. 30. (Seduta del 16 dicembre 1866).

(⁶) Id. Vol. IV. pag. 573. (Seduta dell' 11 aprile 1869).

non poter essere tacciato di *plagio* da chi le avesse manifestate dopo di me. Non recherò qui tutti i particolari delle mie vecchie ricerche, ne dirò solo il punto di partenza e le conseguenze, esponendo le principali esperienze fatte, e il significato che mi è parso di poter loro attribuire.

Fu lo studio delle figure del Lichtenberg che mi diede l'idea d'una teoria dell'Elettroforo alquanto diversa da quelle che si leggono nei trattati di fisica. In quelle figure si ha sempre, infatti, uno strato elettro-positivo, o negativo, là dove la superficie coibente venne direttamente elettrizzata, poi una zona neutra, e in seguito una larga zona in uno stato elettrico opposto a quello del primo strato. Ora, considerando la superficie coibente sulla quale si producono le figure del Lichtenberg, come la sezione di un cilindro della stessa materia, elettrizzato secondo il suo asse in un modo o in un altro, mi parve che il vetro d'una bottiglia di Leyden, o quello d'un quadro magico, e quindi la stiacciata d'un Elettroforo (considerati nella loro grossezza) potessero essere assimilati a un tale cilindro.

Poste codeste premesse, ecco il seguito del mio raziocinio e le prove che ne ho cercate e prodotte. Quando si eccita una delle due faccie di un disco dielettrico, (*Stiacciata* dell' Elettroforo), la faccia eccitata agisce come corpo elettrizzato sulla faccia opposta, attraverso alla grossezza del dielettrico stesso, il quale tien luogo, tra queste due faccie, dello strato d'aria interposto fra i due dischi metallici nel così detto condensatore di Æpinus. Trascurando nell'analisi di un tale fenomeno le differenze di *Capacità induttiva specifica* delle diverse materie dielettriche solide adoperate, si può dire in generale, che eccitato, per esempio, un disco di gomma-lacca su una faccia e messa questa faccia in istato negativo, la faccia opposta dovrà pure manifestarsi fortemente negativa, mentre la materia interna del disco, presso la seconda faccia e verso la prima, diverrà elettro-positiva. Le due cariche, quella della faccia sfregata e la positiva interna tenderanno a combinarsi attraverso alla materia coibente interposta, come le cariche delle due armature tendono a combinarsi attraverso al vetro di una boccia di Leyden. La carica negativa indotta della faccia non eccitata determinerà per induzione attraverso all' aria una carica positiva nei corpi circostanti e una negativa nella terra. In tale stato di cose, la presenza della elettricità omonima sulla seconda faccia impedisce l'accrescimento di carica sulla prima, come il tenere isolata la boccia di Leyden impedisce di caricarla. Ma se si mette la *stiacciata* sul *piatto* comunicante col suolo, la carica negativa indotta della seconda faccia si sperde (come suol dirsi per brevità di linguaggio) nella terra, e la carica negativa della prima faccia, non più respinta da quella indotta sulla seconda, s'impiega tutta a indurre e a trattenere nell'interno del coibente lo stato elettrico di nome contrario. L' eccitamento ripetuto accresce quindi sempre più, da allora in poi, le due cariche nella *stiacciata*, come si accrescono le cariche in una bottiglia la cui armatura esterna comunichi col suolo. Terminata la carica della *stiacciata*, si trova a zero il *piatto* perchè comunicante colla terra e sulla faccia eccitata del coibente si riscontra un leggero eccesso di carica (nel caso presente, *negativa*), come si ha una tensione positiva sul bottone della boccia di Leyden caricata nel modo ordinario, mentre la sua armatura esterna non manifesta tensione. Ecco perchè, se si depone lo scudo sulla stiacciata facendolo combaciare perfettamente con essa, e subito dopo lo si solleva per

esplorarne lo stato elettrico, lo si trova sensibilmente negativo ([1]). Però questa carica è piccolissima e fuor d'ogni rapporto con quelle contrarie che si svilupperanno poi, mettendo lo *scudo* in comunicazione col suolo. In tale stato di cose la *stiacciata* può paragonarsi ad un quadro magico carico e coperto di due strati di materia coibente. Soltanto le faccie cariche non sono qui rappresentate da due lamine di metallo, ma dalla sostanza stessa del dielettrico, messo nei due stati opposti per un certo tratto della sua grossezza, colla interposizione d'uno strato neutro resistente (che fa le veci del vetro del quadro Frankliniano) e colla sovrapposizione di due strati sottilissimi, neutri, o di minima carica e però quasi allo stato neutro ancor essi.

Ora, se sovra le due armature di un quadro magico caricato si pongono due lastre di vetro, e sopra queste, due dischi di metallo; quando si stabilisca una buona comunicazione fra i due dischi, accadrà come se si accostassero a breve distanza dal bottone e dall'armatura esterna d'una boccia di Leyden i due capi d'uno scaricatore, sui quali due capi si mostrerebbero due tensioni elettriche opposte. I due dischi, i quali agiscono qui come i due capi dello scaricatore, si elettrizzeranno quindi oppostamente alla faccia del quadro a cui ciascuno di essi è più prossimo, e se la tensione fosse grandissima, il quadro potrebbe allora scaricarsi attraverso alle due lastre isolatrici traforandole. Nel caso dell'Elettroforo, la perforazione non accade perchè le tensioni vi son deboli e la resistenza grande.

Adoperando il quadro Frankliniano nel modo indicato, su ciascun disco di metallo rimane una carica trattenutavi da quella del quadro, che non può combinarvisi per la interposizione del vetro. Staccando perciò con manichi isolanti i due dischi, questi si mostrano elettrici, ognuno oppostamente all'altro, e scaricati, e rimessi sul quadro, si possono ricaricare indefinitamente allo stesso modo, perchè la loro carica, dovuta alla induzione, non altera quella del quadro che può rimanere per lungo tempo invariata.

Così, e non altrimenti, si carica e si scarica lo *scudo* dell'Elettroforo; e se si tiene isolato il suo *piatto*, si ha la più perfetta somiglianza fra i due fenomeni, poichè

([1]) Se invece di applicare sulla stiacciata eccitata d'un Elettroforo il solito scudo a secco, si veste la faccia inferiore di quest'ultimo con un disco di carta da filtri bagnata, e le si fa toccar perfettamente la stiacciata, lo scudo si trova assai più facilmente e costantemente carico della elettricità destata sulla stiacciata stessa. Nè per questo cessa il fenomeno Elettroforico, perchè basta scaricare, o no, lo scudo, rimetterlo nello stesso posto, toccarlo e rialzarlo, per trovarlo fortemente carico di elettricità contraria a quella di prima. Se non si carica quasi mai lo scudo messo a secco sulla stiacciata, o se si carica in senso opposto a quello della stiacciata stessa, ciò avviene per esser pochissimi i punti di sufficiente contatto fra le due superficie affacciate, sia per la irregolarità della stiacciata, sia per l'aria che s'interpone fra essa e lo scudo. L'aria esterna e il pulviscolo, agendo come scaricatori, possono in tal caso far sorgere nello scudo una vera carica Elettroforica. La carta bagnata (non soltanto umida) stabilisce invece una comunicazione perfetta fra stiacciata e scudo e però favorisce il trapasso diretto del moto elettrico da quella a questo.

Per ottener lo stesso effetto in altro modo, e senza ricorrere alla umidità, basta prendere uno scudo di rame o di zinco o d'un altro metallo che possa essere amalgamato, e amalgamarne fortemente la faccia destinata a toccar la stiacciata. Codesta faccia si copre allora d'uno strato pastoso e in parte liquido d'amalgama e di mercurio, sicchè messa a contatto colla stiacciata elettrizzata, e premutavela sopra leggermente mantenendola isolata, si può quindi ritrarre lo scudo nello stesso stato elettrico della stiacciata, mentre, se invece di tenerlo isolato, si tocca prima di rialzarlo, si trova elettrico in modo opposto a quello della stiacciata, come nelle cariche ordinarie dell'Elettroforo.

dopo ogni comunicazione dello *scudo* col *piatto*, staccandoli tutti e due dalla stiacciata, si trovano carichi di elettricità opposte, lo *scudo* (nel caso supposto) di elettricità positiva, il *piatto* di negativa, come avrebbero fatto i dischi metallici posti sul quadro magico isolato nella sperienza precedente. Quando invece il *piatto* comunica permanentemente col suolo, si ha la sola elettricità positiva sullo *scudo*.

Posto dunque che l'Elettroforo agisca in questa guisa, si deve poterlo imitare sostituendo l' aria al dielettrico solido, e si ottiene infatti un perfetto Elettroforo coll' artificio seguente. Si faccian quattro dischi metallici, due muniti di manichi isolatori e destinati a figurare il *piatto* e lo *scudo*, gli altri due separati fra loro e dai primi mediante piccoli cilindretti di materia isolante di qualche millimetro d'altezza, in modo che fra i quattro dischi sovrapposti stiano tre strati d'aria d' eguale o di diversa grossezza, sempre però non troppo grande. Fissato su un piede il manico del *piatto* e sovrapposti ad esso i due dischi senza manico che rappresentano due strati della *stiacciata*, questi si carichino di elettricità opposte, come se fossero le due armature di un quadro; e, terminata la carica, si sovrapponga al disco superiore lo scudo. Operando allora su questo strumento come si opererebbe sull'Elettroforo ordinario se ne potranno trarre scintille o cariche elettriche per lunghissimo tempo, quantunque sempre per un tempo minore di quello durante il quale l'Elettroforo a dielettrico solido continuerebbe ad agire, perchè l'aria essendo mobilissima e tenendo in sospensione acqua in goccioline e pulviscoli, scarica assai più presto, l'un sull'altro, i due dischi di questo Elettroforo, di quello che non possano scaricarsi attraverso al dielettrico gli strati interni solidi dell'Elettroforo comune.

Il vetro di una boccia di Leyden o quello d'un quadro Frankliniano, dopo la scarica, costituisce colle armature un vero Elettroforo, come fu avvertito dal Wilcke sin dal 1762, e ripetuto poi da tanti altri fisici, perchè le due forti cariche date da principio all'uno, o all'altro di questi condensatori, alterano l'assetto molecolare del loro coibente in modo, da lasciarlo per una certa profondità in uno stato elettrico identico a quello dell'armatura corrispondente a ciascuna delle sue faccie. Il vetro in tal caso trovasi quindi, dopo la scarica, come se fosse stato sfregato o altrimenti eccitato, e somiglia interamente alla stiacciata dell' Elettroforo comune.

Che poi lo stato elettrico sia tale, nell'interno del coibente Elettroforico, quale si è supposto nell'analisi precedente, ho cercato di provarlo in più modi, componendo cioè il dielettrico d'un piccolo Elettroforo con strati sottili sovrapposti di gutta-percha che cercava di separare e di studiare dopo la carica, o facendo piuttosto grosso il dielettrico (dischi di ceralacca nera, di pece, di paraffina ecc.), caricandolo elettroforicamente, spezzandolo dopo la carica, e soffiando contro le sezioni la polvere mista di minio e zolfo adoprata dal Lichtenberg, ecc.; ma se, in quest'ultimo caso, ho potuto ottenere indizî abbastanza spiccati della distribuzione elettrica negli strati interni, somigliante in tutto alla distribuzione supposta, non ebbi nel primo modo se non risultati incerti e confusi, perchè il distacco delle falde coibenti le une dalle altre determina in esse movimenti elettrici nuovi e affatto diversi da quelli che vi si trovavano prima del distacco, i quali perciò rimangono distrutti, alterati, o invertiti.

Resti di Tapiro nella lignite di Sarzanello.
Nota del Socio G. CAPELLINI

letta nella seduta del 6 febbraio 1881.

(Con una tavola).

Verso la metà del secolo passato la lignite della bassa Val di Magra avendo attirato l'attenzione degli industriali, i sigg. Porte e Besley ne intrapresero la escavazione mediante un pozzo aperto a Caniparola nell'anno 1786.

Abbandonati i lavori nel 1826, la miniera di Caniparola fu riattivata nel 1826 per cura del sig. F. Du Commun il quale ne ebbe la proprietà fino al 1854. Nel 1857 un nuovo pozzo fu aperto per cura dei sigg. Grassi e Martin Franklin; la miniera prese il nome di san Martino, sebbene d'ordinario sia stata indicata col nome di miniera di Sarzanello, ed anche oggi vi si cava eccellente combustibile che in gran parte si utilizza nella fonderia di galena argentifera a Pertusola nel golfo di Spezia.

Parecchi geologi e segnatamente, La Beche, Guidoni, Savi, Pareto, Sismonda, visitarono l'antica miniera di Caniparola, e nel 1853 il prof. Massalongo figurò e descrisse col nome di *Quercus Bianconianus* una fillite ivi raccolta dall'illustre botanico sarzanese Antonio Bertoloni e da esso donata al museo della Università di Bologna [1].

Appena cominciati i lavori della nuova miniera mi recai più volte a Sarzanello e, per gentile cooperazione dei direttori e dei proprietarî potei procurarmi buon numero di filliti e raccolsi interessanti avanzi di molluschi dei quali resi conto per la prima volta nel 1860 [2]. Le filliti (circa 40 specie) in parte studiate e illustrate da Gaudin, Heer, E. Sismonda fin da principio fecero conoscere i rapporti cronologici del giacimento delle ligniti della bassa Val di Magra con i gessi di Stradella, le marne gessose del Senegalliese e quindi ancora con una parte della formazione di Oeningen.

Malgrado le più accurate ricerche e le più vive sollecitazioni fatte in diversi tempi ai cavatori della lignite, fino ad ora non mi era stato possibile di constatare la presenza di vertebrati fossili nella lignite di Sarzanello; soltanto molti anni or sono il sig. ing. Rickard mi assicurava che era stato trovato un frammento di osso lungo il quale però era andato perduto. Recentemente il sig. dott. Domenico Zaccagna, ing. geologo addetto al rilevamento delle Alpi Apuane, avendomi informato di aver veduto a Sarzanello presso il sig. Grassi alcuni denti trovati nella miniera di lignite, per mezzo del mio cugino Claudio Ferrarini chiesi ed ottenni in comunicazione per studio i resti fossili figurati nella annessa tavola.

Un esame anche superficiale basta per riconoscere che i denti raccolti a Sarzanello spettano al genere Tapiro; e pei confronti con resti simili trovati al Casino

(1) Nuovi Annali di scienze naturali. Serie 3ª, T. VIII. Bologna 1853.

(2) Capellini, *Cenni geologici sul giacimento delle lignite della bassa Val di Magra.* Memorie della r. Accademia delle scienze di Torino. Serie 2ª, T. XIX. Torino 1860.

e con le figure e descrizioni della maggior parte degli avanzi di tapiri fossili d'Europa, sarei indotto a ritenere che si potessero riferire ad una specie affine al *Tapirus ungaricus* Meyer; qualora si tenesse conto di piccole differenze e si ammettesse di doverlo realmente distinguere dal *Tapirus minor*, col quale a mio avviso ha la più stretta parentela.

Tutti coloro che si sono occupati dei tapiri fossili hanno riconosciuto la grande difficoltà di distinguerne le specie, sicchè il Blainville ebbe perfino a proporre di ammetterne una sola per tutti i resti fossili trovati in Europa.

Herman v. Meyer in un importantissimo lavoro sui tapiri fossili ha riassunto tutto quanto se ne sapeva fino al 1868 ed ha descritto e figurato numerosi avanzi delle diverse specie da esso prese in esame, provenienti per la maggior parte dalle ligniti della Svizzera, dell'Ungheria, della Croazia [1].

Tenendo conto d'ogni benchè piccola modificazione, ma avvertendo che per la forma il più delle volte era impossibile di distinguere i denti delle diverse specie, da esso d'altronde fondate dietro un complesso di differenze osteologiche, il valentissimo paleontologo da ultimo riassume in un quadro alcune misure di denti di tapiri viventi e fossili.

In mancanza di altri dati più sicuri, poichè i resti del Tapiro di Val di Magra spettano a un individuo adulto, sebbene non vecchio, ho pensato di giovarmi anche di tali misure confrontandole con le corrispondenti del 3° premolare superiore destro isolato fig. 1, del 4° premolare e dei tre molari superiori dello stesso lato che trovansi tuttavia uniti a un frammento del mascellare nell' esemplare di Sarzanello fig. 4; e mi sono persuaso che quantunque non corrispondano esattamente a quelle registrate dal v. Meyer per il *Tapirus hungaricus* adulto, pure ne rivelano con esso la più stretta parentela.

		Tapiro di Sarzanello	*Tapirus hungaricus*
3° premolare superiore	Lunghezza Larghezza	— 0,0175 — 0,021	— 0,0185 — 0,0225
4° p. mol. fig. 4 *a*	Lung. Larg.	— 0,018 — 0,023	— 0,0185 — 0,021
1° molare vero *b*	Lung. Larg.	— 0,017 — 0,022	— 0,019 — 0,023
2° m. v. *c*	Lung. Larg.	— 0,020 — 0,024	— 0,0205 — 0,024
3° m. v.	Lung. Larg.	— 0,020 — 0,023	*Tapirus minor* [2] — 0,0195 — 0,023

[1] H. v. Meyer, *Die fossilen Reste des genus Tapirus*. Palaeontographica, Band. XV. Cassel 1868.
[2] Esemplare di Montpellier figurato da Gervais.

Disgraziatamente non avendo a mia disposizione avanzi o modelli del *Tapirus minor* di Montpellier, non sono in grado di dire se l' esemplare di Val di Magra si possa riferire a questa specie meglio ancora che al *T. hungaricus*; peraltro devo notare che se esatta è la figura dell'ultimo molare superiore data dal Gervais nella tav. V, fig. 4 della Zoologia e Paleontologia francese ([1]) tanto nell'insieme che nei particolari esso corrisponderebbe assai bene a quanto si riscontra nell'ultimo molare superiore destro del Tapiro di Sarzanello.

Confrontando i denti del Tapiro della bassa Val di Magra con alcuni dei denti di Tapiro del giacimento delle ligniti del Casino, presso Siena si notano pure talune piccole differenze le quali non sarà affatto inutile di accennare, sebbene io ritenga per certo che i due giacimenti siano cronologicamente identici.

Le differenze che avrei a notare sono le seguenti: i denti del Tapiro di Sarzanello presentano i loro denticoli o tubercoli, specialmente il tallone o tubercolo accessorio esterno, più distinti e ricordano in modo più spiccato i denti del *Tapirus priscus.*

I denticoli mediani, ossia le creste delle due colline che uniscono i tubercoli o denticoli esterni agli interni sono relativamente più ravvicinati di circa mezzo millimetro; anche il cercine che si eleva dalla base della corona dei diversi molari e premolari è più nettamente definito.

Malgrado ciò mi affretto a dichiarare che tali differenze potrebbero provenire semplicemente da razza ed anche dal sesso e dalla età, e non vorrei per questo distinguere ciò che ritengo convenga benissimo di tenere unito.

A proposito dei resti di Tapiro trovati nella lignite del Casino non sarà fuor di luogo di ricordare che essi furono notati fra i primi avanzi di vertebrati che vi si raccolsero e nel 1872 un incisivo ed alcuni molari superiori furono comunicati dal prof. Meneghini al signor dott. J. Major che non azzardò di pronunciarsi sulla specie alla quale si dovevano riferire.

La scoperta di altri resti di mammiferi permise in seguito di apprezzare i rapporti della lignite del Casino con l'orizzonte di Eppelsheim, coi celebri giacimenti di vertebrati fossili del monte Léberon e di Pikermi ed anche con quella parte della fauna di Montpellier che verosimilmente spetta ad un livello inferiore ed un poco più antico di quello nel quale si incontrano il *Rhinoceros megarhinus* e il *Mastodon arvernensis;* anche in base a tali considerazioni i denti di Tapiro del Casino furono riferiti al *Tapirus minor* di Montpellier ([2]).

Volendo cercare qualche rapporto fra il giacimento delle ligniti di Sarzanello e i terreni terziari lignitiferi di Francia parmi che non si possa più dubitare della loro corrispondenza con l'orizzonte delle *ligniti* e *marne grigie* dei dipartimenti dell'Ain, del Rodano, dell'Isère e Drome che al pari dei giacimenti di vertebrati fossili di Cucuron e del Léberon sono riferite al miocene superiore; inferiormente alle marne di Hauterive caratterizzate dall' *H. Chaixi* che pure si riscontra fra i molluschi degli strati marnosi superiori delle ligniti della bassa Val di Magra e

([1]) Gervais, *P. Zoologie et Paléontologie française*. Deuxième édition. Paris 1859.

([2]) Forsith Major, *Considerazioni sulla fauna dei mammiferi pliocenici e post-pliocenici della Toscana*, pag. 56. Pisa 1877.

che ho raccolta a Paltratico con scarse tracce di ligniti alla base della formazione gessosa.

Trattasi quindi di un orizzonte pel quale forse al pari degli strati superiori a Congerie si continuerà da alcuni a discutere se convenga ritenere nel pliocene inferiore, ovvero se, come ho fatto finora, si possa considerare come termine superiore del miocene; quando non si voglia adottare la vaga espressione di strati mio-pliocenici della quale anche di recente il Mourlon si è giovato, con molta latitudine, per risolvere la difficoltà di separare nettamente il pliocene vero da ciò che nei dintorni di Anversa si trova al posto degli strati a Congerie e del Sarmatiano e forse in parte ancora del calcare di Leitha.

La corrispondenza cronologica delle ligniti del Casino presso Siena, con quelle di Sarzanello già era stata apprezzata mediante i confronti delle rispettive flore e dei molluschi ed entrambi i giacimenti anche di recente furono da me riferiti alla base degli strati a Congerie (¹).

I resti di tapiro che hanno fornito l'argomento per questa breve Nota confermano la previsione che, malgrado la presenza di qualche fillite (*Quercus Carpentieri*) che finora si conosceva soltanto nel miocene inferiore, malgrado parecchie specie frequenti nel miocene medio, effettivamente il giacimento della lignite di Sarzanello non si può in guisa alcuna confrontare con quello di Cadibona ed è alquanto più recente del giacimento della lignite di Monte Bamboli caratterizzato dal *Sus chaeroides* che vi si trovò in gran numero insieme ad altri importanti avanzi di vertebrati.

Prima di terminare questa breve Nota devo aggiungere che i resti di Tapiro di Sarzanello furono scavati a met. 160 di profondità nel maggio 1878. Trovati da due operai, Bagnone e Tognoni, intenti a scevrare dalla terra le minutaglie di carbone, furono acquistati dal sig. Fabrizio Grassi che li custodì sempre gelosamente.

Il sig. Grassi narra che nello stesso anno 1878 fu trovata una mandibola di scimmia, la quale sarebbe andata perduta, e dice che vi si rinvenne altresì un osso di grandi dimensioni il quale fu ridotto in frantumi perchè giudicato un *condotto di terra*! Giova sperare che il sig. Grassi e gli altri che attendono alla miniera di Sarzanello riesciranno a scoprire altri avanzi di vertebrati e che per lo meno anche in seguito gli studiosi potranno continuare ad approfittarne, nell'interesse della scienza e in parte ancora dell'industria.

(¹) Capellini, *La formazione gessosa-solfifera*. p. 425, serie 3ª, vol. V. Atti r. Accad. Lincei. Roma 1880. Delle filliti del Casino si ha una breve Nota pubblicata dal dott. Sordelli negli Atti della Riunione dei Naturalisti italiani a Siena nel 1872. Nell'agosto 1873 ne riconobbi ben 36 specie nel Museo della r. Accad. dei Fisiocritici, le quali poi furono ristudiate e descritte egregiamente dal dott. Peruzzi. V. Nuovo giornale botanico italiano vol. VIII, n. 2, aprile 1876.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

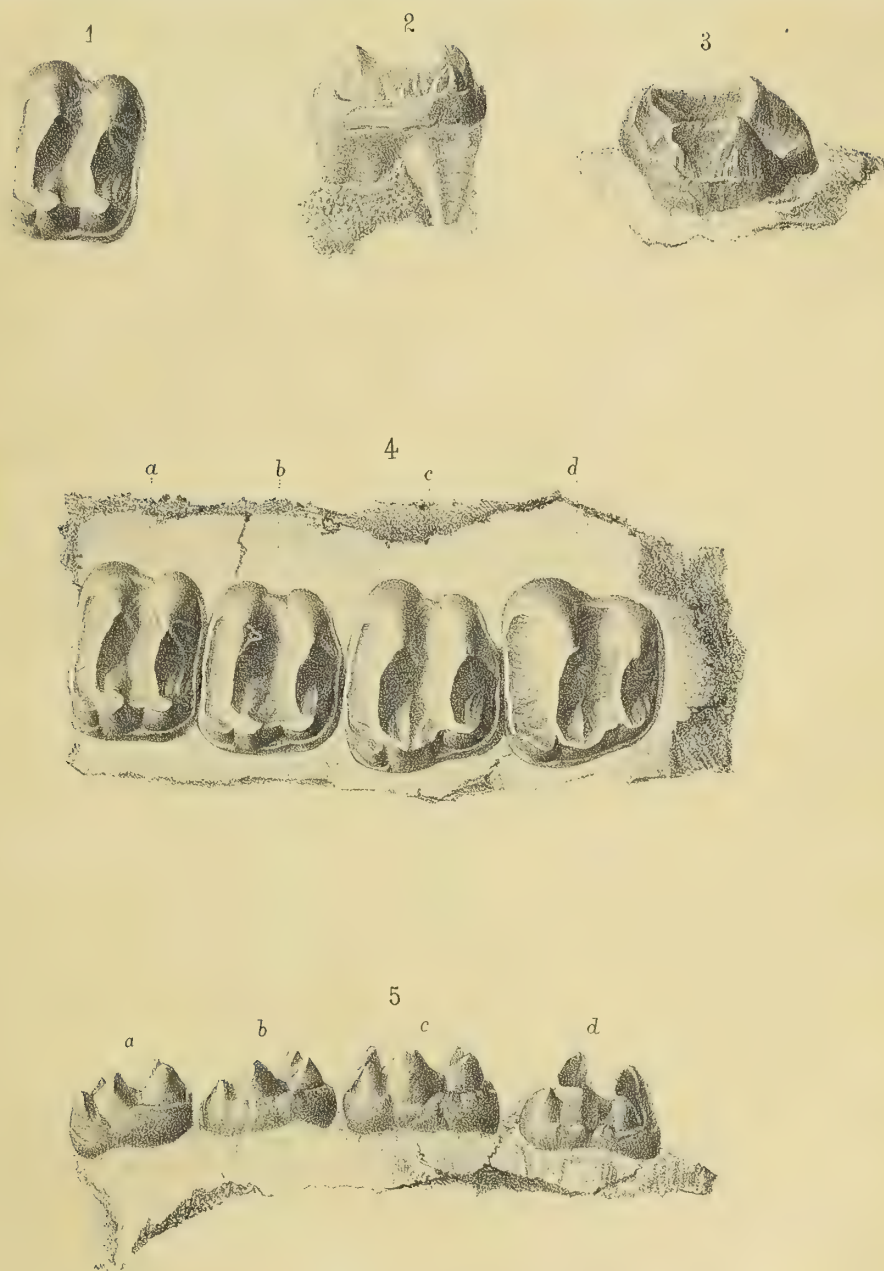
Fig. 1. Terzo premolare superiore destro.

» 2. Quarto premolare superiore destro visto per il lato anteriore; lo stesso fig. *4a* visto per la corona.

» 3. Ultimo molare superiore destro visto per il lato posteriore; lo stesso fig. *4d*.

» 4. Il quarto premolare e i tre molari superiori di destra visti per la corona: *a*) 4° premolare; *b*) 1° vero molare; *c*) 2° vero molare; *d*) 3° vero molare.

» 5. Il frammento di mascella fig. 4 visto dal lato esterno per far meglio apprezzare la forma e disposizione dei tubercoli dei diversi veri molari e del 4° premolare (le lettere come nella fig. 4).

E. Contoli dis. Bologna. Lit. G. Wenk.

Contribuzione allo studio della fibra nervosa midollata ed osservazioni sui corpuscoli amilacei dell'encefalo e midollo spinale.

Memoria di ANTONIO CECI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 6 marzo 1881.

(Con una tavola)

I.

La struttura delle fibre nervose è stata in special modo negli ultimi anni frequentemente e diligentemente investigata dagl'istologi. La natura delle indagini in una scienza ancora in formazione, come l'anatomia minuta, rende in gran parte inutile riportare la storia intera di certi argomenti, sui quali si è accumulata pressapoco una biblioteca.

Naturalmente i lavori successivi hanno rettificati e completati i precedenti. E poi le principali pubblicazioni possiedono tutte riassunti bibliografici più o meno estesi. Io accennerò soltanto in breve quanto è strettamente necessario al mio argomento.

Il sistema nervoso si compone di sostanza nervosa ganglionare e nervi propriamente detti. La prima contiene principalmente cellule nervose; gli ultimi sono composti di fasci di fibre. Di queste fibre alcune sono opache, lucenti e in genere più grosse: altre invece pallide e più sottili. Come è noto, l'essenziale differenza tra le due specie consiste in una sostanza di natura prevalentemente grassa, cosidetta mielina, la quale forma nelle prime la guaina midollare. Le fibre midollate hanno una struttura più complessa delle pallide. Fin da molti anni fu descritta in esse una sottile guaina esterna, di natura elastica, formante un tubo chiuso e provvisto di nuclei ovali, la guaina di Schwan; il tubo da essa formato contiene un cilindro centrale o cilindro dell'asse, attorniato dalla guaina midollare. Sulla esistenza di queste parti rimase un accordo perfetto in tutti gli osservatori. Nel 1872 il Ranvier dimostrò come le fibre nervose midollate presentino a distanze regolari dei restringimenti o strozzamenti; quivi accollasi la guaina esterna elastica al cilindro dell'asse, perchè a tal livello la guaina midollare cessa. Per questi restringimenti la fibra è divisa in tanti segmenti regolari, che egli denominò segmenti interanulari, e per ogni segmento la guaina di Schwan possiede un nucleo. Gli strozzamenti od anelli, che ritengono il nome di Ranvier, costituiscono un fatto costante di tanta evidenza e facilità di osservazione da meravigliare come fosse sfuggito a tutti gli istologi anteriori. Ciò rende più pregevole la bella scoperta dell' anatomico francese. Sull'esistenza degli anelli nelle fibre nervose rimase anche un accordo completo

in tutti gli osservatori. In seguito lo studio si rivolse più particolarmente alla guaina midollare, sulla quale si succedettero una quantità di lavori.

Nel 1874 Lantermann e Schmidt descrissero nella guaina midollare incisure e segmenti. Le incisure tagliavano, obliquamente all'asse della fibra, la guaina midollare, la quale era perciò composta da distinti segmenti entranti l'uno nell'altro.

Nel 1876 Ewald e Kühne studiarono i tessuti mercè la digestione con pepsina e trypsina, dopo la quale nei nervi restano soltanto la membrana e i tessuti corneificati e la nucleina, che si scioglie negli alcali leggieri; quindi trattando con quest'ultimi i tessuti digeriti, restavano solo le parti corneificate.

Per mezzo di tale processo i due osservatori constatarono una grande quantità di sostanza cornea dove meno l'avrebbero sospettata, cioè nelle fibre nervose midollate, nella sostanza grigia del cervello e del midollo spinale, e nella retina. Così le fibre nervose presentano una guaina di fibrille in vario modo decorrenti parallelamente alla fibra. Se quest'ultima, privata della guaina dello Schwan, non lasciava uscire dapertutto i componenti del midollo, ciò avveniva per la presenza dell'*Hornscheiden*, che è uno scheletro nodoso, molto rifrangente, dapertutto a doppi contorni, ed ha le sue radici da un lato nella membrana del tubo e dall' altro in un cordone nodoso posto nel cilindro dell'asse. Il cordone assile si considerava come l'asse cilindro coagulato, ma la digestione in trypsina e pepsina mentre scioglie l'asse cilindro, non altera il quadro esposto. Così le guaine, il contorno assile e il reticolo si assottigliano soltanto un poco e sono l'unica cosa che rimane della fibra nervosa.

Lo stesso si ottiene lavando i nervi in acqua e sciogliendo la mielina con alcool ed etere; similmente per l'azione del glicocolato di soda e la digestione. Adunque esistono una guaina cornea esterna e una interna periassiale rilegate tra loro da ponti pure di sostanza cornea. La periassiale corrisponde alla guaina del cilindro descritta da Remak e da Kuhnt. L' acido solforico, la potassa concentrata, l' acido acetico e l'acido cloridrico a freddo gonfiano queste parti cornee, e a caldo le sciolgono. La presenza di queste guaine spiega le forme imbutiformi e fusiformi nelle guaine midollari di recente descritte, e si collegano coll'origine embrionale del sistema nervoso centrale data dal foglietto corneo. Chimicamente la neurocheratina ha di comune colla cheratina epidermoidale l'indigeribilità, l'insolubilità nell'acido solforico freddo e potassa, il forte contenuto di zolfo, così pure la mescolanza di sostanze contenenti zolfo facilmente decomponibili, ed ancora le reazioni generali delle sostanze albuminoidee. Ma però la neurocheratina è più difficilmente solubile in liscivia di potassa concentrata bollente di quello che la sostanza delle corna del bue trattate nella stessa guisa e persino a 150° centigr. cede poco all' acido acetico glaciale. Oltracciò la soluzione in potassa caustica dà maggior precipitato di neutralizzazione che quello della sostanza cornea comune. Ecco in breve i fatti descritti dall' Ewald e Kühne.

Nel 1878 il Tizzoni descrisse e dette le figure di un reticolo corneo costruito da una rete di sottili bastoncini, che si uniscono in diversi punti, formando delle maglie irregolarissime, poligone, ad angoli molto aperti, ma non mai decisamente rotonde. Nei punti d'incontro di queste maglie si hanno talora leggeri rigonfiamenti o punti nodali *(Knorriges Gerüst)*; generalmente però poco accentuati. Sparsi in

queste maglie e in relazione con qualche bastoncino di quelle, si trovano dei piccoli punti rotondi della stessa apparenza del reticolo, i quali rappresentano la sezione ottica dei bastoncini che li formano; questi punti splendenti si trovano di preferenza al dintorno del cilindro dell'asse ed alla periferia del reticolo corneo.

Il reticolo corneo non presenta in alcuna parte delle modificazioni che si possono supporre in rapporto colle incisure delle guaine midollari; per cui si deve ritenere, che tali spezzature non hanno nessuna relazione e non trovano ragione di essere nel reticolo corneo sopradescritto. In corrispondenza degli anelli del Ranvier il reticolo corneo, come la guaina midollare, è assolutamente interrotto; mai le trabecole d'un segmento vanno ad attaccarsi immediatamente a quella del segmento vicino. Il reticolo corneo sembra prendere rapporti di semplice contiguità colla guaina di Schwan, e si osserva come il contorno di quella guaina è separato dal contorno del reticolo, il quale in questa sua periferia termina con maglie arrotondate e con punti che rappresentano la sezione ottica dei bastoncini.

Il Tizzoni è inclinato ad ammettere un rapporto molto intimo tra il reticolo corneo ed il cilindro dell'asse e ad accettare un attacco diretto del reticolo all'asse, e con questo egli nega l' esistenza di una guaina periassiale di natura cornea per cui il reticolo servirebbe d' appoggio alle guaine midollari, e ne impedirebbe lo spostamento dal cilindro assile. A tutto questo il Tizzoni venne per la tecnica seguente: I fasci nervosi erano posti in alcool assai diluito per alcuni giorni; veniva successivamente concentrato l'alcool fino ad arrivare all'assoluto. Talvolta si faceva precedere l'immersione per alcuni giorni in soluzione di bicromato di potassa o di ammoniaca: in ultimo i fasci si sottoponevano ad un' ebollizione per un'ora o due in una provetta col cloroformio. In seguito i nervi venivano conservati nell'alcool e coloriti col picrocarminato d'ammoniaca o coll' ematossilina. Il Tizzoni trovò inoltre che il reticolo non si colorava con l'acido osmico, nè si scioglieva nell'alcool, etere e cloroformio: con acido acetico, potassa e soda 36 °/₀ non si scioglieva ma leggermente si rigonfiava. Il protoplasma delle cellule migrate, contenenti gocce di mielina nei nervi in degenerazione, non compariva più granuloso come quello delle cellule comuni, ma trabecolare e foggiato a guisa di reticolo.

Nella rigenerazione del reticolo corneo dapprima si formavano tanti piccoli punti splendenti, che specialmente avevano origine attorno i nuclei e che aumentando in grossezza davano luogo a tante piccole crocette ed altre figure irregolari, che in primo tempo erano separate tra loro ed in seguito, per successivo accrescimento, finivano per unirsi e formare in mezzo alla fibra embrionale un pezzo di reticolo corneo molto semplice. Avvicinandosi così i diversi pezzi del reticolo in tal modo rigenerato, si fondevano insieme in un sol pezzo. L'intero reticolo il quale ne risultava era molto più semplice che il normale. Quando si trovavano più fibre nella stessa guaina si rinvenivano pure entro la medesima più reticoli cornei.

I lavori di Ewald e Kühne e quello del Tizzoni potevano considerarsi in due punti di vista, l'uno chimico, l'altro morfologico. Tutti due non erano al sicuro di una critica molto giusta, cioè che il processo complicatissimo impiegato non rivelasse piuttosto un fatto artificiale che uno naturale.

Nello stesso anno il Rumpf non parlò di reticolo in un lavoro fatto nel

laboratorio di Kühne, sibbene descrisse le guaine cornee di Ewald e Kühne fra cui si avrebbe là mielina. Le guaine sono continue e non interrotte, ma soltanto ristrette negli anelli del Ranvier: fra le due guaine si troverebbero di tratto in tratto le trabecole che darebbero le apparenze descritte dal Lantermann. Fece inoltre osservare che la formazione reticolare, dopo il trattamento con alcool ed etere, oltre la sostanza cornea, contiene una grande quantità di albumina digeribile, e diede alla formazione reticolare il nome di guaina contenente sostanza cornea, *Hornführende Scheide.*

Il Gerlach stimò che il reticolo fosse in dipendenza dell' azione dell' alcool, giacchè disse che variava in finezza secondo il modo di agire e grado di concentrazione dell'alcool medesimo e non esisteva in fibre precedentemente lavate in acqua.

L'Hesse nel 1879, riconoscendo l'esistenza delle guaine descritte dal Kühne, Ewald e Rumpf, opinava che la disposizione nel nervo indurito non fosse nè uguale nè simile a quella che è nelle fibre fresche, e la sostanza cornea fosse in quest' ultime intimamente mescolata colla mielina, e soltanto, allontanato il grasso, restasse indietro come una specie di reticolo.

Previo trattamento dei nervi coll'acqua, l'azione dell'alcool è rapida ed energica sulla mielina contenuta nelle fibre e negli ammassi usciti. In questi si ha la formazione di un reticolo, le cui trabecole lucenti, ad uniforme disposizione e in connessione scambievole darebbero argomento per una distribuzione uniforme negli ammassi midollari della sostanza cornea: in tali ammassi non esiste una disposizione tale da permettere la conchiusione, che la sostanza cornea stessa sia stata anteriormente disposta a forma di tubi. Nell'interno dei tubi nervosi le trabecole sono meno abbondanti e mancano nei punti dove la mielina è uscita; mai si trova la demarcazione d'uno strato esterno ed uno interno. Con tale spiegazione egli accorda i fenomeni di uscita della mielina, giacchè, ammettendo l'esistenza d' un reticolo preformato, il movimento del mantello mielinico non potrebbe intendersi senza la partecipazione dell'intero reticolo alla corrente. Allora non si capirebbe perchè uscito dovrebbe perdere la sua forma cilindrica, e che una parte dovrebbe rimanere nella guaina di Schwan.

L'Engelmann, sui primi di quest'anno, in una nota ad un lavoro sulla scontinuità del cilindro assile, nega l'esistenza delle guaine cornee nel modo descritto da Kühne ed Ewald. Dice che non poteva sorger dubbio alcuno che tali formazioni fossero un prodotto artificiale a chi aveva soltanto una volta esaminato la sostanza grigia e bianca dei grandi centri nervosi allo stato fresco in liquidi indifferenti, e visto come la mielina dappertutto abbandonava sotto forma di anelli, vescichette, gocciole e sfere, il cilindro dell'asse, che restava nudo e liscio. Dove rimane lo scheletro corneo? Frattanto Gerlach ed Hesse aver mostrato in maniera più convincente per gente, che meno se ne occupa, come si tratta di prodotti artificiali. È possibile che nemmeno la neurocheratina preesista come sostanza. Una bella prova contro l'esistenza delle guaine cornee la reca ultimamente il fatto descritto da Lavdowscky ed osservato spesse volte dall'autore in preparati coll'acido borico, cioè che la mielina esce dall' estremità tagliate d'una fibra talvolta in forma di un lungo cordone, che lascia scorgere ancora intatte le incisure di Lantermann.

Premetto ora una parte delle mie osservazioni alla esposizione degli altri lavori recentissimi sull'oggetto.

Adunque le guaine ed il reticolo di sostanza cornea descritti dagli autori potevano vedersi con una tecnica spesso lunga e complicata ed in ogni caso molto alterante.

I principali metodi erano:

1. La digestione nella pepsina e nella trypsina.

2. Il trattamento dei nervi con acqua distillata e successivamente alcool ed etere.

3. Il trattamento col glicocolato di soda e digestione.

4. Il trattamento con alcool diluito, concentrato, assoluto e l' ebollizione di un'ora o due nel cloroformio.

Nel 1879 esponendo nel mio corso d' istologia umana la struttura delle fibre nervose, ebbi occasione di studiare con l'ultimo metodo, cioè, del Tizzoni, il reticolo corneo. Le mie osservazioni versarono su nervi di rana, tritone e coniglio. Rimarcai che il reticolo variava discretamente nelle diverse fibre e nei diversi saggi esaminati: ma non arrivai a stabilire nessuna relazione tra la rete e le forme descritte dal Lantermann e dallo Schmidt nella guaina midollare. Intanto la complicata ed alterante tecnica, il disaccordo tra l'esistenza del reticolo e le incisure e segmenti midollari, ammessi dalla maggioranza degli osservatori e dallo stesso Tizzoni, mi lasciarono in dubbio se la rete fosse o no un fatto preesistente. La mia attenzione fu rivolta di nuovo per caso a questo fatto nell'inverno di quest'anno, mentre lavoravo in patologia sperimentale nell'Istituto patologico dell'illustre prof. Klebs a Praga. Studiando le fibre di un nervo ulnare, che era appartenuto ad un malato di lepra anestetica, ed era stato conservato da lungo in alcool, vidi in esse la presenza costante di una evidentissima rete. Essa non solo era manifesta nelle fibre isolate per dissociazione, ma appariva chiarissima anche nei tagli longitudinali dei fasci nervosi. La nessuna tecnica adoperata, e la provenienza del nervo dapprima mi fecero pensare ad una alterazione patologica della fibra nervosa, molto più che in nessuno dei preparati, eseguiti l'anno innanzi con la scrupolosa osservanza del metodo del Tizzoni, ero riuscito ad ottenere un reticolo così spiccato.

Imbevendo le fibre con una soluzione di picrocarminato si vedevano i cilindri assili tinti di un bel rosso e, più intensamente ancora colorati, i nuclei della guaina di Schwan. Dissociando i fasci di fibre imbevuti di carminio, ottenni preparati di sorprendente bellezza. Talvolta trattai le fibre con acido osmico, tal'altra la colorazione fu fatta coll'ematossilina, infine per lo più le fibre furono osservate nello stato naturale. Le fibre erano poi chiuse in glicerina fenicata, diluita per metà con acqua distillata (fig. 4). Il cilindro dell' asse colorato di un roseo vivace scorreva continuo in tutta l'estensione della fibra che si esaminava. Il reticolo cominciando attorno ad esso finiva nella guaina di Schwan, ed era costituito da bastoncelli o fibrille rifrangentissimi disposti in varî sensi e formanti maglie. Spesso queste fibrille finivano libere a livello della guaina di Schwan ispessendosi in un nodo: oppure accollavansi al cilindro dell'asse. Talvolta si scorgevano nodi isolati accollati alla guaina esterna o al cilindro; spesso si poteva osservare un contorno di sostanza

rifrangente, come le fibrille cornee, per un tratto del cilindro assile o della guaina del tubo nervoso. In generale si rimarcavano rapporti stretti fra la rete e l'asse cilindro, mentre il reticolo era quasi sempre indipendente dalla guaina di Schwan.

Le maglie formate da queste fibrille rifrangenti erano poligonali irregolari: nei preparati trattati anche con l'acido osmico, in qualche luogo si vedevano masse brune o nere, residui di mielina. I rapporti tra la rete e la guaina di Schwan apparivano, talvolta, a livello dei cul di sacco incompleti dei segmenti anulari di questa ultima, i quali saldandosi formano gli anelli del Ranvier. Quivi talora si vedeva uno spazio considerevole tra il cul di sacco e la rete cornea, che si era ritirata in massa.

Nelle sezioni trasverse delle fibre le apparenze erano diverse. Si constatava che la sezione del cilindro assile era contornata da un bordo trasparente, rifrangente; spesso v'era accollato qualche punto circolare rifrangente; la sezione della guaina di Schwan mostrava pure una forte rifrazione e spesso avea contigui punti circolari rifrangenti: altre volte questi si trovavano nello spazio tra la guaina e l'asse cilindro; infine si vedevano tratti di fibrille rifrangenti trasversali che andavano dalla prima alla seconda. Esaminando i preparati con forti ingrandimenti e con molta attenzione mentre si constatava che le estremità conformate a nodi delle fibrille erano costituite da veri corpi cilindrici ed isolati, al contrario, spesso era dubbio se il decorso di esse fibrille rappresentasse un ispessimento o una ripiegatura di una membrana, invece che un corpo cilindrico di fibrilla isolata; in alcuni luoghi le piegature erano evidenti. La rete a date distanze non di rado si presentava meno fitta. La grandezza delle maglie di essa e la conformazione variava, in una certa misura, tra le fibre nervose. Salvo dunque pochi rimarchi la mia descrizione è pressapoco identica a quella data dal Tizzoni.

Lo studio di molte altre fibre di nervi conservati con alcool mi fece persuaso che non trattavasi di un'alterazione speciale indotta dalla lepra nelle fibre nervose, per cui il reticolo corneo si fosse fatto più spiccato e reso visibile senza i metodi complicati di preparazione descritti dagli autori: in tutte le altre fibre esaminate io osservai anche una forma reticolare delle più evidenti. Io posi nervi tolti da animali viventi o da cadaveri freschi in alcool e dopo venti o trenta giorni il reticolo corneo si faceva manifesto. Se i pezzi erano sottili, o se venivano sfibrati, allora esso poteva osservarsi dopo un tempo più corto. Questo fatto era tanto più sorprendente, in quanto che per rinvenire il reticolo, gli osservatori precedenti avevano adoperato processi più o meno lunghi e fortemente alteranti. Se soltanto qualche osservatore avesse pensato di esaminare le fibre dei nervi conservati in alcool si sarebbe evitato un cammino inutile. Ma accade spesso che l'ultima a scegliersi è la via più corta.

Intanto io proseguii l'osservazione in fibre di nervi restati per lungo tempo nei soliti altri liquidi di conservazione, come nella soluzione di acido cromico, in quella di bicromato di potassa e nel liquido di Müller. Dovunque mi fu facile di constatare e dimostrare agli altri la evidente presenza del reticolo anzidetto. Questo poteva anche scorgersi in fibre nervose dopo l'azione del nitrato d'argento e di acido osmico allungato.

La molteplicità dei metodi di preparazione e la semplicità di molti di essi verosimilmente persuadevano che il reticolo esisteva in tutte le fibre nervose midollari,

che era indipendente dalla tecnica adoperata e che doveva avere un nesso più o meno stretto con la costituzione reale della fibra nervosa. Le obbiezioni di Rumpf e di Hesse, le parole di Engelmann non potevano infirmare una cosa di fatto. Se il reticolo corneo doveva sospettarsi un prodotto artificiale, tutte le altre manifestazioni, che vediamo nei preparati ottenuti o per dissociazione e per tagli degli organi e tessuti induriti, tutte queste manifestazioni, non erano esenti dal medesimo sospetto. Vero è che le incisure di Schmidt e di Lantermann non potevano in nessun modo accordarsi coll'esistenza del reticolo: quest'era a parer mio la più grave obbiezione. Rimaneva intanto dimostrato come il reticolo corneo, ben lungi dal necessitare i metodi istologici complicatissimi ed alteranti adoprati dagli osservatori, che prima lo scoprirono e descrissero, si poteva vedere ordinariamente in qualunque nervo conservato da qualche tempo, indipendentemente, fino a un certo punto, dal liquido di conservazione. Intanto in quest'epoca io ebbi opportunità di leggere due nuovi lavori italiani sulle fibre nervose midollate.

Il Rezzonico, nell'intento di spiegarsi ciò che nelle fibre nervose spinali teneva il posto di guaine di Schwan, fece una serie di ricerche, di cui i risultati erano: che attorno al cilindro assile esiste una serie regolare d'imbuti conici contenuti l'uno nell'altro, ma abbastanza facilmente isolabili; l'apertura loro minore circondava il cilindro dell'asse, la maggiore si applicava alla superficie esterna del segmento successivo. Gli imbuti poi, formati da una sola fibrilla di estrema finezza, ravvolta a spira, dovevano essere per le fibre midollate centrali, ciò che per le periferiche erano le guaine ed il reticolo corneo. Il Golgi in una nota al lavoro del Rezzonico preveniva di aver trovato una disposizione analoga anche nelle fibre nervose midollate periferiche.

Il Rezzonico dava una grandissima importanza alla bontà della tecnica adoprata per arrivare a vedere le forme da lui descritte. I pezzetti di midollo dopo un lungo soggiorno nel bicromato di potassa, erano stati posti in una soluzione 0,75 di nitrato di argento. Si poteva far precedere anche un trattamento con l'acido osmico. I preparati chiusi nella resina Dammar ed esposti alla luce, dopo quindici o venti giorni, mostravano gl'imbuti descritti.

Finalmente il Golgi, in un ultimo lavoro sulla struttura delle fibre midollate, descrisse, nelle fibre fresche poste in liquidi indifferenti, in corrispondenza delle incisure di Lantermann, una regolare uniforme striatura trasversale estesa dall'uno all'altro margine della sezione ottica delle fibre, rimanendo verso l'esterno limitata dalla sola guaina dello Schwan. La striatura è prodotta da finissime fibrille. Trattando le fibre nervose con una miscela osmico-bicromica ed in seguito col nitrato d'argento, si vede come le fibrille trasversali rappresentino il contorno dell'estremità larga di un imbuto formato da una fibrilla spirale: gl'imbuti, corrispondenti alle incisure ed ai segmenti, toccano colla parte svasata le guaine di Schwan e comprendono nell'apice il cilindro dell'asse. Gli stessi preparati otteneva con un processo analogo a quello adoperato dal Rezzonico per le fibre del midollo spinale. Quindi le forme ad imbuto descritte dal Rezzonico s' incontrano anche nelle fibre midollate periferiche, bensì non sono così numerose e disposte in serie continua come nelle spinali, ma situate a qualche distanza le une dalle altre, ed hanno struttura meno stipata, onde è più chiara la disposizione a spira dei fili che le costituiscono.

Nelle fibre spinali lo scheletro degl'imbuti è all' esterno rinforzato da tenuissime fibrille, che rappresentano in certo modo la guaina di Schwan. Rapporto alla significazione del reticolo corneo descritto dal Tizzoni, il Golgi dice che il risultato delle sue ricerche lo costringono a negarlo; lo ritiene da una parte come un'incompleta manifestazione degli anelli delle spire, e specialmente dei più profondi e più vicini al cilinder axis; dall'altra dovuto agli spostamenti ed alle rotture e raggrinzamenti degli anelli medesimi. Aggiunge che l'apparenza di regolari fascetti fibrillari trasversali, da lui posti in rilievo nelle fibre nervose, tanto fresche come trattate con acido osmico, parergli avere valore quale altro dato di prova dell'opinione già manifestata. La disposizione delle incisure di Lantermann è prodotta e mantenuta dalla presenza dei fili, che formano gl'imbuti nascosti nella guaina midollare. A tali filamenti, ordinati in spira ed imbuti, doversi l' impedito spostamento della mielina nel solo senso longitudinale per le fibre nervose periferiche, e tanto nel longitudinale che nel trasversale per le fibre centrali.

Prima di esporre il seguito delle mie osservazioni, mi piace ricordare che il Remak, l'Hannover, il Mauthner, il Todaro, il Tamanschef e il Kuhnt ammisero una guaina propria del cilindro dell'asse. Il Klebs descrisse uno spazio periassiale. Il Ranvier sostenne che l' apparenza della guaina assiale era prodotta dal protoplasma, che, tappezzando con una lamina sottile tutta la guaina di Schwan, si riflette sul cilindro assile. In ultimo alcuni, come l' Axel Key e il Retzius e l'Hennig, stimarono le incisure e i segmenti midollari quale un prodotto artificiale. Pel Ranvier erano date da lamine di protoplasma, che dalla guaina di Schwan andavano, tagliando obliquamente la tunica midollare, al foglietto protoplasmatico periassiale da lui ammesso.

Dopo la lettura del lavoro del Rezzonico, osservando io alcune preparazioni del mio valente amico il dott. Schuster di Praga, il quale si occupava della degenerazione e rigenerazione dei nervi recisi, gli feci notare in alcune fibre del tibiale di una gamba umana amputata, trattate da lui successivamente con una soluzione di cloruro d'oro e di acido formico, e restate esposte alla luce, una disposizione identica a quella descritta dal Rezzonico per le fibre midollate spinali. Allora il dottor Schuster mi concesse gentilmente gli stessi suoi preparati perchè me ne valessi nel mio studio. L' ordine logico di questo scritto mi obbliga a rimandarne più innanzi la loro minuta descrizione. Però ho voluto far qui notare come la disposizione ad imbuti nelle fibre nervose periferiche era stata da me osservata prima della pubblicazione della Memoria del Golgi.

Intanto l'esposizione fedele (giacchè mi son valso delle stesse parole degli autori) della letteratura riguardante la guaina midollare, mostra che tuttora non esiste completo l'accordo tra gli osservatori rispetto il reticolo corneo, di cui io specialmente qui mi occupo, e un giudizio esatto non è stato finora pronunciato: vi hanno impressioni, critiche di metodi, le quali perdono molta parte della loro importanza nel fatto da me constatato, cioè che il reticolo si rivela *quasi* indipendentemente dal metodo di preparazioni (e questo *quasi* lo spiegherò in seguito). Infine la dichiarazione e la interpretazione del Golgi stesso sono ben lungi dall'essere una rigorosa dimostrazione.

A mio giudizio i due ultimi lavori italiani del Rezzonico e Golgi hanno

un'importanza eccezionale sull'argomento. Il primo dimostra, in fondo, nelle fibre nervose midollate spinali la presenza delle incisure e dei segmenti midollari, già conosciuti per le fibre midollate periferiche, perchè potevano anche concepirsi come imbuti i segmenti midollari cilindro-conici e come spazî tra gl' imbuti, le incisure: inoltre dice che quest'imbuti sono costituiti da una sola fibrilla spirale: il Golgi descrive una striatura trasversale nelle fibre nervose fresche, e dimostra la medesima struttura a fibrilla spirale nei segmenti midollari periferici. In tutti i lavori esposti da Ewald e Kühne a Golgi esiste forse la tendenza a dare una troppo grande importanza alla tecnica adoperata e ciascun osservatore naturalmente ritiene sola, vera e necessaria la propria; inoltre pochi osservatori si sottraggono da una tendenza teleologica essa pure, forse, eccessiva.

Per le mie osservazioni dei nervi freschi furono adoprati quelli di uomo, di cane, di coniglio, di piccione e di rana. I risultati ottenuti possono considerarsi quasi identici nei varî animali esaminati.

In un coniglio vivente o di recente ucciso, si tolga con ogni precauzione un pezzo di nervo sciatico o di un fascio del plesso lombare. È utile ancora recidere da un nervo longitudinalmente un pezzo d' un sol colpo con una forbicetta curva, molto tagliente: in questo caso si ha il vantaggio d'aver aperta già la guaina laminosa: infine può anche scegliersi il punto di biforcazione di un fascio. E inutile che io faccia notare come sia necessaria la massima delicatezza o meglio quasi l'assenza di ogni manovra in organi tanto alterabili. Il pezzo di nervo viene posto in una goccia d'umor acqueo dell'animale, che si esamina; ed allora, o per dissociazione con due aghi ad una estremità del tronco, o naturalmente, o per trazione dei due capi, liberate dalla guaina alcune fibre nervose si espandono isolate nel liquido. Il preparato, coperto delicatamente con un vetrino coproggetti, viene chiuso con paraffina fusa; così l' evaporazione, o del tutto è impedita, ovvero, se la paraffina è porosa, viene resa molto lenta, e l'osservazione è possibile per un tempo sufficientemente lungo. Ad un ingrandimento di 400 o 500 diametri (obbiettivo 8, oculare 3 Hartnak) nelle fibre isolate si vedono le particolarità note, guaina di Schwan e nuclei, anelli del Ranvier, incisure e segmenti della guaina midollare. Le fibre trasversali del Golgi sono facili a constatarsi, specialmente alle parti esterne delle incisure midollari. Dal segmento esterno, nel punto in cui ricopre il segmento interno, si vedono partire tanti fili orizzontali o leggermente curvi, che spiccano molto traversando le incisure.

I segmenti midollari mano mano divengono più distinti e staccati, ed hanno tendenza a dare delle ripiegature. Spesso l' una o le due estremità del segmento, massime di quello, che trovasi più internamente, si dirigono verso l'asse delle fibre. In moltissimi luoghi il pezzo, che rappresenta la sezione ottica verticale del segmento midollare, si flette nel suo mezzo a forma di semicerchio, che si dirige nell'interno della fibra. In alcuni luoghi la parte estrema del segmento di un lato si pone trasversalmente alla fibra nervosa.

In altri avviene la flessione verso l'interno di due segmenti vicini, dando un' apparenza analoga ad un anello di Ranvier; oppure si uniscono nella linea mediana le due estremità d'un segmento midollare. In fine in alcune fibre è avvenuta una

piegatura pressochè inestricabile di segmenti midollari, ma che può comprendersi per le osservazioni parziali accennate.

Le svariatissime piegature dei segmenti midollari (che costituiscono un' osservazione ovvia) si possono vedere in qualunque nervo, e aumentano col rimanere della preparazione e sono l' espressione di un fatto cadaverico complesso, in cui oltre il fatto chimico, ha la sua gran parte l'alterata densità delle parti costituenti la fibra nervosa. In alcuni casi accadono retraimenti, o piegature ad intervalli nei segmenti midollari, e la fibra presenta strozzamenti e dilatazioni a rosario. In un fascio, tolto dall'ascella d'un coniglio appena ucciso, in seguito ad una breve e delicata dissociazione delle fibre nell'umor acqueo dell'animale, al microscopio si rivelano nelle fibre perfettamente distinte le incisure e i segmenti midollari, e le strie trasverse del Golgi. Le fibrille dei segmenti sono evidenti agli estremi dell'incisure e lievemente ondeggiate. Esaminate alla luce polarizzata coll' obbiettivo n. 11 Hartnak la guaina mielinica presentasi brillante quando i due nicol sono incrociati: il cilindro assile e la guaina di Schwan sono oscuri. Nella figura 9 è rappresentata un tratto di fibra nervosa fresca osservato alla luce polarizzata essendo incrociati i due nicol.

Le fibrille trasverse, che spiccano meglio nelle incisure, sono birifrangenti: birifrangenti sono similmente gli ammassi mielinici, usciti dai tubi nervosi. Si vedrà in seguito che la mielina conserva questa proprietà ottica anche nei preparati, i quali hanno subìta una lunghissima azione dell'alcool. Le fibre, come è stato detto precedentemente, quanto più lungamente il preparato rimane, per la lenta evaporazione del liquido a traverso una paraffina porosa, subiscono nei segmenti midollari le piegature descritte.

Similmente le fibre nervose d'un cadavere umano, tolte da un luogo ove non abbiano ricevuto o pressione o maltrattamenti, p. e. dal plesso sacrale, e dissociate con ogni cautela nell'umor acqueo del cadavere, presentano, oltre le note particolarità, le incisure ed i segmenti midollari e chiarissime strie trasversali. Le piegature si producono ed aumentano gradatamente, come il preparato resta, per gli alterati rapporti di densità. Ma oltre la piegature descritte, avviene un' altra alterazione nei segmenti midollari; questa la chiamerò, per così dire, ramificazione e divisione dei segmenti medesimi. In alcune fibre si vedono i segmenti divisi nel loro corpo e sfrangiati all'estremità (fig. 1). In altre gli sfrangiamenti dei segmenti, anastomizzati tra loro, producono una specie di rete. In altre fibre esiste uno sfilamento dei segmenti mielinici soltanto da un verso in modo molto regolare, onde la fibra nervosa acquista un aspetto, direi, fogliato (fig. 3). Nella fibra nervosa, rappresentata dalla figura 2, ho potuto rimarcare i narrati mutamenti dei segmenti midollari in modo progrediente. Nella parte superiore appaiono quasi normali le fibrille trasversali del Golgi; più in basso i segmenti mostrano lacune nel loro corpo; più in basso ancora le fibrille paiono unite tra loro a rete; il corpo del segmento è così ridotto da raffigurare l'immagine della cavità d'un corpuscolo osseo. In alcune fibre ho osservata la formazione di una rete molto rassomigliante al reticolo corneo ma di spessore più considerevole nei fili delle sue maglie.

Si noti che gli sfilamenti dei segmenti e le formazioni delle reti sono comuni a tutte le fibre nervose esaminate, e divengono tanto più considerevoli per quanto

tempo più lungo è lasciato il preparato. Le combinazioni di tali alterazioni colle piegature dei segmenti dà luogo ad apparenze addirittura indecifrabili per chi non ha studiato gli elementi di queste alterazioni. Ricapitolando queste sono di due principali modi; o piegature, o sfilamenti del segmento midollare; tutti due esprimono un fatto cadaverico complesso in cui ha molta parte l'alterata densità delle parti costituenti la fibra nervosa: le piegature sono favorite dagli accorciamenti totali delle fibre.

Trattando le fibre nervose con alcool, accade una coartazione di tutta la fibra, le parti interne della quale non diventano più visibili, giacchè nel luogo della guaina midollare accade un intorbidamento granuloso fortissimo. Il fenomeno è tanto più rapido e considerevole per quanto più l'alcool è concentrato. In seguito, restando a lungo le fibre nell'alcool, la parte grassa della guaina midollare, la mielina, si scioglie lentamente nel liquido e rimangono le parti cosidette cornee. Si è visto che alla luce polarizzata, la fibra nervosa fresca si mostra vivamente birifrangente nella sua guaina midollare e nelle fibrille trasversali del Golgi; dopo una sufficiente azione dell'alcool, dopo cioè la manifestazione del reticolo corneo, la birifrangenza sparisce: invece le masse mieliniche, che si rinvengono in tessuti nervosi conservati da anni in alcool, mostrano una evidentissima doppia rifrazione. Anche la sostanza cornea dell'epidermide, dei peli ecc. conserva, dopo l'azione indefinita dell'alcool, la birifrangenza, che assolutamente manca alle fibrille costituenti il reticolo corneo.

Per comprendere il significato delle alterazioni, che si vedono produrre sotto il microscopio nelle fibre fresche, e della manifestazione del reticolo nelle fibre conservate, è mestieri avere un'idea chiara della costruzione della guaina midollare. Io ho narrato, come dopo la lettura del lavoro del Rezzonico potetti riscontrare nelle fibre nervose periferiche umane una disposizione analoga a ciò che il Rezzonico descriveva per le fibre della midolla del bue. Il lavoro del Golgi illustrò anche per le fibre periferiche questa disposizione; intanto il fatto che si sia giunti a constatare la medesima cosa con tecnica differente, costituisce una prova sull'esattezza dell'osservazione. Le fibre nervose appartenevano al nervo tibiale di una gamba umana, amputata dal prof. Gussenbauer nella clinica chirurgica di Praga. Il dott. Schuster le aveva sottomesse all'azione successiva delle soluzioni di cloruro d'oro e d'acido formico. Alcuni preparati erano stati colorati con soluzione di picrocarminato, o carminio e cocciniglia, o ematossilina: in seguito le fibre erano state dissociate e poi chiuse col conosciuto metodo nel balsamo del Canadà.

I preparati da me esaminati, avevano subìta l'azione della luce. Ma non in tutte le fibre le manifestazioni, che io descriverò, erano visibili; in alcune anzi impossibili a constatarsi, e ciò, o per maltrattamento delle fibre stesse, o per insufficiente impregnazione del sale aureo, o per troppo, o troppo poca azione della luce. Nelle fibre però ben conservate e colorate di un bel violetto, si vedevano nella guaina midollare, anche a discreto ingrandimento, un'evidente disposizione a manichetti. Coll'obbiettivo 11 ed oculare 3 Hartnak erano evidentissime le particolarità che io descrivo, e su cui ho disegnata la figura (vedi fig. 6).

La guaina midollare si mostrava fatta da una quantità di manichetti cilindro-conici, che entravano l'uno nell'altro con una disposizione regolare, ma non unica. Essa poteva ridursi a due tipi principali.

Il primo è più complicato ed è composto di tre forme o specie di manichetti come appresso: a distanze eguali esistono manichetti della prima forma cioè cilindrici nel loro corpo e conici alle due estremità. La parte cilindrica centrale si applica esattamente sulla guaina di Schwan, le due coniche periferiche si allontanano gradatamente dalla guaina sino ad andare ad applicarsi al cilindro dell'asse, che rivestono per un certo tratto, unendosi coi rivestimenti assili dei rispettivi manichetti cilindro-biconici. Supponendo che esistessero soltanto questi manichetti della prima specie, cilindro-biconici, si avrebbe la guaina midollare a dilatazioni e strozzamenti regolari come un rosario. Gli spazî lasciati per l'allontanamento del tubo cilindrico della guaina di Schwan dalle pareti coniche dei manichetti cilindro-biconici descritti, e che alla sezione rappresenterebbe due superficie triangolari o trapezoidi ai lati del cilindro dell'asse, contengono altri manichetti della seconda forma, cioè cilindro-conici e uniti nella loro parte conica. La parte cilindrica di essi è rivolta in senso opposto, e si applica col suo bordo libero sul contorno esterno dei manichetti cilindro-biconici, dove essi diventano conici; costeggia poi per un certo tratto la guaina di Schwan, e poi nella sua parte conica ci si allontana e va ad applicarsi sul cilindro dell'asse. In questo modo resta un piccolo spazio, in sezione triangolare, lateralmente al cilindro dell'asse tra la guaina di Schwan e la superficie esterna di ambedue le parti coniche dei due manichetti della seconda forma.

Una terza specie di manichetti, semplicemente cilindrici, che applicano esattamente i loro bordi liberi nel contorno dove i manichetti della seconda forma da cilindrici diventano conici, chiude questo spazio triangolare. Così adunque si hanno ad intervalli regolari dei manichetti cilindro-biconici circoscriventi in sezione tanti spazî trapezoidi lateralmente al cilindro assile, e lasciando in sezione spazî inversamente trapezoidi, oppure triangolari tra la loro superficie esterna e la guaina.

Poi un secondo sistema di manichetti cilindro-conici, uniti per gli apici e circoscriventi, da ogni lato, due spazî romboidali e lascianti uno spazio triangolare o discoide tra le loro superficie coniche esterne e la superficie interna della guaina di Schwan. In fine vi hanno manichetti cilindrici chiudenti quest' ultimi spazî (vedi fig. 15).

Il secondo tipo d'aggruppamento consiste nel succedersi, in direzioni opposte ad un manichetto della prima specie, cioè cilindro-biconico, una serie di manichetti della seconda specie, cioè cilindro-conici; tali manichetti sono successivamente così disposti, che il bordo libero della parte cilindrica del secondo si applica esattamente sul contorno angolare, che segna il principio della parte imbutiforme del primo e così via (vedi fig. 8).

Al solito gli apici degl' imbuti circondano il cilindro dell'asse. Per maggior chiarezza ho rappresentato le figure schematiche del primo e secondo tipo (fig. 7, e 8). Le linee punteggiate rappresentano i contorni della superficie esterna dei manichetti della prima forma, cioè dei cilindro-biconici; le linee tratteggiate i contorni dei manichetti della seconda forma, cioè dei cilindri conici; da ultimo le linee continue i contorni dei manichetti della terza forma, cioè dei cilindrici. Come appare dagli schemi e dalla figura, la mielina si trova in una serie di cavità perfettamente chiuse, le quali le impediscono qualunque uscita o spostamento.

Similmente il cilindro assile è mantenuto saldamente nell'asse della fibra. I nuclei e il protoplasma della guaina di Schwan, contrariamente alla concezione del Ranvier, non hanno nessuna relazione col sistema midollare della fibra, il quale forma un insieme di cavità perfettamente chiuse. Esiste un infossamento nel segmento per il nucleo ed il suo protoplasma: ma quest'ultimo si espande tra la superficie interna della guaina di Schwan e l'esterna dei manichetti senza penetrare nell'interno del sistema midollare.

Le preparazioni, ottenute coll'impregnazione aurea, mostrano spiccatissimi i contorni dei cerchi trasversali, che esprimono il bordo libero dei manichetti. Vicino a tali contorni possono talvolta seguirsi alcune linee trasversali parallele. Così pure i manichetti osservati attentamente, in molte preparazioni si mostrano striati. I segmenti mielinici sono colorati di violetto dall'oro ridotto più intensamente che il cilindro assile. Esiste più o meno uno spazio tra i segmenti, il che indica come la mielina, pel disidratamento indotto dalla nota tecnica nella preparazione, si sia staccata dal lato esterno del manichetto immediato.

In alcuni luoghi le pareti dei manichetti, invece che striate trasversalmente, appariscono come reticolate, ma ciò lo credo dovuto a qualche guasto indotto da trazione o altro nelle fibre.

Si sa che l'impregnazione dell'oro è complementare a quella dell'argento, e ne è riprova.

Coll'impregnazione aurica possiamo dare una piena conferma e generalizzazione ai fatti constatati dal Rezzonico e dal Golgi. Benchè nei preparati da me studiati, le strie trasversali non erano manifeste che in piccola parte, pure per i risultati avuti dai predetti osservatori con l'impregnazione argentica, sono disposto a considerare tali strie come essenziali nella struttura dei manichetti. La denominazione data a quest'ultimi d'imbuti, la reputo inesatta, giacchè l'imbuto forma una parte soltanto dei manichetti della prima e seconda specie, e manca completamente in quelli della terza specie, che sono conformati a semplici cilindri.

Esposta così la costruzione della guaina midollare delle fibre nervose, riprendo le cose di fatto da me descritte, per darne una spiegazione scientifica.

Prima d'ogni altro faccio notare, che il reticolo corneo, in certe condizioni, non può dimostrarsi: e queste si ritrovano quando le fibre nervose, prima di subire alterazioni cadaveriche, sono trattate con un reattivo, che le abbia fissate durevolmente nelle loro parti. Questo fanno eminentemente l'acido osmico a soluzione 1 per 100 e 1 per 200, o il cloruro d'oro, o il nitrato d'argento. Ucciso un nervo in un animale vivente con una delle soluzioni suddette o immerso in dette soluzioni un fascio nervoso tratto, con ogni cautela, da un cadavere fresco, il reticolo corneo non si mostrerà mai, sibbene si mostreranno le incisure e i segmenti midollari e, in condizioni favorevoli, i manichetti. Così alcuni osservatori, come il Ranvier, che studiarono minutissimamente ed a lungo le fibre nervose uccise con soluzioni osmiche o immerse freschissime e ben distese in altri liquidi induranti, non si accorsero di alcun reticolo.

Come è stato detto, i segmenti midollari hanno tendenza a pieghettarsi e a sfrangiarsi mano mano che il preparato rimane. Se le fibre son poste in un liquido indifferente (l'umor acqueo dell'animale) le piegature e gli sfrangiamenti avvengono più lentamente.

Il meccanismo, con cui tali alterazioni si producono, non è difficile a comprendere. Come si è esposto, la mielina liquida è contenuta in un sistema di cavità chiuse, formate dall'imboccarsi reciproco dei manichetti.

Tutto il sistema è rinserrato dalla guaina di Schwan, la quale, essendo elastica, è probabile che eserciti una permanente e leggera pressione sul sistema midollare descritto. Di tale pressione si può avere una specie di prova, osservando come nelle fibre rotte, la mielina ha forte tendenza ad uscire, e la guaina di Schwan a ritrarsi. Avvenuta la morte della fibra, succede nelle guaine midollari e di Schwan un fatto comune alle altre membrane animali in identiche condizioni. Le membrane animali morte da poco permeabili diventano più permeabili ai liquidi.

L' elasticità della guaina di Schwan può aiutare il trasudamento del liquido attraverso di essa, nel cui interno esiste una certa pressione maggiore. La fibra tende a rimpiccolirsi, e i manichetti tendono a curvarsi, onde le pieghe, le quali sono poi favorite dagl'incurvamenti in totale dell'intera fibra: le gocce di grasso si rappigliano in alcuni punti, e si ha l'apparenza dello sfibramento dei segmenti midollari. L'azione dell'alcool e degli altri liquidi conservatori è in generale coartatrice. L'alcool, oltre il precipitare in granuli opachi il liquido trasparente e rifrangente, contenuto nelle casse mieliniche, coarta i fili, che formano le membrane dei manichetti, e le membrane in massa. Allora si staccano dei fili isolati e gruppi di fili, e le membrane si piegano. È naturale che le piegature abbian luogo intorno agli ammassi mielinici, restati nelle cassette descritte. Le membrane poi tendono ad accollarsi attorno al cilindro assile, che diventa rapidamente e considerevolmente più sottile per la sottrazione di acqua, che vi produce l'alcool stesso. Così restano spiegati i fili, le piegature, le maglie e i nodi presentati dal reticolo cosidetto corneo. In genere l'azione tumultuosa del reattivo e, più che altro, le complicate ed alterantissime tecniche impiegate per mettere in evidenza il reticolo corneo, fan disparire ogni disposizione regolare dei manichetti nelle reti, che ne risultano.

Così è facile rendersi ragione come il reticolo corneo possa essere in una certa dipendenza dal grado di concentrazione dell'alcool medesimo, la cui azione può essere in conseguenza o rapida o lenta sul delicato organismo midollare. Però in fibre, non sciupate con manovre prima dell'azione del reattivo e messe tese nell'alcool, possono non di rado riconoscersi, più che le tracce, immagini precise della disposizione dei manichetti.

Fra le numerose preparazioni ho disegnata una fibra, dove il fenomeno, di che parlo, è evidentissimo. Si tratta di fibre del nervo cubitale umano, poste, evitando di sciuparle con manovre, in alcool e lasciate tre mesi. I fasci, lievemente sfibrati, erano lasciati quarantotto ore in una soluzione di picrocarminato fino a raggiungere una colorazione vivace. Lavati poi con acqua distillata si dissociava un pezzo di fascio delicatissimamente con due aghi sottili. All'osservazione microscopica tutte le fibre mostravano evidentissimo il cosidetto reticolo corneo, ed in mezzo un cilindro assile minuto, vivamente rosso. In parecchie la disposizione delle maglie del reticolo riproduceva fedelmente quella dei manichetti. In una preparazione, per esempio, vedevasi un tratto di fibra percorsa in mezzo dal suo cilindro assile oscuro. Apparivano nel principio del suo terzo inferiore i contorni di un manichetto della prima specie, cioè

cilindro-biconico. Agli angoli di cominciamento dei coni esisteva un rigonfiamento (*Knorriger punkt*) e una ramificazione. Le pareti del corpo cilindrico erano quasi a contatto colla guaina di Schwan. Alle due estremità di questo manichetto di prima specie si osservavano i profili alterati di quelli della seconda specie, cioè cilindro-conici. Questi erano retratti e fortemente contorti. In fine d'ambedue i lati si raffiguravano molto bene i profili dei manichetti della terza specie o cilindrici. I quali erano contorti nel proprio asse, e l'immagine della loro figura era romboidale. I rigonfiamenti o nodi si mostravano specialmente, o nei bordi liberi dei manichetti, o nell'angolo, il quale la loro sezione ottica formava nel punto che essi manichetti da cilindrici si mutavano in conici.

Le reti, più che da sfibramento per distacco di fili nelle membrane dei manichetti, sono date da ripiegature ed accartocciamenti di queste membrane intatte. Allora si può riconoscere con un buon obbiettivo che invece di bastoncelli o fibrille si ha da fare, il più delle volte, con ispessimenti e pieghe filiformi. Tale si vede agevolmente nella fig. 4, ove si riscontra nelle ripiegature un aggruppamento, che ricorda la disposizione dei manichetti. Per lo più le fibre o bastoncelli sono mescolati colle pieghe.

Ponendo un fascio di fibre nervose, in cui si è riscontrato un così detto reticolo corneo, nell'acido acetico concentrato, in modochè il fascio, da bianco opaco che era, divenga perfettamente trasparente, ed esaminando poi le fibre al microscopio si trova, che la rete è scomparsa e si hanno delle piegature da riprodurre con poca differenza l'aspetto di una fibra fresca sottoposta all'alcool. Naturalmente manca il precipitato di granuli di mielina, la quale si è disciolta innanzi.

Esaminando fibre di tronchi nervosi antichissimi, che sono stati cioè da parecchie diecine d'anni in alcool, si vede (fig. 5) la guaina di Schwan pieghettata, il cilindro assile sottilissimo con qualche stralcio di sostanza così detta cornea. Ogni apparenza di reticolo è scomparsa. Il fatto poi osservato da Gerlach e riportato da Engelmann, che cioè il lavamento delle fibre nervose in acqua impedisce in seguito la formazione del reticolo, sarebbe tutt'altro che un argomento contro la esistenza normale di quest'ultimo. In vero si sa che la sostanza cornea è eminentemente igroscopica, e le sottilissime fibrille, formanti le pareti dei manichetti, si potrebbero gonfiare e dileguare sotto l'influenza dell'acqua; per tal modo poi non rimarrebbe materia per formare il reticolo. Così tutte le apparenze accennate sono spiegate pienamente dall'osservazione severa dei fatti, per cui è dimostrato:

1. Che il reticolo cosidetto corneo è una manifestazione generale delle fibre nervose sottoposte ai comuni liquidi conservativi, alcool, soluzione di bicromato di potassa, acido osmico, liquido di Müller ecc.

2. Che soltanto esso non si riscontra nelle fibre uccise direttamente con soluzione di acido osmico, cloruro d'oro, nitrato d'argento, e poste, senza sciuparle, in tali liquidi, i quali abbiano efficacia di fissare, con la mielina, la forma vivente della fibra nervosa.

3. Che il reticolo ha un fondamento essenziale nella struttura normale della guaina midollare, e manifesta un'alterazione di questa struttura.

4. Che la struttura della guaina midollare, oltre allo svelarsi coll'impregnazione d'argento (metodo bicromico argentico, osmico-argentico), appare coll'impregnazione aurea (metodo aureo-formico).

5. Che essa struttura consiste in una disposizione di tre diverse sorta di manichetti, cilindro-biconici, cilindro-conici, e cilindrici imboccati tra loro e sovrapposti.

6. Che presumibilmente tali manichetti sono saldati strettamente tra loro da circoscrivere un sistema di cavità chiuse e verosimilmente non comunicanti; in tali cavità è posto il liquido mielina. La guaina di Schwan rinchiude e contiene sotto una pressione permanente e costante il sistema di manichetti midollari. I nuclei ed il protoplasma addossati alla parte interna della guaina non comunicano colle dette cavità del detto sistema midollare.

7. Che può rinvenirsi nel reticolo la disposizione del sistema midollare, e che esso reticolo è prodotto dalla coartazione delle membrane dei manichetti formate dai fili spirali: le membrane sono in parte piegate, in parte dilacerate per disunione dei fili, o accartocciate ai loro bordi liberi, per il tal modo il reticolo corneo esprime un'alterazione di una disposizione normale.

In quanto alla denominazione di cornea data alla sostanza resistente, che costituisce la rete, o che forma la parete dei manichetti del sistema midollare, essa denominazione ha un' importanza puramente chimica e ancora relativa in vista del complicatissimo processo impiegato a ritrovarla. Ad ogni modo i manichetti non hanno nulla, nella loro costruzione, che rammenti morfologicamente l' epitelio e la derivazione dell'epiblasto del tessuto nervoso.

Le questioni insorte negl' istologi tra reticolo e membrane cornee, non hanno attualmente più alcuna importanza. I fatti esposti nel presente lavoro mostrano come le apparenze o di fili o di membrane potevano esser possibili, e talvolta poteva essere ancora possibile determinare qualche probabile condizione sul loro prodursi.

Si è accennato ad una questione, che ha grande relazione nella struttura della guaina midollare, cioè alle guaine assili. È indubitato che, nelle sottili sezioni trasversali di fibre nervose, s'incontrano uno o più contorni distinti attorno l'asse cilindro: però la possibilità di tali contorni e le loro diverse manifestazioni ci vengono innanzi per le cognizioni che possediamo sulla esistenza e disposizione dei manichetti midollari. Quindi le prove per una guaina speciale del cilindro dell'asse si aspettano ancora. Il Ranvier aveva da qualche anno rimarcato che alla impregnazione argentica, per cui si manifestano crocette in corrispondenza degli anelli, l'asta assile si vede striata trasversalmente. Questo fatto particolare ha relazione colla struttura striata dei manichetti e ne è una parziale manifestazione.

II.

A queste voglio unire altre considerazioni, che riguardano, più specialmente, lo studio delle alterazioni patologiche del sistema nervoso centrale.

L'estate dell'anno 1879, nel mio gabinetto patologico dell'Università di Camerino, feci una serie di osservazioni sui rapporti tra la mielina ed i corpuscoli amilacei, che si rinvengono sotto speciali condizioni nell' encefalo e nel midollo spinale. Colgo ora l'occasione per pubblicare i risultati a cui giunsi.

Mi furono dati gentilmente ad esaminare dal mio collega prof. Mircoli parecchi pezzi di sostanza cerebrale unitamente al bulbo e alla parte superiore del midollo

spinale. Alcuni dei pezzi erano stati posti da oltre un anno nell'alcool, altri avevano soggiornato in una soluzione di bicromato potassico, dalla quale erano passati in alcool. Essi appartenevano al cadavere di una giovanetta quattordicenne, che morì dopo pochi giorni di dimora nella clinica medica d' iniziamento a Camerino, dove giunse in uno stato avanzatissimo di paralisi generale progressiva, la quale si era sviluppata abbastanza lentamente.

Il cadavere fu tagliato dallo stesso prof. Mircoli. Ciò che fermò l'attenzione di lui fu una fortissima consistenza presentata dall'encefalo, e la quale era paragonabile a quella, che l'organo acquista dopo un lungo soggiorno in una soluzione di acido cromico. Al taglio, la sostanza nervosa si mostrava seminata da un numero grandissimo di corpiccioli di varie dimensioni, fino a quella massima di piccoli granelli di miglio.

Questi corpiccioli risultavano in chiaro sul fondo omogeneo della sostanza nervosa. Negli altri visceri del corpo non esistevano alterazioni speciali. La necroscopia era stata eseguita 24 ore dopo la morte dell'inferma.

I preparati conservati in alcool presentavano i corpiccioli chiari nel fondo più grigiastro della sostanza nervosa. Tali corpuscoli si osservavano ad occhio nudo unicamente nella sostanza bianca dell'encefalo (fig. 10): la sostanza grigia delle circonvoluzioni ne era completamente priva. Al contrario nei tagli del midollo spinale si vedevano irregolarmente sparsi. All'osservazione attenta i corpuscoli mostravano una specie di ombellicatura centrale, e se ne vedevano parecchi situati nei solchi ove scorrono vasi sanguigni.

Trattata la superficie del taglio con tintura di jodio o soluzione jodo-jodurata, essa si colorava uniformemente in giallo senza dar luogo ad alcun punto più oscuro. I corpuscoli erano meno distinti nei pezzi verdastri conservati nelle soluzioni di bicromato potassico. Eseguiti moltissimi tagli della sostanza cerebrale nel limite delle circonvoluzioni ed esaminati a debole ingrandimento (ocul. 3, obb. 4 Hartnak), la sostanza bianca mostrava la presenza di moltissimi corpi di figura pressapoco rotonda, i quali si distinguevano per una fortissima rifrangenza dal resto della sostanza cerebrale. Il contorno di essi era nettissimo, e nella loro superficie apparivano screpolature analoghe a quelle presentate da ammassi di riuniti globuli rossi sanguigni nello stato cosidetto muriforme. La sostanza grigia delle circonvoluzioni non mostrava traccia dei corpuscoli in discorso, i quali si vedevano sempre posti nel tramite dei vasi sanguiferi; quasi costantemente si riusciva a vedere il vasellino con cui erano in connessione. In parecchi preparati si osservavano aggruppamenti tali di corpuscoli da dar l'immagine d'un grappolo d'uva. Gli acini erano rappresentati dagli ammassi rifrangenti; i gambi degli acini, dai vasi. Il posto dei corpuscoli era quasi costantemente l'interno delle guaine linfatiche perivascolari.

Ad un forte ingrandimento (n. 8 obbiettivo, ocul. 3 Hartnak) si presentavano pure nettamente circoscritti ai contorni. La zona periferica della loro superficie era rilevata, la parte centrale depressa. Vario il modo di connessione coi vasi sanguigni. Talvolta come addossati, tal'altra si scorgeva il vaso confondersi nella sostanza del corpicciolo, il quale mostravasi costituito da una massa rifrangentissima, omogenea, a screpolature, in cui si scorgeva qualche nucleo granuloso o dei granuli brillanti. Le alterazioni patologiche riscontrate erano quelle di una diffusa infiammazione intestiziale ed epidendimite.

Oltre le masse rifrangenti descritte a forma regolarmente circolare, ne esistevano altre informi.

I tagli imbevuti con ematossilina mostravano un'apparenza elegantissima; i corpuscoli descritti si vedevano colorati d' un bel turchino-bleu sparsi tra la sostanza nervosa e in rapporto evidentissimo coi vasi sanguiferi. Le masse rifrangenti informi al contrario non si coloravano molto.

I corpuscoli colorati si mostravano fatti da una sostanza omogenea e finamente granulare, la quale si tingeva diffusamente in turchino bleu. In mezzo ad essa esistevano dei nuclei più fortemente carichi di materia colorante e molti granuli rifrangentissimi che restavano incolori.

Colle soluzioni di carminio gli ammassi si coloravano ancora vivamente.

Osservati i tagli alla luce polarizzata, nell'incrociamento di due nicol, i corpuscoli detti si vedevano brillantissimi sul campo oscuro. Saggiati i tagli microscopici chimicamente, si avevano i risultati seguenti:

1. *Coll'acido acetico glaciale* il taglio diventava trasparentissimo e i corpuscoli spiccavano bianchi opachi sul resto: al microscopio alcuni conservavano l'aspetto di masse omogenee rifrangentissime, altri si mostravano formati da granuli minutissimi. Alla luce polarizzata si conservavano birifrangenti.

2. *Con potassa caustica.* Soluzione 50 per cento. *A freddo*: il taglio diventava trasparentissimo; i corpiccioli non erano alterati, ma spiccavano rifrangentissimi sul resto: in seguito le screpolature divenivano più evidenti accentuandosi l' apparenza muriforme: dopo tre giorni di permanenza, i corpuscoli diventavano ancora più netti sul circostante tessuto e la loro sostanza si mostrava finamente granulosa. *A caldo*: il taglio diventava trasparentissimo, si distendeva enormemente in superficie; i corpuscoli in conseguenza divenivano più evidenti: chiusi i tagli in balsamo di Canadà ed esaminati alla luce polarizzata non presentavano più la doppia rifrazione.

3. *Coll'acido nitrico fumante.* Il taglio dava una considerevole effervescenza e si colorava diffusamente in giallo. I corpuscoli si dividevano in piccoli frammenti ed esaminati alla luce polarizzata si mostravano birifrangenti.

4. *Colla tintura di jodio e soluzione jodo-jodurata.* Il taglio si colorava diffusamente in giallo: la maggior parte dei corpuscoli spiccava di un colorito più chiaro sulla restante superficie: altri, formati da piccoli granuli, si coloravano debolmente in rosso mattone.

5. *Coll' acido solforico concentrato.* Il taglio diventava subito trasparentissimo: dei corpuscoli alcuni rimanevano evidenti sul restante tessuto, altri si scioglievano dando una colorazione giallo aranciata. Si conservava la birifrangenza nei corpuscoli rimasti integri.

6. *Coll'acido solforico concentrato con piccole quantità di tintura di jodio.* Immediatamente alcuni corpuscoli si tingevano d'un rosso mogano; la più gran parte in giallo, che aumentava progressivamente d'intensità, e sembrava la loro sostanza sciogliersi. Dopo un giorno si vedevano nel preparato chiazze gialle-rossastre, rosse, rosse violette in corrispondenza del luogo dei corpuscoli. Dopo tre giorni si aveva una splendida colorazione violetta (fig. 11).

7. *Alla digestione prolungata con successo gastrigo*, le masse rifrangenti resistevano

e si facevano più evidenti nel restante tessuto, che diveniva trasparentissimo nei tagli. Si conservava la doppia rifrazione.

8. *All'ebollizione prolungata in etere e cloroformio*, i tagli perdevano completamente i corpuscoli descritti, ed esaminati successivamente alla luce polarizzata non presentavano alcun punto birifrangente. Fatto evaporare alla temperatura ordinaria il cloroformio o l'etere non si rinvenivano nel residuo cristalli, ma ammassi rifrangenti presentanti i caratteri dei corpuscoli descritti.

9. *Coll'acido osmico soluzione* 1 *per* 200 i corpuscoli si coloravano in bruno carico ed in nero.

Nelle sezioni fatte in vicinanza dell' ependima si vedevano a piccolo ingrandimento (obb. 4, ocul. 3 Hartnak) elegantissime figure (fig. 12), giacchè i corpuscoli essendo disposti successivamente nelle guaine linfatiche vascolari, riproducevano sul loro insieme la disposizione delle reti sanguigne.

Ho trovato che tali corpiccioli si distinguevano chimicamente dagli ammassi di sostanza amiloide del fegato, milza, reni ecc. degenerati per i caratteri differenziali seguenti:

1. I corpuscoli non reagivano tutti nè sempre alla tintura di jodio, ed alle soluzioni jodo-jodurate, le quali colorano intensamente in modo costante la sostanza amiloide dei visceri degenerati.

2. L'acido osmico colorava costantemente in bruno e in nero intensissimo i corpuscoli, mentre non aveva azione sulla sostanza lardacea dei visceri degenerati. Rispetto alle proprietà fisiche ho osservato costantemente che i corpuscoli presentavano la doppia rifrazione: mentre le masse di sostanza amiloide si mostravano, nei preparati induriti monorifrangenti.

I fatti, che ho descritto, permettono di costruire una storia molto probabile dei corpuscoli amilacei degli organi nervosi centrali. E conosciuto come tali corpiccioli accompagnino i processi patologici e d'involuzione del cervello e del midollo spinale, e come aumentino in numero dopo la morte. Nel caso descritto si trattava d'un encefalo-mielite interstiziale diffusa: i corpiccioli si trovarono alla necroscopia eseguita ventiquattro ore dopo la morte: essi nei pezzi conservati in alcool apparivano in maggior numero, che nei pezzi restati nel bicromato di potassa.

Da che derivano i corpuscoli amilacei? Il Birch-Hirschfeld dice che è indeciso se essi rappresentino cellule degenerate o concrementi. In modo certo parmi possa affermarsi che chimicamente presentano identità o almeno grandissima simiglianza colla mielina. Alcuni anatomo-patologi, p. e. lo Charcot, hanno descritto nei processi cronici del sistema nervoso centrale accumuli di masse mieliniche negli spazî linfatici perivascolari. I caratteri chimici sopra segnalati diventano d' una grande chiarezza ammettendo che i corpuscoli amilacei descritti nel mio caso sieno derivati da masse mieliniche. Il coloramento in nero coll'acido osmico si deve ai grassi della mielina, e rappresenta una vera caratteristica della stessa. La tintura di jodio, e la soluzione jodo-jodurata è inattiva sulle masse mieliniche fresche: è probabile che restando come *caput mortuum* in mezzo ai tessuti viventi, le masse mieliniche subiscano modificazioni tali da render possibile il coloramento bruno-mogano. E probabile pure che tali modificazioni dipendano da uno speciale aggregamento fisico che

può prendere la sostanza delle dette masse. Ma la colorazione per l' azione combinata d'acido solforico concentrato e tintura di jodio, è propria della mielina anche nello stato freschissimo ed è comune ad altre sostanze organiche.

La persistente doppia rifrazione forma un carattere costante delle masse mieliniche anche dopo un antico soggiorno dei preparati in alcool, e ciò si deve pure alla materia grassa mielinica. Infatti mentre sono birifrangenti le fibre nervose fresche (fig. 9) nel loro contorno midollare, non vi è traccia di birifrangenza nelle fibre nervose prive di mielina, e che presentano il fenomeno del reticolo corneo. I corpuscoli amilacei invece presentavano sempre una splendida doppia rifrazione. Altro argomento della derivazione di quest'ultimi dalla mielina, è la loro forma. È facile osservare sotto al microscopio la fuoriuscita della mielina dagli estremi delle fibre tagliate, e il suo foggiarsi in cumuli caratteristici. Dissecandosi per l'azione dell'alcool, gli ammassi divengono friabili e si fratturano. La mielina, che per cagioni diverse può uscire dal sistema di cavità ove è racchiusa, viene trascinata dalle correnti linfatiche negli ampî spazî che circondano i vasi sanguigni: quivi essa, avendo tendenza fisica a conformarsi in corpi sferoidali, forma dei cumuli. I caratteri morfologici degli ammassi amilacei descritti si adattano al modo passivo di loro produzione: essi contengono nel loro interno nuclei e granuli rifrangenti. È supponibile che gli uni e gli altri rappresentino nuclei e nucleoli di cellule linfatiche impigliate nelle masse dei corpuscoli.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

FIG. 1. (obb. n. 11, ocul. n. 3 Hartnak). Fibra nervosa midollata di coniglio restata un certo tempo nell'umor acqueo dello stesso animale. Fratture longitudinali e sfilamenti dei segmenti midollari.

» 2. (obb. n. 11, ocul. n. 3 Hartnak). Fibra nervosa midollata umana appartenente a cadavere fresco; la fibra è stata tolta dal plesso sacrale e posta nell'umor acqueo dello stesso cadavere. Nella parte superiore della figura si veggono i segmenti midollari poco alterati ed evidenti strie trasversali di Golgi. Nel mezzo della figura si rimarcano vacuoli nella sostanza dei segmenti midollari, i quali alle loro estremità sono sfrangiati. Più in basso le sfrangiature sono più considerevoli, e più considerevoli sono le apparenti fratture del corpo del segmento midollare.

» 3. (obb. n. 11, ocul. n. 3 Hartnak). Fibra nervosa midollare appartenente a cadavere umano fresco. La fibra è stata tolta dal plesso sacrale e posta nell'umor acqueo dello stesso cadavere. I segmenti midollari sono sfrangiati e sfilati tutti in una medesima direzione, da dare alla figura un aspetto fogliato.

» 4. (obb. n. 11, ocul. n. 3 Hartnak). Fibra nervosa midollata dell'ulnare umano in un caso di lepra anestetica. Il nervo aveva soggiornato lungamente nell'alcool. La colorazione fu ottenuta con soluzione di picrocarminato. Il cilindro assile è assottigliato e intensamente colorato, così pure un nucleo di Schwan. Si rimarca un bellissimo reticolo corneo con punti nodosi per ogni dove.

» 5. (obb. n. 11, ocul. n. 3 Hartnak). Fibra nervosa midollata umana, che ha soggiornato per tempo lunghissimo in alcool. Il cilindro assile è ridotto sottilissimo, e vi aderiscono tralci di reticolo corneo. La guaina di Schwan presenta delle pieghe; nella figura si vede un'anello di Ranvier.

» 6. (obb. n. 11, ocul. n. 3 Hartnak). Fibra nervosa del nervo tibiale anteriore umano di una gamba amputata. Il nervo fu impregnato colla soluzione di cloruro d'oro, poscia trattato con soluzione di acido formico, e dissociate le fibre, il preparato restò esposto alla luce. Si vede chiarissima la struttura del sistema midollare. Il cilindro assile scorre continuo in tutta la fibra presentandosi ineguale nel suo spessore. Si veggono in linee oscure accentuate al bordo libero dei manichetti, i quali sono di tre sorta rispettivamente sovrapposti, cioè cilindro-biconici, cilindro-conici, e cilindrici. In vicinanza del loro bordo libero i manichetti presentano delle strie trasversali.

» 7. (figura schematica). Primo tipo del sistema midollare. I manichetti cilindro-biconici sono rappresentati da linee punteggiate; i manichetti cilindro-conici sono disegnati con linee tratteggiate, i manichetti cilindrici con linee continue.

» 8. (figura schematica). Secondo tipo del sistema midollare. I manichetti cilindro-biconici sono rappresentati da linee punteggiate, i cilindro-conici da linee tratteggiate.

» 9. (obb. n. 11 Hartnak). Fibra nervosa fresca di coniglio, posta nell'umor acqueo dello stesso animale ed osservata alla luce polarizzata. I due nicol sono incrociati. L'obbiettivo è adattato per lo strato medio. La guaina midollare è birifrangente.

» 10. Taglio della sostanza cerebrale degli emisferi visto ad un ingrandimento di due volte circa il naturale. Nella sostanza bianca rimarcasi una forte quantità di corpuscoli, che risaltano chiari sulla restante sostanza. Alcuni di questi si vedono posti nei solchi vascolari. La più parte mostrano una ombellicatura centrale.

» 11. (obb. n. 4, ocul. n. 3 Hartnak). Taglio di sostanza bianca cerebrale con corpuscoli amilacei, trattato con una miscela di una debole quantità di tintura di jodio con acido solforico concentrato, ed osservato dopo due giorni. I corpuscoli amilacei sono coloriti d'un bel violetto intenso.

» 12. (obb. n. 2, ocul. n. 3 Hartnak). Taglio della sostanza cerebrale in corrispondenza del quarto ventricolo. Si vedono i corpuscoli amilacei, colorati in nero dall'acido osmico, disegnare il tramite dei vasi sanguiferi.

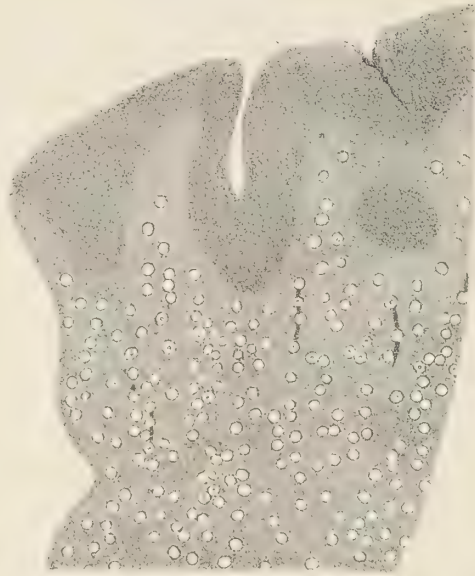



Fig. 3
Fig. 10
Fig. 9
Fig. 6
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5

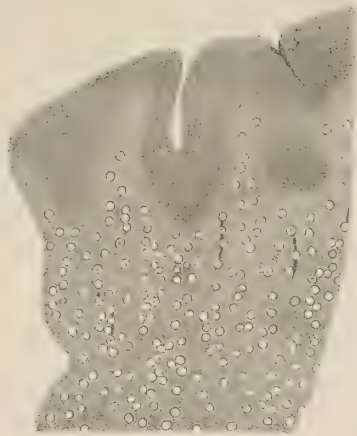
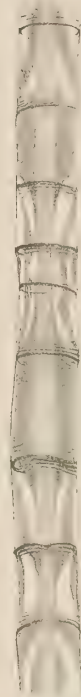
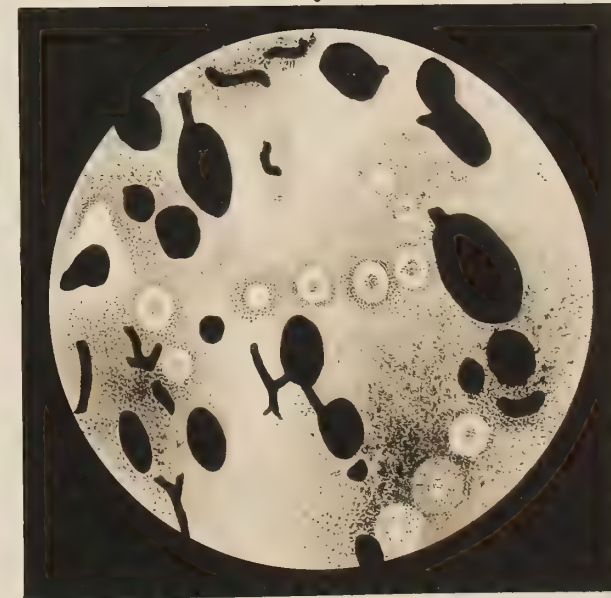



Fig. 12
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 11

Fig. 9
Fig. 3
Fig. 10
Fig. 6
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 12
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 11

Sulla diminuzione della gravità coll'altezza.

Memoria di FILIPPO KELLER

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 febbraio 1881.

§ 1.

Nel nuovo locale dell'Istituto fisico di Roma ho fatto un tentativo per misurare la diminuzione della gravità coll'altezza. L'apparecchio, del quale mi sono servito, è una bilancia a braccia uguali di grande precisione e disposta in guisa, che a ciascun braccio la sospensione è costituita di due piatti, uno inferiore, l'altro superiore; la distanza verticale di questi due piatti è di circa met. 9,3 (¹). Supponendo questa bilancia in equilibrio e ponendo pesi uguali in ciascun piatto superiore, la bilancia resta in equilibrio e lo stesso accade, quando si pongono i pesi nei piatti inferiori. Però mettendo uno dei pesi nel piatto inferiore, l'altro nel superiore, è chiaro, che la bilancia non può rimanere in equilibrio, atteso che il peso posto nel piatto superiore si trova più distante dal centro della Terra dell'altro.

Per vedere di che grandezza sono queste variazioni di peso accusate dalla bilancia facciamo l'ipotesi, che la Terra sia perfettamente sferica e composta di strati concentrici omogenei. Ammettendo che ciascuno dei due corpi abbia nel piatto superiore il peso Q, chiamando R il raggio terrestre e h la sospensione vale a dire la distanza verticale dei due piatti, è chiaro, che il suo peso nel piatto inferiore sarà invece $Q.\left(\frac{R+h}{R}\right)^2$, ovvero senza errore sensibile

$$Q\left(1+\frac{2h}{R}\right);$$

l'aumento dato dalla bilancia per aver trasportato uno dei due corpi dall'alto in basso è quindi

$$p=\frac{2h}{R}Q.$$

Si può adunque ammettere, che la diminuzione coll'altezza sia proporzionale a quest'ultima. Supponendo il raggio terrestre = m. 6366700, allora ciascun metro di altezza produce una diminuzione di 0,00000031 del proprio peso. Così innalzando un chilogrammo per un solo metro, esso diminuisce di peso per circa 0,3 di milligrammo. Questa quantità può essere resa sensibile con una bilancia di precisione; sempre però

(¹) Profitto di questa occasione per esternare i miei ringraziamenti al sig. prof. Blaserna, direttore del nostro Istituto fisico, il quale appena saputo il mio desiderio di fare queste esperienze, diede immediatamente ordine di incominciare i lavori necessari alla bilancia e al locale, mettendomi così in grado di poterle eseguire con facilità e precisione.

richiedono le pesate le più grandi precauzioni e avvertenze. Avendosi poi a disposizione un'altezza maggiore, la differenza di peso è ancora molto maggiore; a dieci metri vi corrisponde già una perdita di peso di circa tre milligrammi.

Una sorgente di errore in questa esperienza consiste nella spinta dell' aria dal basso in alto, la quale diminuisce apparentemente il peso dei corpi; tale perdita non è stata considerata nella formula data di sopra, la quale si riferisce, come bene s'intende, al vuoto. Innalzando un qualunque corpo a una certa altezza, la spinta dell'aria diminuisce, vale a dire il suo peso dovrebbe per questa causa apparentemente crescere, perchè l'aria in basso è più densa. L'effetto che produce l'aria è quindi contrario a quello prodotto dalla decrescente gravità coll'altezza. Giova però notare, che mentre quest'ultimo effetto dipende unicamente dal peso del corpo, il primo dipende invece dal suo volume; i due effetti si elidono quindi in parte ed anzi si potrebbe al corpo assegnare una tale densità, che essi si contrabilancino completamente, beninteso parlando sempre di altezze non molto grandi.

Teoricamente parlando sarebbe assai facile, avendosi i dati necessarî, di tenere conto di questo effetto nocivo dell'aria; credo però più opportuno di togliere il medesimo praticamente, se non tutto, almeno in gran parte, servendomi di un metodo che rassomiglia in un certo modo a quello di Regnault, adoperato nelle sue ricerche sulla densità assoluta dell'aria. Nel mio metodo si adoperano non due, bensì quattro pesi che chiameremo A, B, *a*, *b* tutti e quattro del medesimo volume; A e B sono poi esattamente uguali di peso e resi più pesanti che è possibile, *a* e *b* coincidono pure fra di loro, però ad essi deve darsi la minore massa possibile. Nello sperimentare rimangono A e *a* sempre uniti, vale a dire sempre alla medesima sospensione della bilancia a modo di esempio a destra, ma mentre A sta sul piatto in alto, *a* si trova invece in basso e viceversa. Lo stesso dicasi dei pesi B e *b* che si trovano sempre a sinistra. Si dà principio alla esperienza ponendo A e B in alto, *a* e *b* in basso e si osserva l'equilibrio, poi s'invertono i due pesi A e *a*; così venendo A in basso esso cresce di peso, mentre *a* per essere elevato a una certa altezza diminuisce; ma siccome A è molto più pesante di *a*, l'aumento è in favore di A, vale a dire la sospensione di destra deve accusare un accrescimento di peso. Bene si vede che in questo modo di sperimentare la perdita dei pesi nell'aria, parlando in astratto, non c'entra in verun modo, perchè l'effetto dell'aria prodotto sopra il peso, che si trova in qualunque piatto viene contrabbilanciato da quello posto nel piatto attiguo.

Rigorosamente parlando si farebbe qui ancora sentire un' altra influenza dell'aria sulla pesata, la quale però è estremamente piccola. Difatti, se si parte sempre dall'ipotesi della perfetta sfericità della Terra, un punto posto in una certa altezza nell'atmosfera subisce anche l' attrazione dello strato sottoposto dell' atmosfera, il quale strato non agisce, quando si tratta di un punto della superficie della Terra. Questa azione produce quindi un piccolo aumento del peso coll'altezza.

L'idea di questa esperienza sulla diminuzione del peso coll'altezza non è nuova. Difatti riporta Le Sage una lettera di Descartes (morto nel 1650) a Mersenne nel quale si trova il seguente brano [1]: « Or, l'expérience que l'on peut faire, est: Qu'étant

[1] *Observations sur la physique* etc. par M. L'Abbé Rozier, tome 7° pag. 4. an. 1776.

« au haut d'une tour, au pied de laquelle il y ait un puits fort profond, on peut peser « un plomb attaché à une longue corde: Premièrement, en le mettant (avec toute la « corde) dans l'un des Plats de la Balance, et après en y attachant seulement le bout « de cette corde et laissant pendre le poids jusqu'au fonds du puits. Car, s'il pèse « notablement plus ou moins, étant proche du centre de la Terre, qu'en étant eloigné: « On l'appercevra par ce moyen. Mais: Parce que la hauteur d'un puits et d'une « tour est fort petite, en comparaison du diamètre de la terre et pour d'autres con- « sidérations, que j'omets: Cette expérience, ne pourra servir; si la difference qui est « entre un même poids pesé à diverses hauteurs n'est fort notable ».

Ma la priorità della esecuzione appartiene a Cotton [1] il quale comunicò i risultati da lui ottenuti, il giorno 25 maggio 1664 alla Società reale di Londra; queste esperienze furono fatte in una miniera di circa 100 piedi di profondità e sembravano indicare che il peso aumenta coll'altezza. Le medesime sono state ripetute da Power il quale però non concluse niente, credendo di non aver preso le precauzioni necessarie per la buona riuscita.

Alquanto più sappiamo dei tentativi di Hook, il quale esperimentò nel 1665 e 1666 nella chiesa di s. Paolo a Londra [2] in presenza di varî membri della società reale, ma la sua bilancia aveva poca sensibilità, cioè soltanto $\frac{1}{7680}$, la lunghezza della sospensione era di 204 piedi inglesi ($\doteq$ m. 62). Più tardi ripeteva le pesate per l'altezza di 360 piedi ($=$ m. 109), ma egli dice di aver avuto un risultato inconcludente, vale a dire non poteva osservare nè diminuzione nè aumento del peso coll'altezza, le piccole differenze che osservava erano al di sotto degli errori di osservazione. Questo fatto non deve sorprendere; all'altezza maggiore da lui operata di met.109 corrisponde, da quanto fu esposto di sopra, la diminuzione di peso $109 . 0{,}0000031 = 0{,}000033$ circa e questa differenza non poteva accusare la sua bilancia, atteso che la sua sensibilità era $\frac{1}{7680} = 0{,}000133$. Da ciò segue, che per tale bilancia si avrebbe voluto un'altezza almeno $\frac{133}{33} = 4$ volte più grande, vale a dire m. 436 circa, per rendere sensibile la diminuzione del peso coll'altezza. Anche la perdita dei pesi per la presenza dell'aria ha contribuito a diminuire l'effetto, però è da credere, che questo sia stato di poca importanza, essendo verosimile che Hook non si sia servito di pesi di piccola densità. Dopo queste indagini infruttuose propose Hook di servirsi del pendolo invece della bilancia per le ricerche sulla variazione del peso coll'altezza.

E qui non sarà fuori di luogo rammentare, che Newton pubblicò la sua grande legge della gravitazione universale nel 1687 o poco prima, però comunemente si ammette che la sua prima idea di questa legge risale sino al 1666. Ora partendo dall'una o dall'altra di queste epoche, rimane sempre un fatto degno di osservazione, che l'esperienza della bilancia per costatare la diminuzione della gravità coll' altezzza sia anteriore alla scoperta di questa legge, sebbene l'imperfezione della bilancia di quei tempi impediva di giungere a un risultato concludente.

[1] Idem.
[2] Idem pag. 5 e tom. 2 pag. 379 an. 1773.

Nel secolo passato questa esperienza diede luogo ad una polemica alquanto viva. Bertier, monaco francese, concluse dai suoi sperimenti, fatti nella chiesa dei Padri dell'Oratorio a Parigi, che il peso aumenta coll'altezza; la sospensione aveva la lunghezza di 75 piedi parigini (= m. 24) [1]. Perrier contrastò l'esattezza dei medesimi però senza farne altri. David [2] sperimentò nel medesimo senso a Rouen ed alla torre di Saint Ouen, la quale era alta 170 piedi, e finalmente Dolomieu [3] nel pozzo di una miniera a Montnelay, che aveva la profondità di 95 tese (circa met. 190). Ma tutte queste esperienze non hanno valore scientifico, perchè in quell' epoca le bilancie non avevano ancora la precisione necessaria e i risultati ottenuti erano dubbî ed anzi in maggior parte contrari al vero.

Il primo che eseguì l' esperienza con successo e grande precisione, è senza dubbio il sig. Jolly a Monaco; l'altezza del suo apparecchio era di met. 5 circa e il peso adoperato un chilogrammo [4].

§ 2.

Tornando dopo questa digressione cronologica sull'argomento, faccio notare che si può raddoppiare il risultato delle esperienze in discorso, disponendo le cose nel seguente modo: si pone A a destra in alto, a a destra in basso, B a sinistra in basso, b a sinistra in alto e si fa la tara; chiamiamo questa disposizione dei pesi la *prima*. Ciò fatto invertiamo i pesi A e a al pari di B e b; questa posizione dei pesi chiameremo la *seconda*. Volendo nel caso presente modificare la formula data di sopra per l'aumento di peso chiamiamo Q il peso di ciascun dei corpi A e B quando essi si trovano sul piatto superiore, Q_1 il peso di a e b pur esso riferito al piatto superiore. Ora passando dalla prima posizione alla seconda, è chiaro che i due pesi della sospensione superiore, portati in basso aumenteranno ambedue nel rapporto di $1 : 1 + \frac{2h}{R}$. Mentre questi pesi si trovavano di sopra, produssero alla bilancia la forza $Q - Q_1$ quindi portandoli in basso producono invece $(Q - Q_1)\left(1 + \frac{2h}{R}\right)$. Il braccio di destra della bilancia accuserà quindi un aumento di peso espresso di $(Q - Q_1) \cdot \frac{2h}{R}$ e questo viene raddoppiato per i due pesi che si devono trasportare dal basso in alto. L'aumento totale di peso indicato dal braccio destro sarà quindi

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p = 4\,(Q - Q_1)\,\frac{h}{R}$$

Tale sarebbe il risultato dell'esperienza in proposito, però non si deve perdere di vista, che il ragionamento, su cui esso si appoggia, non tiene alcun conto della sinuosità e della eterogeneità della superficie terrestre come anche della massa del fabbricato, in cui sono state eseguite le esperienze. Lo schiacciamento della Terra pure

[1] Idem tom. 2 pag. 251 an. 1773.

[2] Idem tom. 5 pag. 135 an. 1775.

[3] Idem tom. 6 pag. 1 an. 1775.

[4] *Annalen der Physik und Chemie von Wiedemann*, anno 1878 vol. 5 p. 112. — Nuovo Cimento vol. 5 pag. 67.

modificherebbe la formula teorica stabilita, certo è però che questa divergenza è pel nostro caso praticamente insensibile.

Venendo ora alla parte pratica della esperienza, osservo che la bilancia da me adoperata, esistente da molti anni nel Gabinetto, è di squisita costruzione; fornita dal signor Scateni di Urbino, ha un giogo di acciaio della lunghezza di cent. 70 ed è forte abbastanza per portare un chilogrammo e mezzo per parte. Egli è vero che i gioghi d'acciaio vengono facilmente influenzati dal magnetismo terrestre, il che porta un piccolo errore nella pesata, e pare che Studer ([1]) si avvide pel primo di questo fatto che si fa sentire principalmente nelle bilancie piccole. Però dovendosi in ogni ricerca esatta fare uso della doppia pesata o di altro simile metodo, è chiaro che questa causa di errore allora non è da temersi, salvo nel caso, ove accadessero dei cambiamenti straordinari del magnetismo terrestre. L'acciaio presenta una resistenza assai maggiore dell'ottone e sotto questo punto di vista si presta meglio per le bilancie, che non l'ottone, potendosi il giogo costruire meno pesante, il che aumenta di molto la sua sensibilità; anche la minore dilatazione termica dell'acciaio è favorevole alla sua applicazione. Questa bilancia si trova collocata assai solidamente nel primo piano dell'Istituto fisico a metri 3,80 sul suo pavimento. La sospensione traversa quest'ultimo e giunge quasi sino al pavimento del piano terreno; la sua lunghezza fra i due piatti è di metri 9,307. Sarà inutile dire, che la bilancia stessa ha la solita custodia di vetro per impedire le correnti di aria e per diminuire i cangiamenti di temperatura; questa custodia poi è rinchiusa in una seconda cassa di cartone, coperta di stagnuola onde diminuire ancora maggiormente l'effetto della irradiazione. Anche i due fili di sospensione sono per la medesima ragione circondati da una custodia, che consiste in una cassa di legno dappertutto diligentemente chiusa, meno alla parte inferiore, ove si trova uno sportello che si apre per introdurre i pesi nei piatti inferiori.

I quattro pesi A, B, a, b sono, come fa d'uopo, del medesimo volume; essi hanno la forma di un cilindro equilatero senza alcuna sporgenza, del diametro di cent. 5,5, il rispettivo volume è quindi di cent. cub. 130 circa. I medesimi sono lavorati di ottone, A e B sono riempiti di piombo, a e b sono vuoti e saldati ermeticamente, perchè potendosi introdurre l'aria in essi, il vantaggio che arrecano sarebbe illusorio. La quantità $Q - Q_1$ corrispondente alla differenza di un peso pieno, meno il peso vuoto è nel nostro caso di grammi 1345,450; introducendo questo valore al pari di R e h nella formula (1) si ottiene

$$p = \text{milligr. } 7{,}867$$

Il piatto inferiore dista pochi centimetri dal pavimento del pianterreno e l'altezza di quest'ultimo sul pelo del mare è di metri 51,5. Rigorosamente parlando dovrebbesi questa altezza aggiungere al raggio terrestre R, il che è stato ommesso per essere troppo piccola la relativa correzione.

§ 3.

Quanto spetta al modo di osservare l'equilibrio della bilancia, si sarebbe potuto applicare al giogo uno specchio, che si osserva da lontano mediante un cannocchiale

( ) Gilbert, *Annalen der Physik* anno 1803 vol. 13 pag. 125.

e scala similmente, come si usa pei magnetometri. Ma per non incontrare maggior spesa mi sono contentato di osservare con un indice, il quale però a differenze di altre bilancie non si trova ad angolo retto col giogo, bensì forma il prolungamento del medesimo, vale a dire l'indice è orizzontale invece di verticale. Questa disposizione, del resto non nuova, esclude una causa di errore, che nasce dalla eccentricità dell'indice; difatti se il meccanismo per innalzare e abbassare il giogo non è costruito colla massima precisione accade facilmente, che il fulcro si trovi nelle diverse pesate non precisamente sul medesimo posto, dando così luogo a un piccolo errore. Alla lieve dissimmetria del giogo, che viene prodotta da questa disposizione, si potrebbe, se fosse necessario, facilmente rimediare, applicando un uguale indice anche all'estremo opposto del giogo.

L'indice ha nel caso nostro la lunghezza di cent. 47,5; dietro di esso si trova una scala millimetrica con uno specchio per evitare la parallalasse. Un millimetro della scala corrisponde a una inclinazione di circa 7′ del giogo, colla lente si stima ancora il decimo del millimetro. Per non perdere troppo tempo, si osservavano le oscillazioni dell'indice e se ne deduceva la posizione di equilibrio. E ciò era necessario, per impedire una disuguaglianza di temperatura nelle due braccia della bilancia; cosa che avviene facilmente quando l' osservazione si prolunghi troppo. Soltanto nel caso di un locale a temperatura perfettamente costante si potrebbe osservare la bilancia in istato di quiete. Per fare le pesate si è proceduto nel seguente modo: Si portavano i quattro pesi nella posizione, che fu di sopra chiamata la prima, e si fissava la divisione dell'indice corrispondente all'equilibrio. Poscia invertendo i pesi in ciascuna sospensione si formava la seconda posizione e si determinava nuovamente la posizione dell'equilibrio. Per ultimo si tornava di nuovo a fissare il punto di equilibrio corrispondente alla prima posizione, onde accertarsi che durante l' esperienza la posizione primitiva dell'equilibrio non aveva cambiato troppo. Se si verificasse un cambiamento molto grande, la esperienza sarebbe da rigettare; nel caso contrario si può ritenere che la media di queste due posizioni sia la vera posizione corrispondente alla disposizione prima dei pesi.

Conoscendo così il numero dei millimetri pel quale si è spostato l'indice per l'effetto della inversione dei pesi, altro non occorre più che determinare il valore del millimetro in peso, lo che si ottiene assai facilmente.

§ 4.

Fra le cause di errore, di cui è affetta questa esperienza, primeggia senza dubbio la temperatura e convengo che sotto questo punto di vista le esperienze da me fatte, lasciano a desiderare. Esiste nel nostro Istituto una camera a temperatura, se non costante, almeno pochissimo variabile, ma essendo questa sotterranea, non si presta alla nostra esperienza per le condizioni locali, le quali richiedono un ambiente di altezza considerevole. La temperatura si fa sentire in diversi modi. In primo luogo subisce la sua influenza il giogo della bilancia, il quale per un diverso riscaldamento nelle sue varie parti, si potrebbe dilatare disugualmente producendo così una piccola variazione del rapporto delle due braccia. Questo effetto non è così piccolo, quanto potrebbe sembrare al primo aspetto. Abbiasi ad esempio

un giogo di acciaio, il quale possiede inizialmente dappertutto la medesima temperatura in guisa che le due braccia siano perfettamente uguali. Questa bilancia subisca poi un piccolo riscaldamento, il quale faccia variare la sua temperatura uniformemente da un estremo all'altro per un decimo di grado ($=t$), conservando uno degli estremi la sua temperatura primitiva. Chiamando α il coefficiente di dilatazione dell'acciaio ($=0,000012$), il rapporto delle due braccia cambierà per questo riscaldamento dall'unità in $\left(1+\frac{\alpha t}{2}\right)=1,0000006$, vale a dire pesando un corpo di un chilogrammo, la supposta variazione di temperatura produce un errore di 0,6 milligr. Un giogo di ottone darebbe in parità di condizione perfino un errore di 0,9 milligr. Questi errori sono relativamente molto grandi, e ognuno, pratico di questa specie di ricerche, dovrà convenire che l' indicato cambiamento di temperatura sia abbastanza piccolo e difficile ad evitare in pratica. La seconda influenza, che esercita il calore sulle pesate, si riferisce alla perdita dei pesi nell' aria. Ciascun peso ha nel caso nostro un volume di cent. cub. 130, e a questa corrisponde alla pressione atmosferica ordinaria la perdita di 169 mg. Un grado di aumento di temperatura produce quindi una diminuzione di spinta di $\frac{169}{273}=0,6$ mg. Ammettendo adunque per un caso particolare, che la differenza dei due pesi superiori e dell' aria circostante differisca per un grado, l'errore prodotto sulla pesata sarebbe di 0,6 mg. È da credersi che questo secondo errore prodotto dalla temperatura sia in generale di importanza minore, che non il primo dipendente dalla dilatazione del giogo.

Un ultimo effetto nocivo del calore potrebbe consistere nelle correnti di aria ascendenti e discendenti, che facilmente si formano in uno spazio così considerevole, come è la custodia della nostra bilancia. È però verosimile che queste correnti, quand'anche esse si producessero di fatti, non potrebbero avere un grande effetto sulla pesata, essendo i piatti superiori difesi dalla loro azione, atteso che la base della bilancia intercetta loro la strada per giungere fino ad essi. La formazione di queste correnti è poi ancora resa più difficile per due diaframmi orizzontali che suddividono la custodia in tre concamerazioni, le quali comunicano fra di loro solamente con due fori di pochi centimetri di diametro onde dare passaggio ai fili di sospensione.

§ 5.

Vengo ora ad esporre i risultati delle mie esperienze, le quali incominciarono sino dalla metà del mese di luglio passato. Dopo montato l'apparecchio mi sono innanzi tutto occupato di esaminare minutamente la sua sensibilità. Per tale fine, caricata la bilancia con i quattro pesi A, B, a, b come si deve praticare nella sperienza definitiva, ho trovato che a ogni milligrammo corrisponde in media poco più di $\frac{1}{3}$ di millimetro della scala; questa esperienza fu ripetuta con soprappesi di varie grandezze. In questo caso il peso totale $Q+Q_1$ posto in ciascuna sospensione è di circa grammi 1550 e a questo dovrebbesi aggiungere il peso della sospensione stessa, il quale è relativamente grande atteso che questa si compone di due piatti colle staffe e del lungo filo di sospensione. Per vedere se non fosse possibile di

aumentare la sensibilità della bilancia ho cercato di determinare numericamente la distanza del fulcro del giogo dal suo centro di gravità, come anche la distanza del fulcro medesimo dalla retta che congiunge i due punti di sospensione dei piatti. Questa determinazione è stata eseguita dai signori Brattina e Cancani sotto la mia direzione e ha dato per la prima distanza il valore di mill. 0,028 e per la seconda mill. 0,049 ; considerando la piccolezza di queste distanze non ho creduto per ora opportuno di tentare a diminuirle mediante le viti di registro [1].

Mi sono persuaso, durante queste esperienze preliminari quanto sia difficile di togliere del tutto l' influenza della temperatura principalmente della irradiazione. Che questa causa di errore si faccia assai facilmente sentire, non deve sorprendere; basta riflettere, quanto fu esposto di sopra intorno all'errore nelle pesate, che viene prodotto dalla variazione di un solo decimo di grado del giogo. Si potrebbe tentare di tener conto delle variazioni di temperatura, ma sarebbe da sperare che i termometri posti vicino al giogo della bilancia indichino di fatti le variazioni di quest'ultimo con sufficiente esattezza? Per tale ragione non ho continuato le misure nell'estate passata e non tengo conto dei risultati allora ottenuti, perchè essendo la temperatura alta, le sue variazioni nel nostro locale erano relativamente grandi, sebbene questo

[1] Il procedimento per misurare queste due distanze, il quale forma una delle esperienze della nostra scuola di fisica pratica, non trovo riportato in verun testo; quindi considerando che esso è di qualche importanza pratica, credo non del tutto inutile di esporlo qui con due parole. Supponiamo la bilancia a braccia uguali e di più che il giogo (vale a dire la congiungente dei due punti di sospensione dei piatti) abbia senza pesi e piatti attaccati una posizione orizzontale. Chiamando E il fulcro, F il centro di gravità del giogo e G il punto di mezzo della linea che congiunge i due punti di sospensione, è chiaro che nell' ipotesi fatta, questi tre punti si debbono trovare in una retta. Facciamo la distanza $EF = \lambda$ e l'altra $EG = l$, il peso del giogo $= M$ e la distanza dei due punti di sospensione $= 2c$, e supponiamo in un primo caso ciascuna sospensione caricata di un peso $\frac{N}{2}$ compreso il piatto. Ciò premesso poniamo in uno dei piatti un piccolo soprappeso n ed osserviamo l' angolo α del quale s' inclina il giogo. Per una considerazione molto elementare troviamo per questo caso la seguente equazione di equilibrio.

$$(M\lambda + Nl) \operatorname{sen} \alpha = (c \cos \alpha - l \operatorname{sen} \alpha)\, n$$

ovvero

$$M\lambda + (N + n)\, l = c\, n \cot \alpha$$

nella quale equazione tutto è cognito salvo λ e l. Per un secondo caso avremo parimenti

$$M\lambda + (N_1 + n_1)\, l = c\, n_1 \cot \alpha_1$$

e da queste due equazioni ricaviamo

$$(2) \qquad l = \frac{n \cot \alpha - n_1 \cot \alpha_1}{N + n - (N_1 + n_1)}\, c$$

$$\lambda = \frac{n \cot \alpha\, (N_1 + n_1) - n_1 \cot \alpha_1\, (N + n)}{M\, (N_1 + n_1 - (N + n))}\, c\,.$$

Si vede quindi, che caricando la bilancia successivamente con due pesi in modo di formare equilibrio e osservando dopo in ciascun caso l' inclinazione prodotta da un dato soprappeso si possono calcolare le due distanze l e λ.

si trovi al lato settentrionale del fabbricato. Ecco pertanto i risultati ottenuti nelle misure eseguite negli ultimi mesi:

	A	B	C	D
29 settembre	2,15	3.15	6,77	0,000000270
30 »	2,19	3,17	6,94	276
1 ottobre	2,35	3,22	7,56	301
2 »	2,07	3,16	6,54	261
6 »	2,23	3,12	6,95	277
7 »	2,50	3,09	7,72	308
8 »	2,56	3,18	8,14	324
10 »	2,30	3,16	7,27	290
16 novembre	2,23	2,90	6,47	258
17 »	2,52	2,94	7,41	296
Media			7,18	0,000000286

Rappresenta in questa tavola la colonna A il numero dei millimetri per i quali si è spostato l' indice della bilancia colla inversione dei pesi dal basso in alto e viceversa; B il numero dei milligrammi corrispondente ad un millimetro della scala, C il risultato della pesata propriamente detta, vale a dire il numero doppio dei milligrammi, per il quale diminuisce il peso di grammi 1345, 450 innalzato all'altezza del nostro apparecchio, cioè a metri 9,307 e finalmente D la diminuzione che subisce l' unità di peso per un metro di altezza.

Sembra che la bilancia abbia nel lungo intervallo fra la settima ed ottava esperienza subìta qualche piccola modificazione nella sua sensibilità, perchè il valore medio della colonna B che prima era di 3,16, trovasi ridotto dopo a 2,92; e di fatti ha la bilancia in questo frattempo servito ad altro uso.

Circa l'esattezza dei pesi adoperati in queste misure devo dire di aver avuto, per la gentilezza dei sig. professori Cannizzaro e Pisati, la fortuna, di poterli confrontare coi pesi normali e di fare così le piccole correzioni necessarie; da questo lato non è quindi da temere verun errore. Certamente non voglio dare ai risultati da me ottenuti un valore maggiore di quanto meritino, e considero i medesimi come valori provvisori. Mi propongo di studiare questo interessante argomento nell'avvenire con sviluppo ancora maggiore e arriverò forse cosi ad ottenere valori che si accordano ancora maggiormente fra di loro.

Del resto è da osservare che la maggiore differenza che s'incontra fra i singoli valori della pesata rappresentata dalla colonna C ammonta a un solo milligrammo e sei decimi. Se si riflette che nella pesata ogni sospensione della bilancia è caricata di circa due chilogrammi, e considerando quanto fu esposto sulle cause di errori cagionati dalla temperatura, alla quale si deve ancora aggiungere, che lo sperimentatore si trova in vicinanza immediata della bilancia, si dovrà convenire che la divergenza in discorso non è cosa esagerata.

Se si confrontano i trovati valori della pesata con quello = 7,867 calcolato di

sopra nell' ipotesi della legge delle distanze del centro della terra, si vede che tutti sono inferiori ad esso, tranne uno solo , il settimo, che lo supera di milligr. 0,27. il valore medio osservato = 7,18 risulta di circa milligr. 0,69 inferiore al calcolato. Il vedere che tutti questi valori salvo uno si scostano dal calcolato nel medesimo senso, unitamente al fatto che tutti gli altri valori trovati nell' estate passata, nessuno escluso, seguono anch' essi lo stesso andamento, mentre le misure stesse sono fatte in condizioni differenti e variate in diversi modi, mi fa presumere essere probabile, che la differenza in discorso di milligr. 0,69 non si debba semplicemente attribuire a errori di osservazione e che essa abbia almeno in parte, una base reale. Essa rappresenterebbe così l'attrazione proveniente dalle sinuosità della superficie terrestre, della massa del fabbricato ecc. Guidando per i due piatti, uno inferiore l'altro superiore della bilancia, dei piani orizzontali indefiniti, è chiaro che tutta la massa del fabbricato in cui furono fatte le esperienze e dei fabbricati vicini, compresa fra questi due piani, deve diminuire il peso contenuto nel piatto inferiore ed aumentare quello del superiore. Questa duplice azione fa sì che la gravità diminuisce meno rapidamente di quanto esige la legge delle distanze dal centro della terra, appunto come viene indicata dalla differenza da me ottenuta. Non voglio però negare che le attrazioni di altre masse perturbatrici non comprese fra gli indicati due piani potrebbero avere un' influenza contraria. Voler formulare l'azione del fabbricato dalle sue dimensioni e massa sarebbe un lavoro oltremodo grande, atteso la sua forma complicata; riporterò però in appresso un calcolo simile eseguito per un caso più semplice, per dare almeno un' idea della grandezza delle attrazioni che potrebbero venire in considerazione.

Il sig. Jolly a Monaco (Annalen di Wiedemann citati, pag. 133) è giunto a un risultato analogo; egli trovò dalle sue pesate il valore di milligr. 1,510 mentre la legge della distanza del centro della terra considerata sferica assegnava invece milligr. 1,662; adunque anche qui dava la pesata un valore inferiore al calcolato.

§ 6.

Il Jolly, per chiarire meglio questo argomento, si propone di fare l'esperienza in una torre isolata posta in una pianura e distante da altri fabbricati. Supponendo che eseguita l' esperienza si trovasse di fatto una differenza sicura fra il risultato ottenuto e quello calcolato colla sola legge della distanza dal centro della terra, si presenta facilmente l' idea di formulare l'attrazione della torre sulle due stazioni inferiore e superiore e si avrebbe così in ultima analisi un mezzo per mettere a confronto la massa della torre, con quella della terra. Non voglio decidere se questa idea sia praticamente eseguibile, invece di ciò esporrò un caso pratico, per fare vedere almeno come si dovrebbe procedere nel calcolo, se si volesse eseguire l'esperienza in proposito.

Suppongo adunque che le pesate vengano fatte in una torre di forma quadrata e che la bilancia si trovi precisamente nel suo mezzo; come si vede, dipende la soluzione del problema in questo caso dall'attrazione che esercita un prisma quadrato retto sopra il centro di una delle sue basi. Ora nel mio scritto intitolato: *Sull'attrazione delle montagne con applicazioni numeriche* riporto a pag. 57 del primo

fascicolo la formula esprimente la componente dell'attrazione, che esercita un parallelepipedo rettangolare dei lati x, y, z sopra un vertice nella direzione dello spigolo x. Quadruplicando questo risultato e facendo poscia $y = z$ si ottiene l'azione di un parallelopipedo a base quadrata del lato $2y$ sopra il centro di una sua base. Scriviamo poi ancora $\frac{y}{2}$ in luogo di y, in modo che il lato della base diviene y e l'altezza $= x$. Pertanto avremo la seguente formula

$$(3)\ldots \quad X = 4y \log \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{4x^2+y^2}}{y+\sqrt{4x^2+2y^2}} + 4x\, arc\, tg \frac{y^2}{x\sqrt{8}.\sqrt{2x^2+y^2}}$$

la quale esprime l'attrazione che eserciterebbe la torre sopra il centro della sua base, supposto che essa fosse del tutto piena di materiale della densità $= 1$. Ammettendo, che il vano interno della torre sia pur esso di forma quadrata, al quale diamo il lato y_1 in modo che i muri hanno la grossezza $y - y_1$ si trova la vera attrazione della torre cangiando nel secondo membro della precedente formula y in y_1 e sottraendo l'espressione ottenuta dalla primitiva. Tale operazione ci dà la seguente formula, nella quale introduciamo per l'altezza della torre il simbolo h invece del x e di più mettiamo in evidenza la densità q del materiale del quale è costruita la torre.

$$(4)\ldots X = 4q \left[(y-y_1)\log(1+\sqrt{2}) + y \log \frac{\sqrt{4h^2+y^2}}{y+\sqrt{4h^2+2y^2}} - y_1 \log \frac{\sqrt{4h^2+y_1^2}}{y_1+\sqrt{4h^2+2y_1^2}} + h\left(arc\, tg \frac{y^2}{2h\sqrt{4h^2+2y^2}} - arc\, tg \frac{y_1^2}{2h\sqrt{4h^2+2y_1^2}} \right) \right].$$

Trovata così l'attrazione della torre, chiamiamo P l'attrazione della Terra, sopra un punto materiale posto alla prima stazione, vale a dire alla base della torre, K l'attrazione totale che subisce questo punto e K_1 l'attrazione totale che subisce un punto materiale posto alla seconda stazione, cioè alla sommità della torre ed avremo:

$$K = P - X$$

$$K_1 = P\left(1 - \frac{2h}{R}\right) + X$$

e sottraendo

$$K - K_1 = 2\left(\frac{Ph}{R} - X\right)$$

e anche

$$\frac{K-K_1}{K} = \frac{2\left(P\frac{h}{R} - X\right)}{P-X}$$

ovvero senza errore sensibile

$$\frac{K-K_1}{K} = 2\left(\frac{h}{R} - \frac{X}{P}\right).$$

Volendo questa formula tradurre in numeri, stabiliamo per l'unità lineare l'ettometro e per quello della forza l'azione reciproca di due punti materiali, aventi ciascuno l'unità di massa e posti nella distanza $= 1$ uno dall'altro. Ammesse queste

unità si ha per Roma il valore di $P = 1471612$ (') e per avere X in queste unità basta esprimere le dimensioni della torre in frazione dell'ettometro. Avremo così la seguente formula

$$(5) \qquad \frac{K - K_1}{K} = 2\left(\frac{h}{63667} - \frac{X}{1471612}\right)$$

Per applicare questo ragionamento a un caso concreto, supponiamo che la torre abbia l'altezza di metri 50, la larghezza di metri 5, colla grossezza di muri supposta uniforme di un metro, ammettiamo di più che la densità dei muri sia $= 2{,}5$. Abbiamo adunque in questo caso $h = 0{,}5$, $y = 0{,}05$, $y_1 = 0{,}03$, $q = 2{,}5$; sostituendo questi valori nella (4) troviamo

$$X = 0{,}16826$$

e questo valore introdotto nella (5) ci fornisce

$$\frac{K - K_1}{K} = 0{,}00001570 - 0{,}00000023 = 0{,}00001547.$$

Questo risultato si deve intendere nel seguente modo: Pesando un corpo di un chilogrammo prima alla base della torre in discorso e poi alla sua sommità, si troverà quest'ultimo un peso minore del primo, e se la torre non avesse veruna massa, la differenza delle due pesate ammonterebbe a mill. 15,70. Ma la massa della torre agisce in senso contrario e diminuisce questa differenza per mill. 0,23; in guisa che la differenza delle pesate riesce soltanto mill. 15,47.

Se si facessero le pesate nel modo di invertire ambedue i pesi, come fu da me praticato, la forza attrattiva della torre si farebbe sentire due volte e diverrebbe così mill. 0,46 per ogni chilogrammo posto in ciascuna sospensione della bilancia. Supponendo finalmente che la torre non avesse verun vano nel suo interno (meno due stretti fori per dar passaggio ai due fili di sospensione) in guisa da rappresentare una colonna quadrata di 50 metri di altezza e di 5 metri di lato, si otterrebbe la sua attrazione facendo nella (4) $y_1 = 0$ e si trova allora $X = 0{,}428$ invece di 0,168, vale a dire in questo caso sarebbero i risultati a un di presso due volte e mezzo più grandi di quelli del caso considerato precedentemente e il massimo peso, che si potrebbe ottenere dall'attrazione di questa colonna, sarebbe circa mill. 1,2 per ogni chilogrammo posto nel piatto della bilancia.

Dall'insieme delle cose ora esposte emerge, che l'attrazione dei fabbricati potrebbe essere veramente sensibile, quando si facessero le pesate con bilancie di somma precisione, però non è da credersi che con questo mezzo si possa giungere a una buona determinazione della densità media del globo terrestre. Per tale scopo occorrono delle masse attraenti più grandi ovvero anche di maggiore densità. Si potrebbe anche servirsi di una sfera metallica quale massa attraente, determinando il peso di un corpo mediante la bilancia agli estremi del diametro verticale di questa sfera. Potendosi il corpo da pesare considerare come un punto materiale, il quale si trova nelle due pesate in contatto colla superficie della sfera (il quale caso però in pratica non sarebbe rigorosamente eseguibile) si ha questa relazione rimarchevole, che cioè la diminuzione di peso del punto inferiore al superiore viene perfettamente

(') Opera citata fasc. 2° pag. 7.

controbilanciata dall'azione della sfera, quando la densità di quest' ultima è il doppio della densità media della terra; vale a dire si trova in questo caso pel peso del corpo il medesimo valore, sia che esso venga pesato al di sopra o al di sotto della sfera.

Per dimostrare questa verità, riteniamo tutti i simboli già introdotti e di più chiamiamo q_1 la densità media della terra e r il raggio della sfera. Pertanto è chiaro che l'azione della terra sul punto inferiore sarà $\frac{4}{3}\pi \mathrm{R} q_1$ e quella sul superiore $\frac{4}{3}\pi \mathrm{R} q_1 \left(1 - \frac{4r}{\mathrm{R}}\right) = \frac{4}{3}\pi \mathrm{R} q_1 - \frac{16}{3}\pi r q_1$. Inoltre sarà l'azione della sfera sopra ciascuno dei due punti espressa da $\frac{4}{3}\pi r q$, l'azione totale sul punto inferiore sarà quindi

$$\frac{4}{3}\pi \mathrm{R} q_1 - \frac{4}{3}\pi r q$$

e sul superiore

$$\frac{4}{3}\pi \mathrm{R} q_1 - \frac{16}{3}\pi r q_1 + \frac{4}{3}\pi r q\,.$$

La differenza di queste due azioni è

$$\frac{8}{3}\pi r\,(2q_1 - q)$$

la quale espressione sparisce per $q = 2q_1$ vale a dire pel caso, in cui la densità della sfera è doppia di quella della Terra, come fu enunciato di sopra.

Il metallo più opportuno per queste esperienze è il piombo; la sua densità uguaglia 11,3; ora ammettendo la densità media della Terra = 5,53, si vede che la condizione $q = 2q_1$ è per questo metallo prossimamente soddisfatta. Per il mercurio assume $2q_1 - q$ un valore negativo, vale a dire per questo metallo si troverebbe la pesata superiore più grande della inferiore.

Tornando sul caso della sfera di piombo e riflettendo che un metro di altezza diminuisce il peso dei corpi per circa 0,00000031, si deve concludere che l' azione esercitata da una sfera di piombo di un metro di raggio sopra un punto materiale posto alla sua superficie sia soltanto 0,00000015 circa del peso di questo punto. Ora se si considera, che la sfera di piombo in discorso pesa circa 59 quintali e che nelle pesate non si potrebbe andare sino al contatto, il che diminuisce ancora maggiormente l'effetto già per se molto piccolo, si dovrà convenire essere molto difficile di ottenere in questo modo risultati soddisfacenti per la densità media della Terra.

Il sig. Poynting ha realmente fatto alcune esperienze per determinare questa densità mediante la bilancia [1]. Egli anzichè pesare un corpo al di sopra e al di sotto della sfera attraente si limita alla sola prima di queste due pesate e poi allontanando la sfera attraente del tutto fa una seconda pesata. La differenza delle due pesate dà l'attrazione della sfera. Questo modo di operare presenta da un lato un vantaggio, perchè il giogo durante tutta la sperienza non viene mai toccato e si fa così una vera determinazione differenziale dell' azione della sfera; ma dall' altra parte si presenta qui una gravissima difficoltà, l'avvicinare e allontanare la sfera attraente,

(1) *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie von Wiedemann.* Vol. 3° pag. 559.

la quale dev'essere di un peso molto grande, produce un tremolio inevitabile nell'apparecchio, che è di grandissimo discapito della esattezza. La sfera attraente di una lega di piombo e antimonio aveva il peso di sole 340 libbre inglesi e il valore medio della densità della Terra trovato mediante undici misure era di 5,69; ma il fatto che i singoli valori oscillano fra 4,4 e 7,1 (!) non mi sembra ispirare molta fiducia nei risultati ottenuti dall'autore. Anche il suo dire, che il massimo errore nelle sue pesate era di milligr. 0,0224 ovvero $\frac{1}{20000000}$ del peso totale non credo poter accettare, che con qualche riserva; è molto facile di ingrandire le indicazioni della bilancia, in ispecie quando si adopera la lettura a specchio, ma ciò non implica punto, che queste indicazioni abbiano di fatti la precisione voluta.

§ 7.

Secondo il mio modo di vedere, il metodo della bilancia da me praticato per misurare l'intensità della gravità potrebbe con vantaggio sostituirsi a quello del pendolo, ma come bene si vede nel solo caso, ove i due punti o stazioni da compararsi si trovino sulla medesima verticale. Occupiamoci per un istante a fare un paragone di questi due metodi, principalmente in vista della grandezza delle indicazioni ottenute con ambedue i metodi e della facilità più o meno grande di osservarle. Abbiamo pel pendolo in generale la formula.

$$\frac{t_1}{t}=\sqrt{\frac{g}{g_1}}$$

ove rappresentano g e g_1 le gravità da compararsi e t e t_1 i rispettivi tempi di oscillazione del medesimo pendolo, che si fa successivamente oscillare nelle due stazioni. Supponendo che queste si trovino sulla stessa verticale e g nella distanza h al di sopra di g_1 sarà

$$g_1=g\left(1+\frac{2h}{R}\right)$$

ammesso sempre che la legge delle distanze sia applicabile. Combinando queste due equazioni otterremo

$$\frac{t_1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2h}{R}}}=1-\frac{h}{R}$$

e se si denota la diminuzione del tempo di oscillazione dalla stazione inferiore rapporto alla superiore con Δt, si avrà

$$\frac{\Delta t}{t}=\frac{h}{R}.$$

Posto qui per h il suo valore $= 9,^{m}307$ corrispondente al caso nostro, otterremo $\frac{\Delta t}{t}=0,00000146$.

Quando il pendolo adoperato batte i secondi alla stazione superiore, abbiamo per un giorno solare $t=86400$ e sarà

$$\Delta t=0,12$$

ovvero prossimamente un ottavo di una oscillazione. Il significato di questo risultato si deve enunciare nel seguente modo. Avendosi due pendoli che battono il secondo alla stazione superiore, e facendo uno di essi oscillare alla stazione inferiore, l'accelerazione che subisce quest'ultimo rapporto al superiore non sarebbe più grande che una sola oscillazione nel tempo di circa otto giorni.

Ora riflettendo che col nostro apparecchio si ottiene il rapporto della gravità di questi due punti mediante tre o quattro pesate, per le quali impiega un abile sperimentatore, comprese le riduzioni numeriche, non più di due o di tre ore di tempo; e di più, che il risultato di queste pesate è abbastanza sensibile, cioè di circa sette milligrammi, non può cader dubbio che il metodo della bilancia, quando è applicabile, sia preferibile a quello del pendolo. Per questa ragione, non esiterei un istante a proporre questo metodo per fare delle ricerche sulla massa della Terra, misurando l'accrescimento della gravità in un profondo pozzo. Così ripetendo la celebre esperienza di Airy [1] fatta in un pozzo di una miniera di carbon fossile presso South Shields in Inghilterra di 381 metri di profondità, si giungerebbe forse a diminuire la divergenza piuttosto grande che esiste fra il valore trovato da questo fisico in confronto con quello del metodo di Cavendish. La grande profondità del pozzo è condizione essenziale alla buona riuscita della misura; ma essa non è la sola; è pure necessario che si possa determinare con precisione l'azione attrattiva del suolo e per tale fine occorre la perfetta cognizione delle condizioni topografiche e geologiche del terreno, nel luogo della esperienza stessa, come anche nei suoi dintorni. Sulla distanza alla quale si dovrebbero estendere queste ricerche intorno al pozzo quale centro, non è facile a decidere *a priori*.

Il caso più favorevole sarebbe quello di una collina omogenea, posta in una pianura e traforata da un pozzo che giunge sino al livello della pianura; le norme poi per formulare l'attrazione delle rocce formanti il suolo sulle due stazioni in alto e in basso, si trovano esposte in una mia Nota inserita nel Nuovo Cimento anno 1872 pag. 134.

[1] *Bibliothèque universelle de Genève* 1857, tomo 35 pag. 15.

Intorno alle leggi termiche della scintilla eccitatrice dei condensatori.

V. Memoria del Socio corrisp. EMILIO VILLARI

letta nella seduta del 6 marzo 1881.

(Con una tavola)

PARTE I.

Ho già fatto notare in alcuni precedenti miei scritti, che quando con un eccitatore si scarica una bottiglia di Leyda attraverso un filo metallico interrotto in un punto, si producono due scintille; una nell'interruzione del filo metallico congiuntivo, ed un' altra contro l'eccitatore. Ho altresì mostrato che queste scintille hanno proprietà affatto diverse, ed io per distinguerle ho denominato *scintilla congiuntiva* quella che si forma nell'arco o filo congiuntivo, e *scintilla scaricatrice* o *eccitatrice* quella che si produce contro l'eccitatore.

In due mie Memorie [1] ho già esposto ampiamente i resultati delle mie esperienze eseguite intorno alla scintilla congiuntiva; e più tardi in una brevissima Nota anticipata [2] trattai di qualch'una delle proprietà della scintilla eccitatrice. Poscia ho ripreso lo studio circa quest' ultima e qui in seguito esporrò i risultati di tali ulteriori ricerche.

Apparecchio. L' apparecchio del quale mi son servito in queste nuove esperienze è presso a poco simile a quello già da me adoperato altra volta e descritto nelle due Memorie citate. Esso è espresso nella figura 1 ed è formato essenzialmente da una batteria B di bottiglie e da uno dei miei termometri eccitatori T.

La batteria è composta di varie bottiglie, ben verniciate alla gommalacca; ed è sostenuta da un panchetto a piedi di vetro, ricoperti da grosso strato di gommalacca, i quali appoggiano su una grossa lastra di ebanite.

Il termometro eccitatore è formato da un eccitatore chiuso in un pallone di vetro. Questo ha due tubolature laterali, con le quali appoggia su due lastre di ebanite, così da poter girare intorno ad un asse orizzontale $d\ d'$. Le tubolature son chiuse ermeticamente da tappi di sughero, attraverso i quali penetrano nell'interno del pallone due asticelle di rame od elettrodi. Uno di essi, ripiegato internamente secondo la curvatura del pallone, è fisso e dista per circa un centimetro dalla sua parete. L'altro porta un braccio snodato e mobile; il quale può col girare del pallone piegarsi così da incontrare l' elettrodo fisso, od allontanarsene sino alla parete opposta del

[1] *Intorno alle leggi termiche* ecc. Atti dell'Acc. delle sc. di Bologna p. 147, Bologna 1879; e R. Acc. dei Lincei ser. 3ª, vol. IV. Mem. cl. sc. fis. p. 49, Roma 1879.

[2] Rendiconto dell'Acc. delle sc. di Bologna p. 143, Bologna 1878-79.

pallone. Esso pallone inoltre è ricoperto da grosso strato di gommalacca [1], porta un rubinetto *r* pel quale si riempie d'azoto secco, e comunica col cannello di vetro *c c* per mezzo di un tubo di gomma e dell'elettrodo *d* ampiamente forato per lo lungo. Le variazioni di pressione dell' azoto sono indicate dagli spostamenti di un lungo indice glicerico [2] contenuto nel cannello e misurate da una scala divisa in millimetri.

Questo termometro eccitatore s'unisce alla batteria per due dischi di rame *d* e *d'* amalgamati ed immersi nel mercurio di due bicchierini corrispondenti, non che per due fili di rame (grossi 5^m) *d' e'* e *de*, i quali solo al momento della scarica s' immergono nei bicchierini a mercurio *e* ed *e'*.

La batteria si carica con una macchina Holtz i cui elettrodi sono indicati in H; e l'elettricità impartita si misura con una bottiglia elettrometrica E, unita all' armatura esterna della batteria. Tale è in breve l'apparecchio adoperato e per maggiori particolari si guardino le due Memorie citate.

Esperienza. Per eseguire una misura si disponeva il termometro come è indicato nella figura, ed in maniera che i suoi elettrodi stessero alla massima distanza fra loro [3]: si allontanavano gli estremi dei fili *d e* e *d' e'* dai bicchierini *e* ed *e'*, si impartiva alla batteria una data carica misurata dalla bottiglia E, e poscia riunito il termometro alla batteria la si scaricava chiudendone il circuito col girare il pallone di 180°. Così operando la scintilla eccitatrice si produceva nel termometro e la corsa dell'indice misurava il calore svolto da quella.

Per potere da queste misure trarre delle conclusioni esatte è necessario che tutto il calore della scarica si svolga nel termometro; per lo che i varî fili congiuntivi furono fatti di rame grossi 5^m e corti, e le unioni di tutte le diverse parti del circuito, e dei conduttori delle bottiglie erano stabilite o con saldature o fra rame amalgamato e mercurio, per eliminare qualsiasi scintilla perturbatrice. Tutte le parti inoltre dovettero essere isolate il meglio possibile e non fu trascurata alcuna diligenza ad evitare gli errori.

Legge dei quadrati. Le mie prime indagini ebbero per iscopo di determinare la legge secondo la quale varia il calorico della scintilla eccitatrice al variar delle cariche. E questa ricerca s'incontrò in un cumulo indescrivibile di difficoltà sperimentali, certo non prevedibili; per superare le quali ho dovuto eseguire un numero di ricerche quasi direi illimitate: e delle quali al certo non potrò mettere a parte il lettore. Ciò non pertanto, siccome questa legge o relazione forma parte principalissima del soggetto che qui discuto, così io tratterò la quistione con una certa estensione.

Già nella Nota pubblicai i risultati di diverse esperienze dai quali risultava con moltissima approssimazione che:

Il calorico totale svolto dalla scintilla eccitatrice unica è proporzionale al quadrato delle cariche del condensatore.

[1] Per ricoprire facilmente il vetro di gomma lacca solevo adoperare una mescolanza di resina lacca e di un po' di trementina di Venezia che ne agevola la fusione.

[2] Adoperavo per indice una miscela di tre parti di glicerina di Price ed una parte di acqua che formavano un liquido punto o poco evaporabile ed abbastanza scorrevole. Se si vuole accrescere la fluidità della mescolanza basta farla più acquosa.

[3] Detti elettrodi erano terminati da fili di platino lunghi circa 15^m, grossi 1^m ed incurvati l'uno verso l'altro.

Questa legge sebbene grandemente appoggiata dalla teoria e dalle analogie, pure per la sua speciale importanza credetti indispensabile di provare e confermare con nuovi studî. Ed eseguii perciò una lunga serie di ricerche, nelle quali variai la natura ed ampiezza dei termometri e degli elettrodi, che feci di platino, di rame, d'alluminio e d'argento, ora terminati a punte ed ora in piccole palline. Variai altresì la natura delle bottiglie e delle vernici adoperate; ed ottenni come media finale di tutte queste nuove prove, che il calorico della scintilla cresceva come la potenza 1,86 ossia un' po meno del quadrato delle cariche che la produceva. Ed inoltre ebbi campo di fare due osservazioni assai importanti per questi studî.

Natura delle bottiglie. La prima riguarda la natura delle bottiglie che s'adoperano; e mi avvidi che non tutte sono abbastanza isolanti per potersene servire con profitto. Questa osservazione mi costrinse a fare delle ricerche intorno alla loro natura ed al metodo di saggiarle, del che tratterò più ampiamente in altra occasione: e qui mi limiterò solo a far rilevare come il trovare delle bottiglie di un buon vetro isolante sia molto più difficile che per avventura non paia. Infatti feci fabbricare apposta in Firenze, con la cortese cooperazione del prof. Bartoli, delle bottiglie di vetro bianco, bellissime; e dopo averle armate con stagnola e ben verniciate m'avvidi che esse, per la loro grande conducibilità non potevano caricarsi; nè riuscii a migliorarle coprendone il vetro con grosso strato di vernice di gomma lacca. Altre bottiglie ancora di vetro bianco fatte costruire in Ascoli Piceno, ed altri vasi di vetro verde che qui si trovano in commercio, trovai che pochissimo isolavano e male reggevano la carica. Nè molto migliori dei precedenti trovai essere due vasi di vetro verde bellissimi i quali mercè la cooperazione del prof. Bouty (a cui mi è grato qui di rendere per questo e per altre cose ancora, le più sentite azioni di grazie) il ben noto meccanico sig. Ducretet di Parigi mi fece appositamente fabbricare in vetro verde e molto siliceo: essendochè anche questi vasi, sebbene accuratamente verniciati, malamente reggevano le cariche elettriche. E solo fra tutte le bottiglie da me provate trovai veramente eccellenti alcune d'ignota provenienza, che da molto tempo avevo nel mio gabinetto. Ed altresì assai buone ho constatato essere alcune bottiglie di vetro verdastro e di rifusione che ho fatto fabbricare a Bologna; e con esse ho generalmente eseguito le mie ricerche. Dalle quali cose si scorge come difficile sia il trovare una qualità di vetro buono per bottiglie di Leyda.

Per ciò che riguarda le vernici scorrevoli da adoperarsi per coprire il vetro delle bottiglie, credo (sebbene non abbia eseguito misure) esser la migliore quella fatta di sola gomma lacca sciolta nell'alcool assoluto.

Scariche interne. La seconda osservazione fu che col crescere del potenziale delle cariche oltre la scarica ordinaria delle bottiglie, si produce nell'interno di esse un'altra scarica, che ho denominata *scarica interna*. Di questa ho fatto uno studio accurato, ed ho pubblicato i risultati ottenuti negli Atti dell'Accademia delle scienze di Bologna(¹); dai quali trascrivo qui le cose che interessano il soggetto di questo mio scritto:

1. Per la scarica interna si svolge del calore nelle bottiglie che è a detrimento di quello svolto dalla scintilla eccitatrice.

(¹) Villari, *Sulle scariche interne dei condensatori.* Atti ecc. p. 101 Bologna 1880.

2. La scarica interna è piccolissima o trascurabile per piccole cariche (circa una delle mie unità elettrometriche, per ciascuna delle bottiglie da me adoperate): e cresce poi rapidamente col crescere delle cariche istesse.

3. La scarica interna è maggiore (poste le altre cose eguali) se si eccita la scarica esterna fra due palline di 20 a 30^{m}, di quello che se si eccita fra una di esse ed una punta aguzza: ed il rapporto fra le due scariche interne è circa di 2: 1.

Dalle quali cose si comprende facilmente che sul calorico della scintilla eccitatrice ha grandissima influenza l' energia delle scariche interne: e che inoltre a determinare la legge con la quale detto calore si svolge bisogna adoperare sempre uno stesso eccitatore per produrre la scintilla eccitatrice da studiare.

Dopo le quali osservazioni ripresi da capo la ricerca della legge dei quadrati e con grande diligenza feci varie serie di nuove misure nei modi più sopra accennati; e nella tavola seguente sono riportati i valori medî di 4 a 6 misure eseguite per ciascuna carica della batteria formata da 18 bottiglie.

Tabella I. — 18 *Bottiglie. Termometro* A [1]: *elettrodi in filo platino.*

Numero d' ordine	Cariche Q	Calore C	Esponente K	Medie parziali di K	Medie generali di K
I	II	III	IV	V	VI
1	10	6	2,22		
2	12	9	2,19		
3	14	12,6	2,20	2,20	
4	16	16,9	2,94		
5	18	23,9	1,50	2,22	
6	20	28,0	3,26		2,22
7	22	38,2	1,75	2,56	
8	24	44,5	3,05		
9	26	56,8	1,14	1,93	
10	28	61,8	0,60		
11	30	64,4	1,13		
12	32	69,3	1,30		1,27
13	34	75,0	2,07		
14	36	84,4			
			med. 1,71		

Nella colonna II e III della tavola prec. sono riportate le cariche adoperate Q in unità elettrometriche, e le relative medie dei calori, misurate in millimetri sulla

(1) Questo pallone A con cui furono fatte le esperienze trascritte nella tavola precedente e nelle seguenti era di vetro di rifusione come quello delle bottiglie e perciò assai coibente. Il suo diametro era di circa 100 mm. ed aveva due tubolature di vetro lunghe circa 40 m. e di circa 30 m. di diametro, con le quali appoggiava sui sostegni laterali di ebanite.

scala del termometro e svolte dalle scintille delle varie cariche. Nella colonna IV sono trascritti i valori dell' esponente K; i quali sonosi facilmente ricavati dalla relazione:

$$\frac{C}{C'} = \frac{Q^k}{Q'^k}$$

ove C e C' indicano i calori svolti dalle scintille generate dalle cariche Q e Q'. Tai valori di K ho poi riuniti in varî gruppi, le medie dei quali sono inscritte nella colonna V. E codeste ultime medie sono abbastanza regolari; però si scorge che oltre la carica di 28 unità, corrispondenti ad 1,5 unità per ciascuna bottiglia, l'aumento di calore della scintilla è sensibilmente diminuito, e perciò i relativi valori di K sono sensibilmente inferiori alla media. Laonde arrestandoci alla carica 28 e prendendo la media dei soli primi 4 gruppi si trova K = 2, 22. Nella quale media ho incluso il 4º gruppo perchè formato da un valore piccolo e da uno grande di K ed egualmente lontani dalla media generale. Il valore medio generale di tutti gli esponenti trascritti nella tavola precedente sarebbe K = 1,71 e quello dei soli quattro ultimi valori darebbe K = 1,27.

Queste osservazioni mostrano con tutta certezza l' influenza grandissima che hanno le scariche interne su questi fenomeni; percui è necessario tener conto delle medesime quando si voglia ritrovare il valore esatto di K. Perciò per conoscere detto valore ho fatto in proposito molte altre misure analoghe, e qui riporto solo i risultati di alcune di esse.

Nelle tre tabelle seguenti sono le medie di esperienze eseguite con batterie di 9, 18 e 36 bottiglie.

Tabella II. — 9 *Bottiglie. Pallone* A.

Cariche Q	Calore C	Esponente K	Medie di K	
			parziali	Totale
I	II	III	IV	V
5	4,5	0,35		
6	4,8	2,81	1,78	
7	7,4	2,18		
8	9,9	0,66		
9	10,7	2,55	2,00	1,91
10	14,0	2,81		
11	18,3	2,68		
12	23,1	0,68	1,85	
13	24,4	2,19		
14	28,7	0,48		
15	29,6	1,54		
16	32,7	0,88		
18	41,5		1,14	
20	39,8	0,10		
24	40,5	1,86		
28	54,0			
		med. 1,88		

Tabella III. — 18 *Bottiglie. Pallone* A.

Cariche Q	Calore C	Esponente K	Medie di K parziali	Medie di K totale
I	II	III	IV	V
10	6.4			
		1,29		
12	8,1		1,76	
		2,22		
14	11,4			
		1,27		
16	13,2		2,40	2,05
		3,69		
18	20,4			
		1,30		
20	23,4			
		1,16	2,01	
22	26,2			
		3,56		
24	35,6			
		0,24		
26	36,3			
		1,14		
28	39,5		1,09	
		1,04		
32	45,4			
		0,95		
36	50,8			
		med. 1,71		

Tabella IV. — 34 *Bottiglie. Pallone* A.

Cariche Q	Calore C	Esponente K	Medie di K parziali	Medie di K totale
I	II	III	IV	V
20	14,8			
		1,09		
22	16,8			
		4,46	2,03	
24	24,2			
		0,55		
26	25,3			
		2.50		
28	30,5			
		1,27		
30	33,3		2,25	2,19
		2,20		
32	38,4			
		3,13		
36	55,5			
		1,30		
38	58,2			
		3,23		
40	68,7			
			2,30	
42	[62,0(?)]			
		2,36		
45	94,0			
47	70,4			
50	82,0			
53	72,0			
60	83,0			

Le tre tabelle precedenti sono disposte come la prima. Nella colonna II sono trascritti i calori medî prodotti dalla scintilla, ed essi crescono regolarmente colle cariche sino ad un certo limite, che corrisponde al manifestarsi delle energiche scariche

interne della batteria [1]: oltre il quale il detto calore cresce assai irregolarmente e qualche volta anche decresce con l'aumento delle cariche. Tali anomalie ed incertezze verificansi del pari nei valori dell'esponente K scritto nella III colonna. Questo limite non è determinabile in un modo assoluto, pure dall' apparire delle precedenti anomalie può dirsi approssimativamente che esso si manifesta per una carica corrispondente all'incirca ad 1,5 unità elettrometrica per ciascuna bottiglia.

E computando tutti questi valori attendibili di K, relativi alle deboli cariche avremo il seguente specchietto:

	Valori medî di K
	2, 02 [2]
	2, 08 [2]
	2, 22
	1, 91
	2, 05
	2, 19
media	2, 08

Dai quali dati risulta con grande approssimazione K eguale a 2 e perciò per queste condizioni sperimentali può dirsi, come già accennammo:

Che il calore svolto dalla scintilla eccitatrice unica cresce, fino ad un certo limite, *come i quadrati delle cariche*.

Oltre il detto limite però il calore cresce assai più lentamente.

Questa legge che è analoga a quella del riscaldamento dei fili metallici, che a sua volta è concorde con la teoria, pare debba essere una legge certa e generale. Tuttavia se noi ci facciamo ad osservare accuratamente i singoli valori di K in ciascuna delle tavole precedenti rileviamo che essi sono abbastanza oscillanti, anche nei limiti nei quali si verifica la legge dei quadrati: il che toglie al metodo precedente un completo rigore scientifico. E se riuniamo tutti i valori medî precedenti ed altri ancora da me ottenuti e presi nei limiti suindicati formeremo il seguente specchietto:

Tabella V.

Valori dei vari esponenti K
2.08
2,02
2.05
2,22
1.91
2.05
2.28
2.19
2,36
2,46
2.35
2,00
2.31
2.18
2,27
2.03
media 2,173

[1] Queste scariche interne energiche sono accusate da uno speciale rumore come di tonfo che s'ascolta assai distinto prodursi nelle bottiglie.

[2] Questi numeri sono quelli stessi riportati nella Nota anticipata più sopra ricordata.

Tutti questi valori, relativi a piccole cariche, danno per media di K un valore poco superiore a 2, ma se ben si considerano si trova che non sono fra loro perfettamente di accordo; percui mi rimaneva nell'animo sempre un certo dubbio sulla assoluta esattezza della legge.

E finalmente dopo molti tentativi e dopo un esame minuto dell' articolazione dell'elettrodo mobile del pallone mi venne fatto di osservare in essa delle erosioni prodotte da scintille che vi si generavano, le quali dovevano necessariamente assorbir parte dell'energia della scarica, senza produrre riscaldamento corrispondente del termometro nel momento della scarica istessa. Per evitare adunque questo inconveniente, che mi accorsi essere gravissimo, io fui costretto a modificare il mio termometro eccitatore; e lo costruii nel modo che dirò qui appresso.

PARTE II.

Nuovo termometro. Questo apparecchio è espresso dalla figura 2 ed è formato dal consueto pallone di vetro T sostenuto per le sue due tubolature da lastre di ebanite l ed l' che formano parte del suo sostegno in legno ls. Il pallone porta masticiato un rubinetto di bronzo n ben lavorato, il quale è fissato in una striscia di ebanite così da impedire al pallone di ruotare intorno al proprio asse ee'. Il rubinetto inoltre è unito con un tubo di gomma al cannello di vetro nc, e contiene l'indice del consueto liquido glicerico il quale trovasi nel bicchierino c. I due elettrodi e ed e' penetrano nel termometro attraverso tappi di sughero stretti e stuccati così nelle tubulature, con mestura di cera sego ed olio da tener l'aria. Questi elettrodi sono piegati come indica la figura, nelle articolazioni a ed a' ove sono saldati; e l' uno di essi, ea è fissato nella posizione espressa dalla figura e l'altro e', per mezzo di una bacchetta di vetro verniciata b, conficcata nella palla corrispondente e', può girare intorno al proprio asse in maniera d' allontanarsi od avvicinarsi col suo estremo a' all'altro fisso a. Il braccio ea di quest' ultimo è formato da un tubo di rame che si apre nel pallone, e porta saldato in e una palla di ottone di 30^{mm} di diametro che forma un rubinetto; il cui nucleo è lavorato in modo da completar la sfera, e può girarsi solo per mezzo di un cacciavite. Tal rubinetto serve a disseccare il pallone ed a riempirlo di gas; perciò vi si adatta a vite un porta-caoutchouc, quale si vede nella figura, e per esso si fa passare una corrente di azoto secco che gorgoglia nel bicchierino c. Finita l'operazione si aspira con una palla di gomma un po' di gas, così da sollevare l' indice in cn, si chiude il rubinetto, si toglie il porta-caoutchouc e vi si sostituisce una vite che chiude il foro corrispondente e completa la sfera e. In cotal modo il rubinetto non presenta sporgenze e le fughe dell'elettricità sono diminuite al possibile. L'altro elettrodo e' del pari è terminato da una sfera d'ottone eguale alla precedente, la quale come il rubinetto e porta un serrafilo con testa sferica come è indicato nella figura. Per essi serrafili si uniscono dei fili di rame al pallone, i quali al momento della scarica, si congiungono alla batteria con contatti a mercurio e poi, opportunamente movendo la bacchetta b, si chiude il circuito fra a ed a'. In tal guisa gli inconvenienti lamentati

nel primo termometro sono evitati ed i risultati sperimentali sono completamente regolari e concordi.

Questo termometro aveva gli elettrodi internamente terminati da fili di platino grossi 1[m] e lunghi 25[m], ampiamente saldati alle rispettive braccia di rame a ed a'.

Legge delle cariche. Con questo nuovo termometro io mi feci da capo a ripetere tutte le misure precedenti e per maggior sicurezza soleva per ciascun caso fare due serie di esperienze ; nella prima delle quali le cariche impartite successivamente crescevano e nella seconda invece decrescevano : per ogni carica le misure furono ripetute per lo meno 6 volte : e dei valori medî delle due serie prendevo la media finale corrispondente a dieci o più osservazioni per ciascuna delle varie cariche adoperate. Così le esperienze furono ripetute in varie circostanze ed i risultati ottenuti assai concordi sono registrati nelle varie tavole seguenti:

Tabella VI. — *Scintilla eccitatrice. Termometro n.* I (¹) *fisso.* 24 *Bottiglie.*

Cariche Q I	Calore C II	Medie di C III	Esponente K IV	Medie K_1 V
12	6	5,8		
14	12,5	10,7	3,976	
16	17,2	15,5	2,774	3,001
18	21,4	20,1	2,205	
20	29,1	27,7	3,048	
24	41,4	41.4	2,216	2,216
28	47,9	48,8	1,059	1,126
32	57,2	57,2	1,194	
40	62,9	62,9?	0,420	
32	57,2			
28	49,8			
24	41,5			
20	26,3			
18	18,9			
16	14,9			
14	8,9			
12	5,56			

Tabella VI bis

Cariche Q I	Calore C II	Medie di C III	Esponente K IV	Medie K_1 V
40	68,8			
32	64,4			
28	56,0			
24	45,1			
22	40.2			
20	32,4			
18	22.3			
16	15,9			
14	11,6			
12	6,4	6,4		
14	10,6	11,1	3,574	
16	16,2	16,1	2,784	3,155
18	21,8	22,1	2,688	
20	32,0	32,2	3,575	
22	38,1	39,2	2,065	2,065
24	41,9	43,5	1,198	
28	51,5	53.8	1,378	1,105
32	59,8	62,1	1,076	
40	78,6	73,7	0,768	

(¹) La grandezza di questo termometro e la natura del suo vetro erano quelle del termometro più sopra descritto.

Tabella VII. — *Scintilla eccitatrice. Termometro fisso. Elettrodi in fili.* 28 *Bottiglie.*

Cariche Q I	Calore medio C II	Esponente K III	Medie K_1 IV
12	3,3	4,396	
14	6.5	4,100	
16	11,0	3,071	3,753
18	15,8	3,444	
20	22.7	1,782	
22	26,9	2,627	2,220
24	33.8	0,79	
28	48,1	1,519	1,154
32	58,9		

Tabella VII bis 28 *Bottiglie.*

Cariche Q I	Calore medio C II	Esponente K III	Medie K_1 IV
12	3,2	3,273	
14	5.3	3,448	
16	8,4	3,703	3,480
18	13,0	3,608	
20	19,0	3,369	
22	26,2	2,042	2,042
24	31,3	1,572	
28	40,5	1,917	1,300
32	52,3	0,412	
36	54,9		

Tabella VIII.— *Scintilla eccitatrice unica. Termometro n.* I *fisso.* 34 *Bottiglie.*

Cariche Q I	Calore medio C II	Esponente K III	Medie K_1 IV
14	4,7	3,398	
16	7,4	3,285	
18	10,9	3,460	3,258
20	15,7	2,669	
22	20,2	3,480	
24	27,3	1,683	
28	35,4	1,780	2,314
32	44,9	0,998	
36	50,5	0,369	0,855
40	52,5	1,198	
50	68,8		

Tabella IX.—*Scintilla eccitatrice. Term. fisso elettrodi in fili di platino.* 18 *Bottiglie.*

Cariche Q I	Calore C II	Esponente K III	Medie di K K_1 IV
8	1,41	3,12	
10	2,34	3,10	
12	5,42	2,91	3,15
14	8,49	3,45	
16	13,46	2,65	
18	18,40	2,48	
20	23,84	1,52	2,18
24	31,39	1,91	
26	36,59	2,35	
28	43,55	0,53	
32	46,70	1,73	
36	57,26	0,79	1,04
40	62,25	0,89	
45	69,14	1,28	
50	79,10		

Nelle due tavole 6 e 6^{bis} sono trascritti per esteso i resultati delle due serie di misure a cariche crescenti e descrescenti; e quindi nelle colonne II sono indicate le medie di dette due serie le quali, come si vede, sono fra loro perfettamente di accordo. Nelle tabelle 7, 8 e 9 sono riportate, per brevità, solo le dette medie. Nelle colonne III sono indicati i valori dei varî esponenti K i quali sono assai regolari e non più saltuarî come quelli ottenuti con l'antico termometro: il che ci assicura della bontà ed esattezza dell'apparecchio e del metodo adoperato (¹).

Relativamente al valore dell'esponente K riferito nelle tabelle precedenti può dirsi che esso in tutte segue con grande regolarità la medesima legge; e cioè esso è massimo per le piccolissime cariche; quindi va lentamente ed uniformemente declinando così che diventa minimo per le cariche eccessive. Laonde potremo dire in tesi generale:

Che il calore svolto dalla scintilla eccitatrice unica cresce con una potenza che va di continuo diminuendo con l'aumentare delle cariche.

Poscia feci delle misure con un termometro simile al precedente, i cui elettrodi però erano terminati non da fili di platino ma da palline di rame grosse 12^m, 7. Dette misure furono eseguite alla solita maniera ed in doppia serie, e dettero dei risultati che alcune volte concordarono coi precedenti ed altre volte se ne scostarono così, che io pel momento non oserei trarne alcuna conclusione definitiva. Percui limitandoci per ora alla scintilla scattante tra fili di platino, e considerando più sottilmente i diversi valori di K riportati nelle precedenti tabelle noi scorgiamo

(¹) A viemeglio far risaltare la concordanza dei numeri delle precedenti tabelle credo utile di riportare qui di seguito i risultati di alcuna delle esperienze di Riess relativi alla legge del riscaldamento dei fili percorsi dalle scariche (Riess *Reibungselektricität* B. I. s. 339, Berlin 1853) insieme ai corrispondenti valori di K calcolati come nelle mie esperienze.

Tabella X. — *Calcoli d'alcune esperienze del Riess relative alla legge dei quadrati.*

Numero di Bottiglie = S	2		3		4	
Quantità di elettricità *Q*	Calore *C*	Esponente *K*	Calore *C*	Esponente *K*	Calore *C*	Esponente *K*
2	1.5	2,597				
3	4,3	1,542	3,0	1,409	2,0	1,634
4	6,7	1,47C	4,5	1,980	3,2	2,176
5	9,3	2,003	7,0	1,789	5,2	1,861
6	13,4		9,7	2,828	7,3	2,660
7	media 1,903		15,0	1,154	11,0	1,859
8			17,5		14,1	1,978
9			media 1,832		17,8	
					media 2,028	

Dai precedenti dati rilevasi che il valore dell'esponente K è abbastanza oscillante pei numeri citati; così troviamo che esso, pur dovendo essere costante ed eguale a 2, variò da 2,597 ad 1,47 per le misure eseguite con due bottiglie; variò da 2,829 ad 1,154 per quelle eseguite con tre bottiglie; e finalmente da 1,633 a 2,66 quando si adoperarono quattro bottiglie. Questi valori mostrano chiaramente le grandi difficoltà che s' incontrano in eseguire simili misure.

facilmente come essi possono per ciascuna di esse dividersi (sebbene un po' arbitrariamente) in tre gruppi separati e distinti. Dei quali gruppi prese le medie si hanno i valori indicati nelle colonne K_1 delle tabelle istesse. E detti valori di ciascuno dei tre gruppi sono fra loro (nelle varie tavole) abbastanza concordi così che si possono insieme riunire come indica il seguente prospetto.

TABELLA XI.

Valori degli esponenti K_1 per cariche		
piccole	medie	grandi
I	II	III
3,001	2,216	1,126
3,155	2,065	1,105
3,753	2,220	1.154
3.480	2,042	1.300
3,258	2,314	0,855
3,150	2,180	1,040
med. 3,298	2,173	1,097

Delle tre serie dei valori precedenti di K_1 sono indicate le medie nell'ultimo rigo dello specchietto e da esse si scorge, come si disse, che detto valore va declinando con l'aumentare delle cariche; e visto l'accordo di tutti i molti valori riferiti, noi possiamo meglio precisare il fenomeno e quindi dire, che il calorico prodotto dalla scintilla eccitatrice unica:

1° *Cresce un po' più rapidamente dei cubi delle cariche di piccolo potenziale.*

2° *Cresce presso a poco come i quadrati delle cariche di medio potenziale.*

3° *Cresce presso a poco proporzionalmente alle cariche di eccessivo potenziale.*

L'ultima conclusione, relativa alle cariche eccessive, mi spinse a sperimentare con cariche ancora più elevate, affine di determinare se il valore di K seguitava sempre a decrescere. Perciò operando con 28 bottiglie, non molto eguali fra loro, e con le norme consuete ottenni come medie di 5 o 6 misure per ciascun caso i valori seguenti:

TABELLA XII. — *Termometro eccitatore unico n. I fisso. 28 Bottiglie. Elettrodi fili platino: Elettrodo mobile.*

Cariche Q I	Calore C II	Rapporti $C:Q$ III	Media di $C:Q$ IV
24	29,7	1,238	
28	36,8	1,314	
32	44,3	1,384	
40	56,2	1,405	1,321
50	62,3	1,246	
60	81,0	1.350	
70	85,0	1,214	
80	113,0	1,414	
90	154,0	1,711	
100	oltre 220 [1]		

[1] L'Indice del termometro uscì fuori del cannello termometrico, e le esperienze non si poterono continuare.

Nella tabella qui sopra oltre le cariche ed i calori (colonne I e II) sono riportati invece dei valori di K i rapporti C: Q fra calore e cariche (colonna III) e si scorge che essi sono presso a poco costanti fra i limiti di 28 ed 80 cariche: laonde in detti limiti il calore cresce presso a poco proporzionalmente alle cariche come già s'era enunciato.

Gli ultimi due risultati relativi a 90 e 100 cariche (3 a 4 cariche per bottiglia) mostrano che il calore cresce più rapidamente delle cariche: ma in questi casi di cariche straordinarie i risultati delle misure sono assai irregolari, e quindi dai due soli dati precedenti non può ricavarsi una conclusione del tutto sicura.

Questo singolarissimo modo tenuto dalle scintille nel produrre calorico, trova la sua ragione, io penso, nel fenomeno delle scariche interne, che completano la trasformazione dell' energia elettrica in termica per mezzo delle scintille: e l'interpretazione probabile può aversi con l'aiuto dei seguenti principî teorici.

Sappiamo *che la somma dei lavori meccanici, che possono esser prodotti dalla scarica di una bottiglia di Leyda, dipende dal quadrato della massa di elettricità ad essa comunicata.*

E pel caso di più condensatori riuniti in batteria, supponendo trascurabili le reciproche influenze e quelle dell'elettricità libera dei loro conduttori; e supponendo altresì che una scarica costante non produca altra azione oltre il calore ed il lavoro necessario alla produzione della scintilla, si ha la seguente legge:

La somma delle azioni termiche e del lavoro necessario alla formazione della scintilla, prodotta da una carica costante impartita ad una data batteria, deve essere costante, qualunque sia il conduttore percorso dalla scarica.

E tale legge applicata al caso delle scariche interne ed esterne, fatte le medesime restrizioni che sopra ed ammesso nullo il calore svolto nei fili congiuntivi, può esprimersi nei seguenti termini:

Una costante carica impartita ad un dato condensatore scaricandosi totalmente produce sempre, per mezzo delle scintille interne ed esterne, un effetto totale costante fra azioni termiche e lavoro necessario alla produzione di quelle.

E per la prima legge dovrà eziandio ammettersi: *Che l'effetto totale (lavoro e calore) della scarica distribuito fra le scintille interne ed esterne della batteria deve dipendere dal quadrato della massa elettrica ad essa batteria comunicata.*

Dalla quale ultima conclusione si deduce, che siccome per le deboli cariche (minori di mezza unità elettrometrica per bottiglia) il calore della scintilla eccitatrice cresce assai più rapidamente del quadrato delle cariche, così quello svolto dalla scarica interna deve crescere assai meno rapidamente del quadrato delle cariche istesse. Per le cariche d'intensità media (circa una unità per bottiglia) il calore della scintilla eccitatrice crescendo come i quadrati delle cariche, quello delle scariche interne dovrà del pari crescere come i medesimi quadrati. E finalmente per cariche maggiori detto calore interno deve crescere più dei quadrati delle cariche, essendochè quello esterno cresce assai meno degli stessi quadrati [1].

[1] In questa considerazione sono partito dall'idea, d'altronde probabile, che il calore svolto dalle scintille sia proporzionale al lavoro necessario alla loro produzione.

Solo quest'ultima deduzione ho potuto confermare con esperienze dirette misurando il calorico svolto dalle scariche interne. Perciò ho chiuso una bottiglia in una specie di termometro a gas; e quindi scaricandola con un eccitatore munito di palline, ed operando con tutte quelle diligenze indicate nella mia Memoria sulle scariche interne ho ottenuto quali medie di molte misure i seguenti risultati:

Tabella XIII. — *Bottiglie con armature di stagnola di eguali altezze.*

. . . . .	Cariche Q	Calore interno C	Esponenti K	Medie di K
I	II	III	IV	V
I Serie	2	0,00		
	3	0,45	4,18	
	4	1,50	3,80	3,99
	5	3,50		
II Serie	1	0,00		
	2	0,09	4,20	
	3	0,50	5,04	4,60
	4	2,13		
III Serie	3	0,40	6,30	6,30
	4	2,45		
IV Serie	4	1,20	3,20	3,29
	5	2,50		
			media	4,54

Questi numeri mostrano che per deboli cariche il calore dovuto alle scariche interne è piccolissimo ed insensibile al mio termometro. Però al crescere delle cariche l'effetto termico si appalesa, ed allora esso cresce rapidissimamente con l'aumento delle cariche, come risulta dagli elevati esponenti della colonna IV calcolati fra i calori interni e le cariche come si disse più sopra.

Nella V colonna sono riportate le medie di essi esponenti e nell'ultimo rigo la media di tutte, che dà $K = 4,54$. Dalla quale si rileva che per le cariche che variarono da 3 a 5 unità per bottiglia il calore delle scariche interne crebbe come la potenza 4,54 di dette cariche [1]. Questi risultati però, sebbene dimostrino in modo sicuro il crescere rapidissimo che fa il calore interno delle bottiglie per

[1] Un esame accurato dei valori di K mostra che fra le cariche 3 e 4 essi furono 4, 18; 5,04; 6, 3: dai quali si ha in media K=5,16: e fra le cariche 4 e 5 essi furono 3, 8; 3, 2 cioè in media K = 3, 5 cioè minore del precedente. Questo fatto non deve recar meraviglia, in primo luogo perchè riman sempre che con cariche elevate il calore interno cresce molto più dei quadrati delle cariche, come s'era detto; ed in secondo luogo bisogna considerare che quando si carica una bottiglia con 5 cariche, e spesso anche con sole 4, si producono sulle sue superficie di vetro delle vigorose scintille accompagnate da luce e da calorico le quali scaricano parzialmente le bottiglie, e quindi il calorico interno della scarica finale viene sensibilmente diminuito (V. mia Memoria citata).

cariche elevate, pure sono troppo pochi e si riferiscono ad esperienze eseguite in limiti troppo ristretti per poter dare una esatta misura del fenomeno. Perciò io mi propongo di ristudiare questo fenomeno, provocando la scarica esterna della bottiglia fra punte invece che per palline, giacchè queste arrecano, come si disse, delle gravi perturbazioni nella produzione del calorico della scintilla esterna, e delle interne, per conseguenza.

Dalle cose esposte potremo anche dire, come cosa molto probabile, che il calore svolto dalle scintille, nella scarica di un condensatore, si distribuisce fra l'interno e l'esterno di esso in un modo che può quasi dirsi oscillante. Così per elevati potenziali esso calore cresce nello interno del condensatore come la 4ª o 5ª potenza delle cariche; e nella scintilla eccitatrice in ragione delle semplici cariche: mentre che per piccolissimi potenziali detto calore cresce, nello esterno del condensatore, come la 3ª o 4ª potenza e nello interno deve ridursi a crescere sensibilmente meno dei quadrati delle cariche. Le scintille interne adunque pare abbiano grande analogia con le scintille eccitatrici esterne, e però possono considerarsi del pari come delle scintille eccitatrici *sui generis*.

PARTE III.

Il problema esaminato e discusso fin ad ora è complesso. Quando si impartiscono cariche diverse ad un dato condensatore, si modifica insieme la massa elettrica ed il suo potenziale, ed il calorico poi che vien prodotto dalla scintilla eccitatrice varia per coteste due quantità che insieme vi influiscono. Per istudiare il fenomeno nei suoi elementi ho pensato di misurare il calorico della scintilla, facendo separatamente variare la sola carica od il solo potenziale, e perciò due serie di ricerche.

Legge delle quantità. In queste esperienze variai le cariche ed in proporzione anche il numero di bottiglie, per cui il potenziale rimaneva sempre costante. Le diverse misure furono eseguite come di consueto: la scintilla eccitatrice si produceva nel pallone fisso fra elettrodi in fili di platino, ed i risultati medî di 5 o più misure per ciascun caso sono qui in seguito riferiti.

TABELLA XIV.

Cariche Q	N. Bottiglie N	Calore I Serie	Calore II Serie	Medie del Calore C	Rapporti $C:Q$
4	6	3,9	4.3	4,1	1,025
6	9	5,7	7,3	6,5	1,086
8	12	8.2	8,6	8,4	1,050
10	15	10,7	11,7	11,2	1,120
12	18	11,8	12,8	12,3	1,025
14	21	13,5	14,3	13,9	0,992
16	24	14,8	14,8	14,8	0,925

I risultati di cui è sopra furono ripetuti in doppia serie: nella I s'aumentarono e nella II si diminuirono insieme cariche e bottiglie. Nella penultima colonna sono

riportati i calori medî di entrambi le serie assai concordanti: e nell'ultima sono trascritti i rapporti C: Q fra calori e cariche. Da essi pare risulti che il calore cresca un po' meno rapidamente delle cariche: tuttavia il fatto non è sicuro, per l'ineguaglianza elettrica delle bottiglie, abbenchè costruite tutte eguali.

Ad eliminare quest'influenza perturbatrice divisi le 24 bottiglie in due batterie di 12 ciascuna che distinguo colle iniziali I ed E (interna, esterna) e con esse sperimentai adoperandole alternamente più volte di seguito, e le medie di molte misure sono le seguenti:

TABELLA XV.

Cariche Q I	N. Bottiglie N II	Calore III	Medie dei calori C IV	Rapporti V
		I Serie		
9	12 [E]	12,7	15,55	$\frac{26,50}{15,55} = 1,71$
18	24	27,0	26,50	
9	12 [I]	18,4		
18	24	26,0		
		II Serie		
7	12 [E]	7,3	8,55	$\frac{15,05}{8,55} = 1,77$
14	24	14,5	15,05	
7	12 [I]	9,8		
14	24	15,6		

Da questi risultati si vede in primo luogo che le due batterie non erano elettricamente eguali, per cui le incertezze della tabella 13; ed in secondo si rileva che il rapporto fra i calori dovuti alle cariche 1 e 2 è 1,71 per la prima serie ed 1,77 per la seconda; quindi il calore cresce un po' meno delle cariche.

Tuttavia dopo questi risultati abbastanza concordi fra loro pensai ancora di ripetere le misure, trattandosi d' una quistione molto importante pel seguito di questi miei studî: e rifeci moltissime volte le misure alternando le batterie e ripetendo le esperienze 5 o 6 volte per ciascun caso; ed inoltre mossi così la macchina elettrica da impiegar sempre 5 o 6″ per caricare tanto una sola quanto amendue le batterie con le rispettive cariche 1 e 2, ed i risultati di cosifatte misure sono i seguenti:

TABELLA XVI.

Cariche Q	N. Bottiglie N	Calore C	Rapporto fra i calori
8	12 [E]	7,8	
16	24	12,2	
8	12 [I]	11,8	
16	24	17,1	
8	12 [E]	7	
16	24	17,3	
8	12 [I]	11,8	
8	12 [E]	8,95	
8	12 [I]	11,7	
16	24	18,8	
	Medie generali		
8	12	9,86	$\frac{17.6}{9,86} = 1,77$
16	24	17,6	

Queste moltissime esperienze sono perfettamente concordi con le precedenti, mostrando che il rapporto medio fra i calori svolti dalle cariche 1 e 2 è eguale ad 1,77 come per la penultima serie (tabella 15). Il che ci assicura della bontà del metodo e del buon isolamento dell'apparato.

Pur nullameno, dopo tanta concordanza di risultati, non sapendomi dar ragione della mancata proporzionalità tra cariche e calore, e temendo che forse poteano attribuirsi ad influenza reciproca fra i varî condensatori caricati, volli ripetere le misure. E perciò riverniciate nuovamente tutte le bottiglie, fatto il meglio possibile eguali le due batterie, disposte a tre metri di distanza fra loro e congiunte con appropriati e grossi fili di rame saldati, ripetei le misure al modo consueto, avendo anche cura di sperimentare in ambiente a temperatura costante, affinchè l'indice del termometro rimanesse stazionario (¹), ed i risultati medî di tutte queste nuove prove, ripetute 10 o 12 volte per ciascun caso, e per ogni riguardo degnissime di fede sono i seguenti:

Tabella XVII.

Cariche Q I	Batteria II	Calore C III	Rapporto
8	sinistra	9,9	
16	des. e sin.	18,6	
8	destra	10,9	
16	des. e sin.	18,4	
8	sinistra	10,4	
16	des. e sin.	19,1	
8	destra	10,3	
16	des. e sin.	19,1	
	Medie generali		
8	1 Batteria	10,4	$\frac{18.8}{10.4} = 1.81$
16	2 Batterie	18,8	

Questi risultati sono affatto concordi ai precedenti e tutti mostrano non esservi esatta proporzionalità fra cariche e calore per cui possiamo dire che:

Il calorico svolto dalla scintilla eccitatrice cresce un po' meno delle cariche a potenziali costanti.

Inoltre confrontando gli ultimi risultati coi precedenti scorgiamo che l'influenza reciproca dei condensatori nelle varie condizioni delle mie esperienze par piccola o

(¹) Faccio qui notare che per avere misure esatte è necessario di sperimentare in ambiente a temperatura costante: essendochè se l'indice del termometro a scintilla s'accorcia abbassandosi, esso divien più leggiero e però il termometro diventa più geloso e squisito: ed invece se l'indice si solleva l'apparato diventa più torpido. Nelle misure precedenti l'indice in principio era lungo 130^{mm}, poscia si ridusse a 126,5 ed alla fine delle misure, che durarono oltre un'ora, aveva di nuovo la lunghezza di 130^{m}.

trascurabile: e prendendo le medie di tutti i rapporti fra i calori svolti dalle cariche relative 2 ed 1 a potenziali costanti avremo i seguenti dati:

1,71
1,77
1,77
1,81

media = 1,77

per cui quando la carica cresce da 1 a 2 (stesso potenziale) il calore della scintilla cresce in media da 1 a 1,77.

Influenza dei potenziali. La seconda serie di misure ebbe per iscopo di determinare il variare che fa il calore pel modificarsi del solo potenziale d'una carica tenuta sempre costante. Perciò adoperai le 24 bottiglie solite, e caricandole sempre con 12 unità elettrometriche eseguii tre serie di misure successive: nella I diminuendo le bottiglie di due per volta le portai da 24 a 4: nella II accrescendole di 2 le riportai a 24, e nella III diminuendole con la stessa norma le ridussi di nuovo a 4; per ciascun caso ripetei le prove da 4 ad 8 volte ed i risultati medî sono i seguenti:

Tabella XVIII. — *Carica costante 12 unità.*

Numero d' ordine	N. Bottiglie N I	Calore C II	Prodotti $N \times C$ III
1	24	6,9	166
2	22	7,7	169
3	20	9,8	186
4	18	11.5	207
5	16	13.8	221
6	14	16,8	235
[illegible]	12	19,2	230
8	10	23,5	235
9	8	25,3	202
10	6	22,8	136
11	4	17,5	70

Nella tavola precedente sono riportati, nelle colonne I e II, il numero delle bottiglie ed i calori svolti; e nella colonna III i prodotti fra queste due quantità. Essi crescono in principio col decrescere di N ossia col crescere del potenziale: quindi rimangono costanti e poscia rapidamente decrescono. Dal che si deve concludere che il calore della scintilla eccitatrice per una carica costante:

1° *Cresce più rapidamente dei potenziali per piccoli valori di questi* (Esp. 1 a 6).

2° *Cresce come i potenziali, per valori medî di questi* (Esp. 6 ad 8).

3° *Cresce molto meno dei potenziali, ed anche decresce con essi per valori elevati dei medesimi* (Esp. 8 ad 11).

Il che avviene a cagione delle scariche interne, che piccole per lievi potenziali s'accrescono sempre più rapidamente col crescere di essi, ossia col diminuire delle bottiglie.

A tutto rigore però queste misure non permettono un confronto esatto pei varî potenziali a cagione della differenza elettrica delle diverse bottiglie adoperate. Per la qual cosa io ritenni necessario ripetere le misure con due batterie di 12 bottiglie ciascuna, che caricavo separate ed alternamente, o riunite, e sempre con una costante carica (12 unità elettrometriche): ed operando come pel caso della legge delle quantità, ottenni i risultati che seguono, quali medie di 6 o più misure per ciascun caso.

Tabella XIX. — *Termometro fisso a fili platino* 12 *cariche.*

N. Bottiglie N	Calore C	Prodotti $N \times C$	Rapporti fra i calori
12 [E]	29,6		
24	8,0		
12 [I]	34,4		
24	7.7		
12 [E]	30,5		
24	9,2		
12 [I]	36,6		
24	10.4		
12 [E]	33,6		
24	8,9		
12 [I]	35,2		
Medie generali			
12	33,5	402	$\frac{335}{88} = 3{,}81$
24	8,8	211	

I risultati della precedente tabella sono assai concordi fra loro e del pari lo erano quelli delle singole misure; e ciò garentisce la loro esattezza. Inoltre le esperienze furono eseguite con le solite bottiglie verniciate di nuovo ed in ambiente ben secco e caldo per cui l'isolamento era da ritenersi buono. Esse esperienze si riferiscono solo a potenziali piccoli (giacchè sono quelli che interessano in seguito) e prendendo le medie di tutte le misure, quali sono trascritte in basso della tavola, si ha che il prodotto N×C per 12 bottiglie è circa doppio che per 24, e perciò il calorico crebbe assai più che non scemò il numero delle bottiglie, ossia crebbe assai più che non crebbe il potenziale della carica; e propriamente prendendo il rapporto dei calori nei due casi contemplati si trova, che il potenziale essendo cresciuto da 1 a 2 il calore crebbe da 1 a 3,81.

Devo però qui far notare che detto rapporto non parmi possa ritenersi come assoluto e costante; imperocchè esso dipende dal modo di distribuirsi del calore fra la scintilla interna ed esterna; e tale partizione dipende non solo dal potenziale e

dal circuito esterno, ma forse molto anche dalla natura delle bottiglie e condizioni delle loro superficie, le quali non essendo sempre le stesse debbono probabilmente far variare quel dato rapporto (¹).

E riassumendo potremo dire (limitandoci a deboli potenziali) che quando in una batteria cresce contemporaneamente la carica ed il potenziale (come appunto succede aumentando la carica d'una data e costante batteria) crescerà il calore svolto dalla scintilla un po' meno delle cariche e molto più dei potenziali. Riferendoci poi agli ultimi risultati ottenuti si dedurrà, che crescendo nella stessa batteria la carica nel rapporto di 1 a 2, il calore della scintilla eccitatrice aumenterà nel rapporto medio di 1 ad 1,77 per la massa elettrica e di 1 a 3,81 pei potenziali; ossia in complesso in ragione di 1 a 6,74. Col quale coefficiente sarà facile di calcolare il calore svolto dalla scintilla eccitatrice prodotto dalla carica 2 quando si conosce quello dovuto alla carica 1 adoperata a caricare uno stesso condensatore. E per fare appunto codesti confronti, oltre le misure già date in precedenza (metodo diretto) ne ho eseguito delle nuove con le 24 bottiglie ultimamente verniciate, che caricavo con 12 e 24 unità elettrometriche per stare nei limiti delle cariche adoperate nella determinazione delle due leggi precedenti. E codeste misure eseguite nel modo consueto e ripetute 5 o 6 volte per ciascun caso dettero i risultati che seguono:

Tabella XX. — *Termometro fisso n. I elettrodi fili platino. 24 Bottiglie verniciate di fresco.*

Cariche Q I	Calore C II	Medî valori di C III
12	7,2	9,28
24	60,0	64,2
12	9,4	
24	59,3	
12	10,1	
24	66,9	
12	10,4	
24	70,6	
	II Serie	
12	7,6	7,27
24	55,0	52,47
12	6,9	
24	52,2	
12	7,3	
24	50,2	

(¹) Al quale proposito giova qui ripetere che tutte le mie misure furono fatte sempre con le stesse bottiglie, non avendone avute altre, che bene isolavano, a mia disposizione. Mi propongo però, appena il potrò, di ripetere alcune delle esperienze descritte in questa Memoria per osservare se e come variar possono questi fenomeni col variare delle bottiglie.

E prendendo da questa tavola e dalle altre precedenti il calore svolto da una carica 12 e calcolando col coefficiente 6,74 quello svolto da una carica doppia e confrontandola con quello direttamente trovato avremo i seguenti risultati:

Tabella XXI.

Tabelle	N. di bottiglie	Cariche	Calore trovato	Calore calcolato	Differenze
I	II	III	IV	V	VI
19	24	12	9,3		
		24	64,2	61,7	— 2,8
»	»	12	7,3		
		24	52,5	47,9	— 3,9
6	»	12	5,8		
		24	41,4	38,8	— 2,6
6bis	»	12	6,4		
		24	43,5	43,1	— 0,4
7	28	14	6,5		
		28	48,1	43,8	— 4,3
7bis	»	14	5,3		
		28	40,5	35,7	— 4,8

Tutti questi valori mostrano chiaro come vi sia completo accordo fra i valori trovati e quelli calcolati; e se questi ultimi sono alquanto in difetto, rispetto ai primi, ciò deve forse dipendere dal fatto, che le misure dirette si eseguono con una sola esperienza, mentre che il coefficiente 6,74, col quale si sono calcolati poi i valori della colonna V, tav. XXI, si è ottenuto per mezzo di due esperienze, nelle quali le perdite di elettricità hanno dovuto essere in totale più vistose che nelle misure dirette eseguite con una sola esperienza.

Questa concordanza parmi, se non vado errato, confermi quasi in modo sintetico tutti i risultati delle mie precedenti esperienze e ne garantisca la esattezza. E viene altresì dimostrato, che realmente il calore della scintilla cresce un po' meno rapidamente delle cariche a potenziale costante, come si era già detto; il che forse è dovuto all'influenza reciproca dei condensatori, come in realtà farebbe supporre l'esperienza eseguita coi condensatori posti a 3 metri di distanza fra loro.

Lo studio della scintilla fatto nei due modi ultimi indicati ci fa comprendere a quali elementi è dovuto il crescere del calore di essa, quando venga generata da cariche che crescono contemporaneamente per potenziale e quantità di elettricità. Ed inoltre detti studî rendono possibile un confronto fra i fenomeni termici della scintilla e quelli dei fili metallici.

Nel filo metallico al crescere del solo potenziale, supposta costante la carica elettrica, cresce la sua temperatura; invece nella scintilla crescendo il potenziale cresce la lunghezza sua, senza mutamento sensibile della sua grossezza, e però con detta lunghezza aumenta il numero di particelle che la producono. Laonde può dirsi

che l'aumento di potenziale induce tanto nel filo metallico che nel gassoso (scintilla) un aumento di energia termica, in quello accrescendo la velocità delle sue particelle ed in questa accrescendo il loro numero. L'aumento poi della massa elettrica, con costante potenziale, produce del pari nel metallo e nella scintilla aumento di calore; in quello però accrescendone al solito la temperatura ed in questa aumentandone la sezione e quindi la massa. In altri termini, il filo metallico può considerarsi come un *conduttore stabile* e determinato, e l'aumento termico in esso è sempre in diretta relazione col suo aumento di temperatura. La scintilla invece è formata da un conduttore che potrebbe dirsi *instabile*, il quale può variare non solo nella sua temperatura ma anche nelle sue dimensioni e perciò l'aumento di calore che essa produce è funzione della massa gassosa riscaldata e probabilmente anche della sua temperatura (¹).

Legge delle superficie. L'influenza della superficie dei condensatori, sul potere termico della scintilla, è quella medesima dei potenziali, detta di sopra e l'una legge è implicitamente compresa nell' altra. Tuttavia qui non sarà inutile aggiungere in proposito le brevi considerazioni che seguono.

Nella mia Nota anticipata (²) già feci cenno d'una tale quistione ed avendo allora sperimentato con due batterie di 18 bottiglie che caricavo insieme o alternamente, ottenni, come medie di moltissime esperienze eseguite nel modo ordinario, i dati termici seguenti:

TABELLA XXII.

Cariche Q	N. Bottiglie N	Calori C
40	18	56
	36	27
30	18	26
	36	13
45	18	78
	36	36
35	18	32
	36	18
Media generale		
38	18	48
	36	24

(¹) In una breve Nota anticipata esposi il risultato di alcuni miei studî sulle dimensioni delle scintille: i quali però non sono ultimati e pel momento mi limito solo ricordare che col crescere del potenziale d'una carica costante la lunghezza della scintilla cresce, dentro certi limiti, più rapidamente di quello, pur serbando pressochè invariato il suo diametro. Invece crescendo la carica sola (rimanendo costante il potenziale) aumenta la sezione ma non la lunghezza della scintilla eccitatrice. Detto aumento però non parmi possa ritenersi esattamente proporzionale alle cariche come allora credetti da alcune misure potere argomentare. Tuttavia su questa quistione mi propongo eseguire nuove esperienze.

(²) R. C. d. Acc. delle sc. di Bologna p. 143 1878-79.

Ultimamente per assicurarmi dei risultati allora ottenuti volli ripetere le ricerche precedenti in condizioni affatto analoghe; ed avendo operato, come nelle antiche misure, con 2 batterie di 18 bottiglie ottenni per media di molte esperienze i numeri seguenti:

Tabella XXIII.

Cariche Q	N. Bottiglie N	Calore medio C
40	18	53,7
	36	26.5
30	18	26
	36	13
45	18	78,5
	36	36
35	18	32
	36	17
40	18	50
	36	27
35	18	73
	36	34
Media generale		
37,5	18	52,2
	36	25,6

I risultati di queste due tabelle sono affatto identici ed in ciascuna di esse sono riportate in basso le medie totali generali. Ora da esse medie si scorge che:

Il calorico della scintilla eccitatrice, prodotta da una carica costante, è in ragione inversa della superficie del condensatore nel quale la carica è accumulata.

Questa legge però, dopo quello che si è detto intorno ai potenziali, non può essere generale, e deve riferirsi solo ad un dato valore dei medesimi. Per mettere in evidenza questo fatto sperimentai con due batterie di 5 bottiglie ciascuna, che al solito caricavo insieme od alternamente con una quantità di elettricità, che variai in diverse serie di misure che feci, ed i risultati medî di molte di esse sono qui sotto riportati:

Tabella XXIV.

N. d'ordine	Cariche Q	N. Bottiglie N	Calore C
I Serie	11	5	25,9
		10	10,6
II Serie	12	5	36,9
		10	17,0
III Serie	15	5	40,3
		10	32,0

Questi numeri mostrano, che per la carica media di 12 unità (II serie) la legge dell' inversa delle superficie è quasi esatta; per una carica minore (I serie) il calore cresce più rapidamente che non scemi la superficie dei condensatori; e per una carica eccessiva (III serie) esso calore cresce assai meno rapidamente che non scemi la superficie istessa. E ciò per effetto delle consuete scariche interne.

Tutte queste misure, relative alla influenza della superficie dei condensatori, furono eseguite col mio antico termometro ad elettrodo articolato; il quale si sa esser cagione di gravi incertezze. Per togliere adunque ogni possibile dubbio in proposito eseguii delle altre misure nel modo medesimo di quelle relative alla ultima tabella, nella quale però adoperai il mio nuovo termometro eccitatore ed i risultati medî di molte misure sono qui riportati:

Tabella XXV.

N. d'ordine	Cariche Q I	N. di bottiglie N II	Calore C III	Rapporti IV
1	10	12	17,4	3.39
		24	5.2	
2	12	12	23.1	2.61
		24	8.8	
3	14	12	31,8	2.56
		24	12.4	
4	16	12	35,3	1,97
		24	17,9	
5	20	12	54,6	1.52
		24	36,0	

Da questi numeri si scorge che per la carica 16 la legge enunciata dell'inversa delle superficie si verifica rigorosamente; ed invece per cariche minori e superiori essa è in difetto, e nel modo indicato più sopra, come meglio rilevasi dalla colonna IV, ove sono i rapporti fra le quantità di calore ottenute con le 12 e 24 bottiglie.

Questi risultati adunque, nel mentre stabiliscono la legge delle superficie, confermano in modo diretto le conclusioni relative a quelle dei potenziali: e per ciò dobbiamo anche qui, in conclusione ammettere che la legge termica della scintilla di una data carica, distribuita in condensatori di diversa ampiezza, presenta tre periodi diversi che sono i seguenti:

1. *Per carica di piccolo potenziale, il calore della scintilla cresce più rapidamente che non decresca la superficie del condensatore.*

2. *Per potenziale medio, il calore della scintilla è esattamente in ragione inversa della superficie del condensatore.*

3. *Per elevati potenziali, il calore cresce meno rapidamente che non decresca la superficie dello stesso condensatore.*

Da tutti i fatti riportati e dalla lunga discussione alla quale hanno dato luogo risulta, che per un valore intermedio e determinato del potenziale della carica di un condensatore, il calore svolto da essa carica si distribuisce in modo fra le scintille interne e l'eccitatrice esterna che in questa, detto calore si svolge proporzionalmente ai quadrati delle cariche ed inversamente alla superficie dei condensatori. Ed in tal caso le leggi termiche della scintilla eccitatrice sono le medesime di quelle seguite dai fili metallici; e quindi possono essere espresse dalla seguente semplice relazione:

$$C = m \frac{Q^2}{N} = m \frac{Q}{N} Q = mEQ.$$

ove il quoziente $\frac{Q}{N}$ della carica pel numero delle bottiglie, od ampiezza del condensatore, corrisponde alla spessezza o densità elettrica media; e perciò può dirsi che:

Il calore svolto dalla scintilla eccitatrice, nelle indicate condizioni, *è proporzionale al prodotto della carica per la spessezza elettrica.*

E siccome la spessezza elettrica è proporzionale al potenziale della armatura interna così potremo anche dire che:

Il calore è proporzionale al prodotto della quantità di elettricità per la caduta del potenziale.

Tali leggi sono le stesse di quelle del riscaldamento dei fili metallici percorsi dalla scarica, e perciò nelle indicate condizioni una parte della scintilla potrebbe sostituirsi con una parte di filo metallico e viceversa, senza che perciò s' inducano perturbazioni di sorta nei fenomeni termici dell'una e dell'altro.

Queste leggi che potrebbero chiamarsi leggi limite della scintilla eccitatrice, sono quelle che ci dà la teoria per la trasformazione totale dell'energia elettrica in calore per mezzo della scarica; e perciò debbono riscontrarsi fra gli accennati limiti, anche per le scariche interne delle bottiglie. In tutti gli altri casi, sia di potenziali piccoli, sia eccessivi il calor totale svolto dalla scarica seguirà le stesse leggi, ma saranno peculiari e diverse per la scintilla esterna ed interna e dipenderanno dal modo di distribuirsi del calore nell' esterno e nello interno del condensatore. E se i fili seguono queste medesime leggi limite della scintilla eccitatrice ciò deve accadere ammettendo che il calor totale della scarica interna, e della scintilla eccitatrice esterna [1] segua le identiche leggi; percui a tutto rigore le leggi dei fili non sono concordi con la teoria se non fatta quest'ultima restrizione. Che anzi possiamo aggiungere che nelle indicate circostanze la somma di tutti gli altri effetti della scarica deve seguir leggi identiche, ammettendo le quali cose noi siamo sempre, mi pare, ancora lontani dal dimostrare per via dell'esperienze dirette le leggi della totale trasformazione dell'energia elettrica; imperocchè per mezzo delle scintille noi possiamo misurare tutto il calorico prodotto dalla scarica; pure da esso non conosciamo tutto il lavoro necessario alla loro produzione che è certo grandissimo come dirò in seguito.

Prima di metter termine a questo lungo mio scritto credo utile, per aiutare la memoria del lettore, di ricordare nel seguente riassunto le cose principali esposte precedentemente.

[1] A tutto rigore qui si tratta non di calorico ma di effetto totale della scarica; pure ho parlato di calore ammettendo implicitamente che quello sia a questo proporzionale.

RIASSUNTO

Chiamo scintilla *eccitatrice* di una scarica di un condensatore quella che si produce contro l'eccitatore, e scintilla *congiuntiva* quella che si forma in una interruzione dell'arco congiuntivo. Di questa già esposi la proprietà in altra occasione.

Ad istudiare il calore della scintilla eccitatrice ho costruito un termometro eccitatore, formato da un eccitatore articolato chiuso in un pallone di vetro. Esso, per due tubolature era sostenuto da lastre di ebanite, sulle quali poteva opportunamente ruotare intorno ad un asse orizzontale e chiudere il circuito di una batteria, alla quale veniva unito nel momento che si voleva scaricare, e così la scintilla si produceva nel pallone. Il calore svolto da essa veniva misurato dallo spostamento di un indice di glicerina ed acqua, contenuto in un cannello di vetro verticale unito al pallone. Sperimentando con questo apparato e con diverse cariche impartite ad una stessa batteria, ottenni quale risultato medio e nei limiti delle mie ricerche:

Che il calore svolto dalla scintilla eccitatrice unica è, con grande approssimazione proporzionale al quadrato delle cariche.

Ma questa legge non è generale, imperocchè nelle esperienze indicate, che servirono a determinarla, intervengono varî fenomeni e perturbazioni che complicano ed alterano i risultati ottenuti. Ed in primo luogo è a notarsi che il vetro delle bottiglie non è sempre abbastanza coibente e tale da tener bene le cariche elettriche: ed io infatti ne ho trovato di quelle che mi riusciva impossibile caricare. Perciò è necessario, per queste esperienze, scegliere bottiglie appropriate e verniciarle bene alla gommalacca. In secondo luogo ho osservato che sperimentando con elevati potenziali si producono nelle bottiglie delle energiche scariche elettriche interne accompagnate da calore, il quale è a detrimento di quello che accompagna la scintilla eccitatrice esterna. E da ultimo, nell'eccitatore chiuso nel pallone, e propriamente nella sua articolazione, per lo imperfetto contatto delle parti articolate si producono delle scintille (come viene dimostrato dalle erosioni che in essa si riscontrano) le quali svolgono del calore, che non potendosi subito comunicare all'aria del pallone sono cagione di gravi perturbazioni nelle sue indicazioni.

Ad eseguire adunque delle misure esatte scelsi delle bottiglie bene isolanti, con un metodo che indicherò più tardi; tenni conto delle cariche interne, e modificai il termometro eccitatore nel modo seguente. Resi fisso il pallone, ed invece, l' elettrodo che prima era articolato lo saldai sulla sua asticella, e questa (nel rispettivo tappo di sughero che ermeticamente chiudeva il pallone) muoveva opportunamente, per mezzo di un' asta di vetro, ed in modo da avvicinare od allontanare l' uno all'altro elettrodo. Con questo nuovo e più perfetto termometro, ed operando con ogni diligenza ripetei le esperienze sulle scintille eccitatrici scoccanti fra fili di platino, ed ottenni dei risultati assai concordi fra loro. Essi possono riassumersi dicendo che:

Il calorico della scintilla eccitatrice unica cresce con le cariche con una potenza che va continuamente decrescendo col crescere dei potenziali di esse.

E più particolarmente possiamo anche dire che detto calore cresce con le cariche mostrando tre periodi, e cioè detto calore:

1° *Cresce un po' più rapidamente del cubo delle cariche di piccolo potenziale.*

2° *Cresce come i quadrati delle cariche di medio potenziale.*

3° *Cresce approssimativamente come le cariche di elevato potenziale.*

Questo modo singolare della produzione del calore per la scintilla tiene, con ogni probabilità, al fenomeno delle scariche interne le quali, secondo io ho dimostrato in altra occasione, sono piccolissime e trascurabili per piccoli potenziali e crescono poi rapidissimamente col crescere di questi. E per tai fenomeni e pei noti principî teorici sulla scarica delle bottiglie, noi dobbiamo inferire come cosa assai probabile che il calorico delle scariche interne deve crescere meno dei quadrati delle cariche nel caso del 1° periodo; come i quadrati delle medesime nel 2°: e più rapidamente dei quadrati nel 3°. Quest'ultima deduzione trova forse appoggio in alcune mie esperienze, nelle quali avendo misurato il calorico delle scariche interne ho trovato che per elevati potenziali esso cresceva come una potenza delle cariche compresa fra la 4ª e la 5.ª

Poscia ho studiato l'influenza della sola quantità di elettricità tenendo costante il suo potenziale, sul calore prodotto dalla scintilla ed ho trovato:

Che il calore della scintilla eccitatrice unica, cresce un po' meno delle cariche a potenziali costanti:

E propriamente, quando la carica cresce da 1 a 2 il calore prodotto dalla scintilla aumenta nel rapporto di 1 ad 1,77 in media. Detto rapporto cresce forse un po' quando si adoperano dei condensatori posti a più metri di distanza fra loro, e sottratti così, in parte almeno, alla loro reciproca influenza. Talmentechè quasi potrebbe supporsi che la mancata proporzionalità fra cariche e calore in questo caso tenga forse alla reciproca influenza dei condensatori medesimi. Dipoi ho fatto variare il solo potenziale d'una costante carica accumulandola in diverso numero di bottiglie, ed ho stabilito che il calore della scintilla eccitatrice unica in tal caso:

1° *Cresce più rapidamente dei potenziali per piccoli valori dei medesimi.*

2° *Cresce come i potenziali, per valori medî di questi.*

3° *Cresce molto meno, ed anche decresce, col crescere dei potenziali per valori molti elevati dei medesimi.*

Questi diversi periodi sono al solito dovuti alle scariche interne. E limitandomi a piccoli potenziali ho trovato che essendo questo cresciuto da 1 a 2 (12 cariche elettrometriche furono impartite prima a 24 e poi a 12 bottiglie eguali) il calorico della scintilla, in media, s'accrebbe nel rapporto di 1 a 3,81 (¹).

E riassumendo potremo dire, limitandoci a piccoli potenziali, che quando in un condensatore cresce contemporaneamente ed in egual proporzione carica e potenziale (come accade aumentando la massa elettrica in una data batteria) nel rapporto di

(¹) Ritengo che questo rapporto e gli altri analoghi relativi ai potenziali diversi non possono avere dei valori assolutamente costanti, dipendendo le scariche interne in parte della natura e condizione propria delle bottiglie, e perciò detti rapporti debbono forse un po' variare al variare di esse.

1 a 2 il calore della scintilla dovrà crescere, secondo i risultati precedenti, nel rapporto di 1 ad $1{,}77 \times 3{,}81$ ossia nel rapporto di 1 a 6,74. E così per questa via indiretta noi conoscendo il calore svolto dalla scintilla di una carica 1, potremo determinare quello dovuto alla carica 2 accumulata nello stesso condensatore. L'esperienze eseguite in proposito mostrarono completa concordanza fra il calore trovato con le misure dirette e quello calcolato col metodo indiretto.

La legge relativa alla superficie dei condensatori, evidentemente si compenetra con quella dei potenziali; quindi anche per le superficie noi distinguiamo i medesimi tre periodi, rinvenuti parlando dei potenziali, e per le medesime ragioni.

Da ciò che precede risulta che per un determinato potenziale di una data carica di un condensatore, il calore svolto da essa si distribuisce in modo fra le scintille interne e la eccitatrice esterna che in quest'ultima esso calore cresce proporzionalmente ai quadrati delle cariche ed inversamente alla superficie dei condensatori. Queste leggi quasi limite delle scintille, sono le stesse di quelle dei fili e possono esprimersi con la relazione

$$C = m \frac{Q^2}{N} = m \frac{Q}{N} Q = m E Q$$

ove C indica il calore Q la quantità di elettricità, e $\frac{Q^2}{N}$ la spessezza elettrica E, che è proporzionale al potenziale della carica: quindi potremo anche dire che nei limiti su indicati:

Il calore svolto dalla scintilla è proporzionale alla quantità di elettricità per la spessezza elettrica: ovvero *è proporzionale alla quantità di elettricità per la caduta del potenziale.*

In questo caso, parte della scintilla deve potersi sostituire con filo metallico e viceversa, senza indurre perturbazioni di sorta nei fenomeni termici di amendue; ed in questo caso ancora è necessario che la somma di tutti gli altri effetti prodotti dalla scintilla segua le stesse leggi.

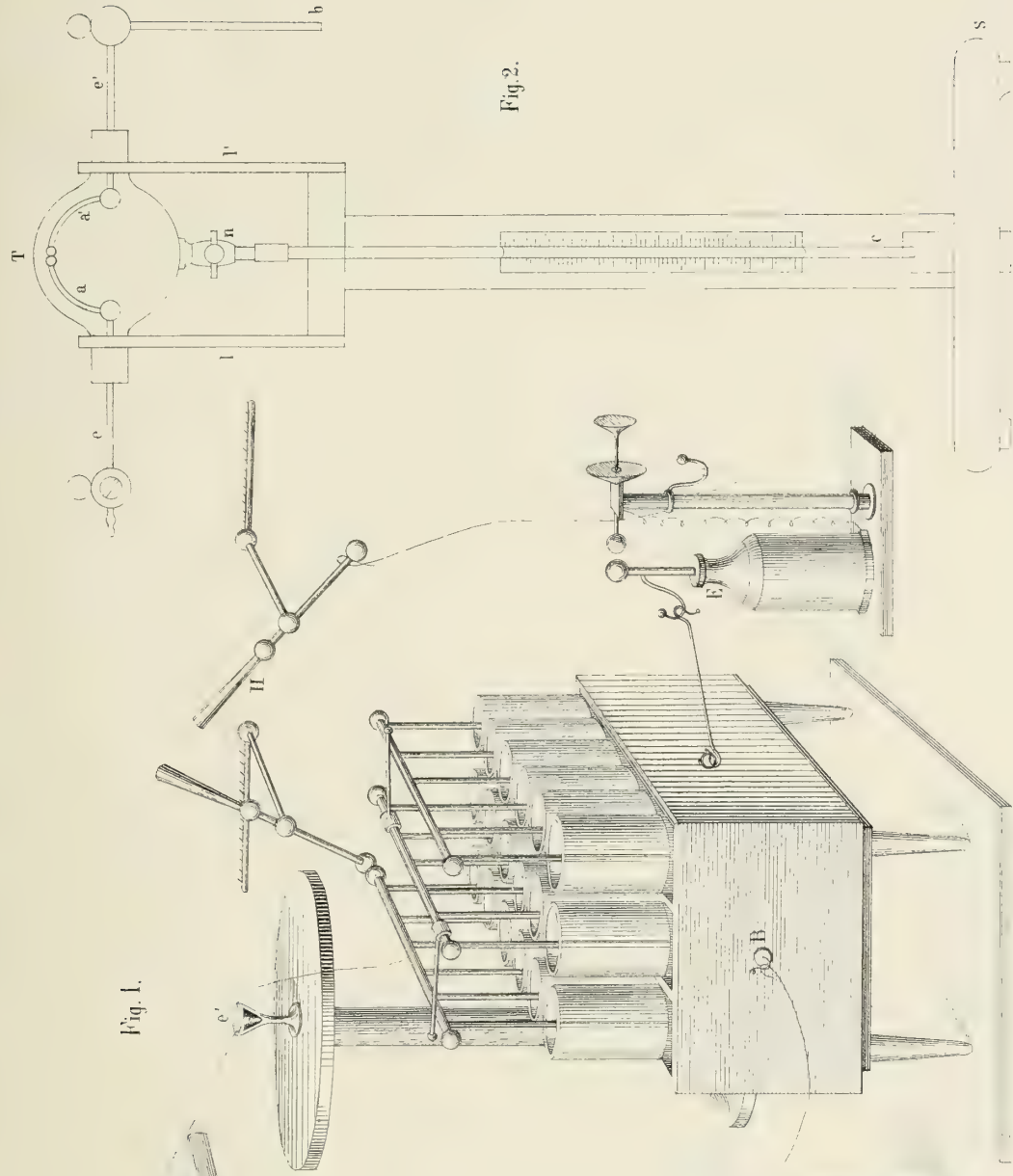
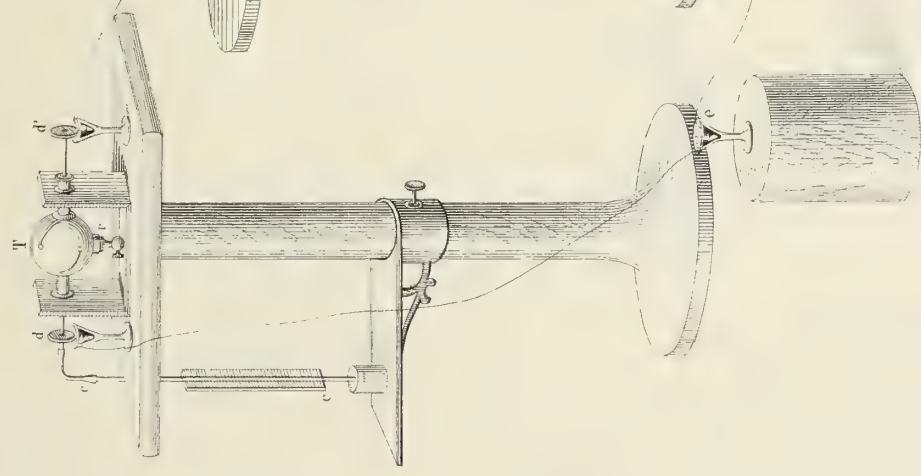
Tuttavia fra la scintilla ed i fili, rispetto ai fenomeni termici, esiste una differenza essenziale. La scintilla col crescere delle cariche e dei potenziali aumenta in lunghezza e sezione; essa può considerarsi adunque come un conduttore *variabile* e perciò l'efficacia termica di esso deve essere funzione del numero delle particelle gassose che lo compongono e forse anche della loro temperatura. Nei fili metallici, che possono considerarsi come dei conduttori *fissi* la loro efficacia termica deve essere esclusivamente funzione della temperatura.

Fig. 1.

Fig. 2.

Scala 1:5.

F. Samuelli dis.

Lit. G. Wenk

Ricerche sull'Atropina.

Memoria del dott. LEONE PESCI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 3 aprile 1881.

Con questo titolo nello scorso anno ([1]) ho pubblicato una Nota nella quale sono succintamente esposti i primi risultati ottenuti in una serie di indagini istituite comparativamente tra l'atropina e la daturina, e dove è trattato di un nuovo composto che si genera per l'azione dell'acido azotico sulla atropina.

Il dott. Dioscoride Vitali in un suo pregiato lavoro, intitolato: *Studio Tossicologico sull'atropina e sulla daturina*, pubblicato nel Bollettino Farmaceutico di Milano, annunziava quasi contemporaneamente di avere per mezzo delle stesse sostanze (atropina ed acido azotico) ottenuto una nuova base, alla quale diede, per accennarne l'origine, il nome di nitroatropina.

Ricerche ulteriori da me eseguite e già pubblicate ([2]), hanno dimostrato come fra la sostanza da me preparata e quella del Vitali vi sia non dubbia differenza.

Diffatti mentre questa possiede azione midriatica, non fornisce sali cristallizzabili e colla potassa alcoolica svolge una magnifica colorazione violetta, che passa poi al rosso vinoso, la base da me preparata non dilata la pupilla, fornisce sali cristallizzabili e colla potassa alcoolica non produce coloramento alcuno.

La cagione di tale disparità di risultati nella reazione delle stesse sostanze è presto trovata, ove si ponga mente al diverso processo di preparazione.

Il dott. Vitali operò nel modo seguente.

Fece bollire a piccole riprese la soluzione nitrica di atropina (preparata con una parte di alcaloido e dieci parti di acido) fino a cessazione di sviluppo dei vapori nitrosi, evaporò quindi a blando calore fino ad eliminazione totale dell'acido; alcalizzò con ammoniaca ed estrasse la sua base col mezzo del cloroformio.

Invece io versai l'atropina a piccole prese nell'acido tenuto a 50°, ed evitai con cura lo sviluppo dei vapori nitrosi onde prevenire che la base venisse troppo profondamente alterata. Diffatti se la temperatura viene elevata di soverchio in modo che si svolgano vapori rutilanti, l'atropina si trasforma principalmente in acido picrico.

È chiaro che l'azione dell'acido azotico in questi due processi deve essere di intensità molto diversa, e precisamente meno gagliarda nel mio che in quello del Vitali. Che se la temperatura dell'acido nella preparazione del mio prodotto viene elevata di molto, in allora l'azione del reattivo si fa di gran lunga più forte perchè l'atropina incontra una superficie amplissima, maggiore di quella che incontra nelle condizioni dal Vitali descritte.

Ho del pari dimostrato ([3]) che la mia base può essere trasformata in quella del

([1]) V. Gazzetta Chimica Italiana, anno X pag. 425. — ([2]) V. Bollettino Farmaceutico, gennaio 1881. — ([3]) V. Boll. Farm. loc. cit.

Vitali per una azione ulteriore dell'acido azotico e che le due basi si generano contemporaneamente anche operando il trattamento a temperatura ordinaria.

Dovendo preparare una ragguardevole quantità della mia sostanza, onde completarne lo studio, volli indagare quale fosse il modo di preparazione più opportuno per ottenerne la massima quantità.

A tale scopo tentai diverse vie impiegando l'acido azotico a diverse temperature ed a diversi gradi di concentrazione.

Il massimo di prodotto lo ebbi operando nel modo seguente.

Cento cent. cub. di acido azotico fumante vengono riscaldati alla temperatura di 50° C. Raggiunto questo punto si toglie la massa dall'azione del calore, e vi si versano a piccole prese, agitando di continuo, dieci grammi di atropina. Conviene procedere con lentezza dacchè la reazione è accompagnata da sviluppo di calore, onde talvolta è opportuno sospendere l'aggiunta dell'alcaloide.

Quando tutta l'atropina è stata così versata nell'acido, si lascia raffreddare la massa per circa mezz'ora. In seguito si alcalizza con ammoniaca in forte eccesso operando entro recipiente refrigerato e si sbatte con circa due volumi di cloroformio. Si lascia in quiete per qualche tempo e si separa il cloroformio mediante imbuto a chiave.

Il cloroformio viene spogliato dalle basi agitandolo prima con acqua inacidita di acido acetico, poi, separata quella, con acqua inacidita di acido ossalico.

Col trattamento acetico se ne estrae pressochè esclusivamente la base del Vitali; coll'ossalico si estrae la mia sostanza.

Il cloroformio così spogliato dalle basi viene di nuovo agitato colla massa ammoniacale e sottoposto successivamente all'azione dei liquidi acidi per più volte.

Si versa il liquido ossalico in una bottiglia, vi si aggiunge ammoniaca in forte eccesso e si sbatte con egual volume di cloroformio rettificato. Si decanta, si ripete lo sbattimento con mezzo volume di cloroformio. Il cloroformio dei due trattamenti si filtra e si espone all'evaporazione spontanea.

Il più delle volte si ottiene così la sostanza alcaloidea in forma di un liquido olioso, colorato leggermente di giallo, che rifiuta di cristallizzare. In queste condizioni essa non è pura. Si ottiene purissima e cristallina operando nel modo seguente.

Si salifica il residuo lasciato dal cloroformio, con acido cloridrico diluito, con che si forma una pasta cristallina brillante a riflessi madreperlacei. Questa viene asciugata sul filtro aspiratore e spremuta tra carta emporetica: si discioglie nell'acqua tiepida e, per raffreddamento, si fa nuovamente cristallizzare, ripetendo l'operazione fino a che essa forma col cloruro d'oro un composto contenente una quantità costante di metallo.

Si stempera allora il cloridrato in un eccesso di ammoniaca e si sbatte col cloroformio. Questo si separa, si filtra e si evapora alla temperatura ordinaria.

Si ottiene così una massa cristallina incolora, inodora, composta di cristalli prismatici (trimetrici?) che mostrano sulle facce più sviluppate bellissimi esempi di tramoggie. Tali cristalli raggiunsero talvolta la lunghezza di cinque o sei millimetri.

Così purificata, la nuova base fonde a 60°, 62°; è poco solubile nell'acqua. La sua soluzione acquosa rende azzurra la carta di tornasole. È discretamente solubile

nella benzolina e nell'alcool amilico; solubilissima nell'alcool etilico, nell'etere, nel cloroformio, nel benzolo, nel solfuro di carbonio e nell'alcol metilico.

Ha sapore amaro disaggradevole. Scaldata con un pezzetto di potassio entro tubo d'assaggio, dopo completa combustione del metallo, cede all'acqua del cianuro di potassio.

Scaldata entro tubo d'assaggio a temperatura elevata, si decompone senza detonare o svolgere vapori nitrosi. La carta ozonoscopica infatti esposta all' azione dei suoi prodotti di scomposizione pirica, non assume coloramento alcuno.

Scaldata su lamina di platino abbrucia completamente senza lasciare residuo di cenere.

All'analisi fornì i numeri seguenti

I. gr. 0,4694 di sostanza diedero 1,2910 di CO^2; 0,3328 di H^2O
II. gr. 0,4860 » » 1,3337 » 0,3910 »
III. gr. 0,4947 » » 1,3635 » 0,3476 »

La determinazione dell'azoto fu operata col processo di Varrentrapp e Will.

IV. gr. 0,5058 di sostanza fornirono 0,183 di Pt
V. gr. 0,4835 » » 0,177 »

Cloroaurato. Versando una soluzione cloridrica neutra della base nel cloruro d'oro, si forma un precipitato fioccoso giallo-canerino, amorfo, inalterabile alla luce, pochissimo solubile nell'acqua, fusibile a 106°-107°.

Cloroplatinato. Si prepara versando il cloridrato della base iu uno sciolto di cloruro di platino. Si forma un precipitato giallo-isabella che a tutta prima si dilegua. Proseguendo però nell'aggiunta del sale alcaloideo, il precipitato si fa persistente e cristallino.

VI. gr. 0,3290 di sale d'oro seccato a 100°-105 diedero 0,1104 di Au
VII. gr. 0,4403 » » » » 0,1416 »
VIII. gr. 0,3548 di sale di platino seccato 100° 105° diedero 0,0734 di Pt
IX. gr. 0,5320 » » » » 0,1105 »

Questi numeri conducono alla formula $C^{17}H^{21}AzO^2$

Calcolato		Trovato				
		I	II	III	IV	V
$C^{17} = 204$	75,28	75,01	74,84	75,17	—	—
$H^{21} = 21$	7,75	7,89	7,98	7,81	—	—
$Az = 14$	5,17	—	—	—	5,12	5,18
$O^2 = 32$	11,80	—	—	—	—	—
271	100,00					

Calcolato per	Trovato	
$C^{17}H^{21}AzO^2HCl, AuCl^3$	VI	VII
Au p. % 31,15	32,19	32,17

Calcolato per	Trovato	
$(C^{17}H^{21}AzO^2, HCl)^2 PtCl^4)$	VIII	IX
Pt p. % 20,75	20,69	20,77

Esaminando di confronto la molecola dell'atropina, $C^{17}H^{23}AzO^{3}$, e quella del nuovo composto $C^{17}H^{21}AzO^{2}$, si rileva come questa rappresenti la prima spogliata degli elementi di una molecola di acqua. Propongo perciò di nominare la nuova base *apoatropina.*

Credevo che il prodotto della reazione tra l'acido azotico e l'atropina rappresentasse il risultato di una ossidazione più o meno profonda. Come si vede però entro questi limiti l'acido azotico esercita una azione disidratante.

È mio intendimento indagare se, ed in quali altre circostanze l'apoatropina si possa generare, impiegando allo scopo i varî mezzi disidratanti dai chimici adoperati nella preparazione di altri apoalcaloidi.

Sali di apoatropina.

L'apoatropina neutralizza gli acidi formando dei sali stabili e per la massima parte cristallini.

Essi hanno sapore amaro disaggradevole e sono dotati generalmente di uno splendore setaceo.

Darò brevi notizie di alcuni.

Solfato di apoatropina. $(C^{17}H^{21}AzO^{2})^{2}SO^{4}H^{2}, 5H^{2}O$. Questo bellissimo sale si ottiene neutralizzando l'apoatropina con acido solforico diluito. La massa cristallizza prontamente in forma di sottili lamine di aspetto perlaceo, rettangolari, visibili al microscopio.

È leggerissimo; inalterabile all'aria. Contiene acqua di cristallizzazione che perde completamente a 100° 105°.

I. gr. 0,4958 di sostanza, seccati a 100° 105° perdettero 0,0605
II. gr. 0,7856 » » » » 0,0965

Calcolato per $(C^{17}H^{21}AzO^{2})SO^{4}H^{2}, 5H^{2}O)$	Trovato I	II
Acqua p. % 12,33	12,20	12,28

I. gr. 0,4985 di sostanza seccata a 100° 105°, bruciati con carbonato di sodio e clorato di potassio, diedero 0,187 di $SBaO^{4}$

II. gr. 0,6845 di sostanza seccata a 100° 105°, bruciati con carbonato di sodio e clorato di potassio diedero 0,242 di $SBaO^{4}$

Calcolato per $(C^{17}H^{21}AzO^{2})SO^{4}H^{2}$	Trovato I	II
Solfo p. % 5,00	5,15	4,85

Ne determinai la solubilità.

Grammi 3,148 di soluzione satura a 10° C, lasciarono per evaporazione un residuo il quale seccato a 100° 105° pesava gr. 0,068. Questo sale è solubile adunque nella proporzione di una parte di sale anidro in 45,3 parti di acqua a 10°. È solubilissimo nell'alcool.

Cloridrato di apoatropina. Si prepara trattando l'apoatropina con acido cloridrico diluito. Il sale cristallizza immediatamente in forma di tavolette esagonali che costituiscono una massa bianca splendente, poco solubile nell'acqua fredda, molto solubile nell'acqua calda e nell'alcole.

Nitrato di apoatropina. È un sale facilmente cristallizzabile. È dotato di vivissimo splendore setaceo. È solubile nell'acqua meglio del solfato e del cloridrato.

Jodidrato di apoatropina. Si può preparare per doppia decomposizione, coll'ioduro di potassio e l'acetato di apoatropina, o meglio sciogliendo la base nell'acido iodidrico diluito e leggermente scaldato. È un sale cristallizzato in lunghi e fini aghi, pochissimo solubili nell'acqua fredda, solubilissimi nell'alcool.

Bromidrato di apoatropina. Si prepara come l'iodidrato. È come questo cristallizzato in lunghi aghi un po' meglio solubili nell'acqua, meno solubili nell'alcool.

Cromato di apoatropina. È un bel sale giallo brillante, cristallizzato in lamine esagonali pochissimo solubili. L'ho preparato per doppia decomposizione, e l'ho purificato facendolo cristallizzare dalla soluzione acquosa satura a caldo.

Acetato di apoatropina. Non l'ottenni peranco cristallizzato; è solubilissimo nell'acqua e nell'alcool.

Reazioni dei sali di apoatropina.

L' azione de' reattivi fu sperimentata di confronto, sopra soluzioni egualmente titolate di apoatropina ed atropina.

A tale scopo impiegai soluzioni acetiche perfettamente neutre, contenenti in peso l' uno per cento di alcaloido.

Nel quadro seguente sono riassunti i risultati ottenuti.

	Reattivo	Reazione ottenuta dalla atropina	Reazione ottenuta dalla apoatropina
1	*Acido tannico*	Precipitato bianco insolubile nell'acido cloridrico diluito. Se il reattivo non è di recente preparazione, il precipitato non si forma neanche inacidendo con acido cloridrico.	Precipitato bianco insolubile nell'acido cloridrico.
2	*Cloruro d'oro*	Precipitato giallo chiaro che cristallizza in gruppi di aghi.	Precipitato giallo chiaro abbondante che non cristallizza.
3	*Joduro di potassio e bismuto*	Precipitato giallo-arancio grumoso, abbondantissimo.	Precipitato giallo arancio grumoso abbondantissimo.
4	*Cromato di potassio*	Nulla.	Dopo qualche tempo, precipitato cristallino composto di bellissime tavole esogonali.
5	*Dicromato di potassio*	Nulla.	Precipitato giallo canerino abbondante che cristallizza in gruppi di tavole.
6	*Cloruro di sodio e palladio*	Nulla.	Precipitato bianco sporco che cristallizza in aghi di color giallo-isabella.
7	*Bicarbonato di sodio*	Nulla.	Nulla.
8	*Acido picrico*	Precipitato giallo canerino solubile in grande eccesso di reattivo. Questo precipitato cristallizza in gruppi di tavole rettangolari.	Precipitato giallo fioccoso, insolubile in eccesso di reattivo. Questo precipitato si mostra dopo qualche tempo cristallizzato in gruppi di aghi.
9	*Reattivo del Mayer*	Precipitato bianco abbondante.	Precipitato bianco abbondante.
10	*Joduro di cadmio e potassio*	Precipitato bianco abbondante solubile in eccesso di reattivo.	Precipitato bianco grumoso insolubile in eccesso di reattivo.

	Reattivo	Reazione ottenuta dalla atropina	Reazione ottenuta dalla apoatropina
11	*Cloruro di platino*	Precipitato giallo solubile in eccesso di reattivo. Per essicazione si ottiene una massa composta di minutissimi aghi gialli.	Abbondante precipitato giallo-isabella che si scioglie a tutta prima in eccesso di reattivo per separarsene nuovamente dopo brevi istanti, cristallizzato in aghi uniti a ciuffi.
12	*Bicloruro di mercurio*	Leggera opalescenza. Aggiungendo una piccola quantità di acido cloridrico si forma un precipitato bianco abbondante, solubile in lieve eccesso di acido.	Precipitato bianco grumoso solubile nell' acido cloridrico e che si deposita nuovamente cristallizzato in gruppi di tavole esagonali.
13	*Joduro di potassio*	Nulla.	Precipitato bianco che cristallizza immediatamente in lunghi aghi incolori, visibili ad occhio nudo.
14	*Acido iodidrico iodurato*	Precipitato rosso bruno che cristallizza in aghi disposti a croce.	Precipitato rossastro che cristallizza in aghi disposti in forme arborescenti.
15	*Bromuro di potassio*	Nulla.	Nulla. Per essicazione si formano de' lunghi aghi scoloriti, brillanti visibili ad occhio nudo.
16	*Carbonato di ammonio*	Nulla.	Nulla.
17	*Acido solforico concentrato*	L' atropina libera trattata con questo reattivo, a freddo non produce coloramento alcuno; a caldo svolge un leggero coloramento bruno: aggiungendo acqua fredda si produce un grato odore di fior di bianco spino che si trasforma in quello dell' essenza di amandorle amare per aggiunta di biossido di piombo.	L' apoatropina libera a freddo non produce colorazione; a caldo si svolge un magnifico ed intenso coloramento giallo-canerino che sparisce per aggiunta di acqua ed il liquido emana un leggero odore di bianco spino che non cangia per addizione di biossido di piombo.
18		La base libera sciolta nell' acido azotico fumante, per aggiunta di acido solforico concentrato non produce coloramento alcuno. Aggiungendo ammoniaca la massa rimane incolora.	La base libera sciolta sull' acido azotico fumante, per aggiunta di acido solforico concentrato si colora in giallo canerino. Aggiungendo ammoniaca si svolge istantaneamente una colorazione violetta intensa che passa al rosso bruno.

Sdoppiamento della apoatropina.

Dieci grammi di apoatropina furono chiusi insieme a sessanta grammi circa di acido cloridrico fumante, entro tubo di vetro, e scaldati per quattro ore alla temperatura di 120°. 130°.

Al fondo della massa liquida si raccolse uno strato semifluido di colore bruno.

Si separò da questo strato il liquido cloridrico sopranuotante, che era limpido e scolorito e si lavò più volte con acqua.

L' acqua di lavamento produsse nel liquido cloridrico un intorbidamento bianco con separazione di una materia vischiosa che fu raccolta su filtro, lavata, e sciolta insieme al sedimento bruno rimasto aderente al tubo, mediante carbonato di sodio diluito.

Si ebbero così due liquidi; l' uno A acido; l' altro B alcalino, contenente in soluzione le materie insolubili nell' acido cloridrico.

Il liquido acido A fu primamente dibattuto con etere, che, separato mediante imbuto a chiave, fu messo in disparte. In appresso dopo averlo neutralizzato con ammoniaca, lo svaporai al bagno maria. Trattai il residuo dell'evaporazione con alcool concentrato che separai dalla parte rimasta indisciolta per feltrazione e distillai.

Il residuo della distillazione, addizionato di un eccesso di potassa caustica fu agitato con nuovo etere.

La soluzione eterea disseccata sopra carbonato di potassio anidro, filtrata ed evaporata a piccolo volume, fu messa sotto campana in presenza di acido solforico.

Essa fornì una massa cristallizzata in lunghe lamine sottili, incolore fusibili a 60° 61°, solubilissime nell'acqua, alla quale comunicarono forte reazione alcalina.

Questa soluzione acquosa diede nel nitrato d'argento un precipitato bruno polveroso, insolubile in un eccesso di precipitante, solubile nell'ammoniaca: col solfato di rame un precipitato voluminoso azzurro chiaro.

La stessa soluzione neutralizzata con acido cloridrico, fornì per evaporazione una massa cristallizzata in lunghi e sottili aghi, disposti a stella, visibili al microscopio; e coi reattivi si comportò nel modo seguente:

Acido tannico; precipitato bianco.

Acido iodridico iodurato; precipitato bruno-rosso in goccioline.

Cloruro di platino; nessun precipitato. Per evaporazione si ottengono dei grossi prismi di color giallo-arancio solubili nell'acqua, insolubili nell'alcole.

Acido picrico; leggiero intorbidamento; per evaporazione si ottengono dei cristalli tabulari gialli.

Cloruro d'oro; precipitato giallo che cristallizza in tavole rombiche (?) unite a croce.

Identici risultati furono ottenuti operando di confronto sopra una soluzione di cloridrato di tropina.

Ottenni anche ben marcata la reazione della tropina dal Vitali ultimamente scoperta, operando nel modo seguente.

Introdussi entro capsulina di porcellana una piccola quantità della sostanza non salificata e vi aggiunsi una goccia di uno sciolto di solfato di rame al 10 per $^0/_0$, poi una gocciola di bromo ed infine una piccola quantità di acqua. Scaldai fino ad avere scacciato il bromo eccedente. Ne rimase un liquido scolorito che evaporai lentamente.

Soffiando entro la capsuletta ancor calda, quando l'evaporazione fu quasi al termine, nei punti ove si era depositata la materia primamente sciolta, si svolse una bellissima colorazione violacea. Aggiungendo acido acetico e scaldando il liquido assunse una colorazione verde; ed il residuo della evaporazione trattato come sopra si colorò nuovamente in violetto.

All'analisi operata sopra la base seccata sotto campana in presenza dell'acido solforico, ottenni i numeri seguenti

I. gr. 0,4358 di sostanza diedero gr. 1,086 di CO^2 gr. 0,423 di H^2O
II. gr. 0,3846 » » gr. 0,955 di CO^2 gr. 0,378 di H^2O

Calcolato			Trovato	
per	$C^8\ H^{15}$ Az O		I.	II.
C^8	96	68,09	67,96	67,72
H^{13}	15	10,64	10,78	10,92
Az	14	9,93	—	—
O	16	11,34	—	—
	141	100,00		

Cloroplatinato. Lo preparai versando un eccesso di cloruro di platino in uno sciolto di cloridrato della base. Non si formò alcuno precipitato. Il liquido fu evaporato al bagno maria fino a secco ed il residuo, ripreso con alcole assoluto, fu raccolto sopra filtro, lavato completamente con alcool e seccato alla stufa.

I. gr. 0,5456 di sale di platino fornirono gr. 0,158 di Pt

II. gr. 0,4388 » » gr. 0,126 di Pt

Calcolato per	Trovato	
$(C^8\ H^{15}$ Az O, H Cl$)^2$ Pt Cl^4	I	II
Platino per % 28,4	28,96	28,71

Questi numeri come si vede concordano con quelli della *tropina*.

Il soluto alcalino sodico B fu trattato prima con piccola quantità di acido cloridrico, affine di precipitare la materia colorante, poi, dopo feltrazione, con acido in eccesso.

Si formò un precipitato bianco abbondante grumoso, pochissimo solubile nell'acqua fredda, poco solubile nella calda. Lo trattai, dopo averlo asciugato con piccola quantità di etere, al quale cedè una materia vischiosa, acida.

La parte rimasta indisciolta era polverosa, bianca. Fondeva a 196°-198°.

Si sciolse completamente nell' alcool dal quale si separò cristallizzata per aggiunta di acqua, in forma di laminette rombiche visibili al microscopio.

Trattata con acido solforico a freddo, non diede colorazione alcuna: scaldando si produsse un bel coloramento giallo-canerino. Per aggiunta di acqua si svolse un grato odore di fiore di bianco-spino. Mescolandovi biossido di piombo l'odore non cambiò.

Identicamente si comporta l' acido isatropico.

Sciolta in piccola quantità di acido azotico, per aggiunta di acido solforico, non produsse coloramento alcuno. [1]

All' analisi fornì i numeri seguenti:

I. gr. 0,4084 di sostanza seccata a 100°105° diedero 1,093 di CO^2; 0,215 di H^2O

II. gr. 0,3785 » » » » 1,009 di CO^2; 0,196 di H^2O

Calcotato per			Trovato	
	$C^9\ H^8\ O^2$		I	II
C^9 =	108	72 97	72,99	72,70
H^8	8	5 41	5,85	5,75
O^2	32	21 62	—	—
	148	100,00		

(¹) In queste condizioni il Vitali ha ottenuto dall' *acido tropico* un bel coloramento violetto che passa al rosso sangue. Un eguale risultato l' ho avuto operando sull'acido *atropico*.
L' acido *isatropico* non dà questa reazione.

Le proprietà fisico-chimiche e la composizione centesimale di questo prodotto concordano, come si vede, esattamente con quelle dell'acido *isatropico*.

L'etere con cui era stato trattato il liquido acido A prima di estrarne la *tropina* fu sbattuto col liquido sodico dal quale si era precipitato, per mezzo dell'acido cloridrico, l'acido *isatropico*.

Separato per mezzo dell'imbuto a chiave e messo a svaporare, questo etere lasciò un residuo bianco confusamente cristallino, di reazione acida, completamente solubile nel benzolo (l'acido tropico è insolubile in questo veicolo).

Dal benzolo per evaporazione lenta si ottenne in forma di una massa cristallizzata in gruppi di tavole trasparenti fusibili a 104°-106°, pochissimo solubili nell'acqua fredda, discretamente solubili nell'acqua calda.

Sciolta in piccola quantità di acido azotico, svolse per aggiunta di acido solforico una bella colorazione violacea che passò poi al rosso di sangue.

Trattata coll'acido solforico a freddo non diede colorazione alcuna: scaldando si produsse un bel color giallo canerino. Versando acqua fredda, si svolse un gradito odore di fior di bianco spino. Aggiungendo biossido di piombo, si avvertì l'odore dell'essenza di amandorle amare.

In egual modo si comporta l'acido *atropico*.

All'analisi si ottennero i numeri seguenti

I. gr. 0,5135 di sostanza diedero 1,369 di CO^2; 0,262 di H^2O

II. gr. 0,3896 » » 1,040 di CO^2; 0,1948 di H^2O

Calcolato per			Trovato	
	$C^9H^8O^2$		I	II
C^9	= 108	72,97	72,71	72,80
H^8	8	5,41	5,67	5,55
O^2	32	21 62	—	—
	148	100 00		

Questa sostanza per le sue proprietà fisico-chimiche e per la composizione centesimale si mostra identica all'*acido atropico*.

Dunque l'*apoatropina* per isdoppiamento, coll'acido cloridrico fumante, fornisce *tropina*, *acido isatropico* ed *acido atropico*.

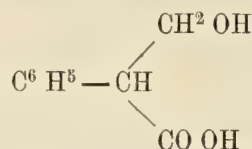
Non ho tenuto conto dei prodotti secondarii che, in piccola quantità, prendono contemporaneamente nascimento. Principale fra essi la materia vischiosa che ho separato dall'acido isatropico trattandolo appena precipitato con piccola dose di etere.

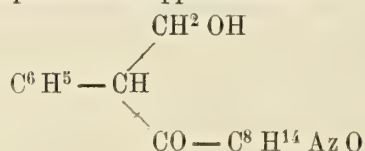
Giova però notare che tale sostanza vischiosa si ottiene anche nello sdoppiamento dell'atropina, qualora esso sdoppiamento venga condotto come per l'apoatropina.

Costituzione dell'apoatropina.

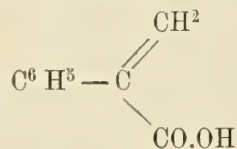
L'atropina scaldata per alcune ore a 120° 130° con acido cloridrico fumante, si sdoppia in acido tropico e tropina. L'acido tropico viene però trasformato in parte, per opera dell'agente di sdoppiamento, in *acido atropico* ed *isatropico*, i quali si trovano nel prodotto finale della reazione.

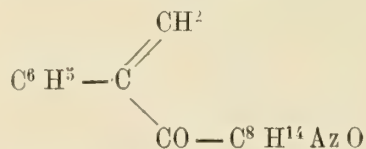
Addottando per l'*acido tropico* la formula di costituzione ultimamente confermata da Ladenburg e Rügheimer [1] cioè

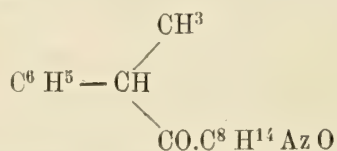
$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad CH^2\,OH \\ \qquad\qquad\ \diagup \\ C^6\,H^5 - CH \\ \qquad\qquad\ \diagdown \\ \qquad\qquad\quad CO\,OH \end{array}$$

là composizione dell' atropina sarà rappresentata da

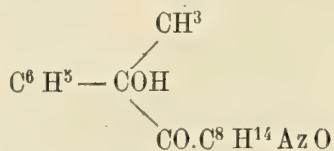
$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad CH^2\,OH \\ \qquad\qquad\ \diagup \\ C^6\,H^5 - CH \\ \qquad\qquad\ \diagdown \\ \qquad\qquad\quad CO - C^8\,H^{14}\,Az\,O \end{array}$$

L' apoatropina scaldata per quattro ore a 120° 130° con acido cloridrico fumante, non fornisce punto di *acido tropico*, ma solo *tropina acido atropico* ed isatropico (originato quest'ultimo certamente dall'azione dell' acido cloridrico sull' acido atropico).

La sua composizione si potrà quindi indicare colla formula dell' *acido atropico*

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad CH^2 \\ \qquad\qquad\ /\!/ \\ C^6\,H^5 - C \\ \qquad\qquad\ \diagdown \\ \qquad\qquad\quad CO.OH \end{array}$$

Sostituendo all' OH carbossilico il radicale monovalente $C^8\,H^{14}\,Az\,O$, nel modo seguente

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad CH^2 \\ \qquad\qquad\ /\!/ \\ C^6\,H^5 - C \\ \qquad\qquad\ \diagdown \\ \qquad\qquad\quad CO - C^8\,H^{14}\,Az\,O \end{array}$$

Ho istituito nuove esperienze allo scopo di tentare la formazione della *idrapoatropina* o *idratrotropeina*

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad CH^3 \\ \qquad\qquad\ \diagup \\ C^6\,H^5 - CH \\ \qquad\qquad\ \diagdown \\ \qquad\qquad\quad CO.C^8\,H^{14}\,Az\,O \end{array}$$

Dalla quale, per ossidazione del gruppo — CH = spero di ottenere un' isomero dell'atropina l'*atrolattotropeina*

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad CH^3 \\ \qquad\qquad\ \diagup \\ C^6\,H^5 - COH \\ \qquad\qquad\ \diagdown \\ \qquad\qquad\quad CO.C^8\,H^{14}\,Az\,O \end{array}$$

Intendo pure di tentare la sintesi della apoatropina, operando analogamente a quanto ha fatto il Ladenburg per l' atropina

[1] Deutsche chemische Gesellschaft T. 13 pag. 373.

Azione fisiologica dell' apoatropina.

Le esperienze fisiologiche furono eseguite dall' egregio signor dottor Guglielmo Malagola, sulla rana, sul cane e sull' uomo, operando di confronto coll' atropina.

Ecco ora in sunto il risultato delle osservazioni fatte.

Azione sulle rane

dell' atropina	*dell' apoatropina*
La rana era di grossa taglia, vivace abbastanza per le condizioni di temperatura (9.° cent.) Se ne mise a nudo il cuore e se ne contarono le pulsazioni che furono 22 per minuto, ampie e regolari; i moti di deglutizione 46; i moti respiratorii inapprezzabili. Sensibilità generale normale. Pupilla normale. Si iniettarono cinque milligrammi dell' alcaloido, in soluzione acetica neutra, sotto la pelle della coscia sinistra.	La rana era di media taglia, discretamente vivace. Se ne mise a nudo il cuore e se ne contarono le pulsazioni che furono 24 per minuto, amplie e regolari; i moti di deglutizione 68, i moti respiratorii impercettibili: la sensibilità generale regolare; la pupilla normale. Si iniettarono 5 millig. dell'alcaloido in soluzione acetica neutra, sotto la pelle della coscia sinistra.
20 minuti dopo l' iniezione	
Pulsazioni cardiache 20 regolari.	*Pulsazioni cardiache* 16 regolari.
Moti di deglutizione 36.	*Moti di deglutizione* 28.
Moti respiratorii 20 regolari.	*Moti respiratorii* inapprezzabili.
Sensibilità generale-regolare.	*Sensibilità generale* molto aumentata. Eccitando la pelle colle pinzette od anche lambendola semplicemente con pennello, si hanno movimenti convulsivi generali.
Pupilla molto dilatata.	*Pupilla* normale.
Ad intervalli si osservano convulsioni cloniche.	Non si osservano convulsioni.
40 minuti dopo l' iniezione	
Pulsazioni cardiache 20 regolari.	*Pulsazioni cardiache* 16 regolari.
Moti di deglutizione 42 pochissimo estesi.	*Moti di deglutizione* 32 irregolari.
Moti respiratorii 24 poco amplii.	*Moti respiratorii* impercettibili.
Sensibilità generale regolare.	*Sensibilità generale* ancora accresciuta. L'arto posteriore sinistro è paralizzato.
Pupilla molto dilatata.	*Pupilla* normale.
Convulsioni spontanee ad accessi.	

un' ora dopo l' iniezione

Pulsazioni cardiache 20 regolari.	*Pulsazioni cardiache* 16 regolari.
Moti di deglutizione 36.	*Moti di deglutizione* 30 irregolari.
Moti respiratorii 6.	*Moti respiratorii* inapprezzabili.
Sensibilità generale non alterata.	*Sensibilità generale* alquanto diminuita.
Pupilla sempre molto dilatata.	*Pupilla* normale.
Le convulsioni hanno cessato.	

Si tralasciò di osservare le rane.

Ventiquattro ore dopo l'iniezione erano vive entrambi.

Esperienza sul cane.

Avendo disponibile un solo animale, si giudicò opportuno di provare prima l'azione dell' apoatropina e nel giorno susseguente, se l'animale sopravviveva, quella dell'atropina a dosi uguali.

Il cane era di piccola taglia e di età molto avanzata.

Dispostolo opportunamente si prese la temperatura dell'intestino retto che fu trovata di 39° 3. Aveva 140 battiti cardiaci per minuto e 16 moti respiratorî.

Gli furono iniettati mediante siringa di Pravaz, nel tessuto sottocutaneo dell'addome, gr. 0,01 di apoatropina in soluzione acetica perfettamente neutra.

Dieci minuti dopo l'iniezione la temperatura era di 39°,6; i battiti cardiaci 116 per minuto; i moti respiratorî 16; la pupilla inalterata.

Dopo venti minuti si notarono leggeri movimenti convulsivi clonici, generali che si fecero man mano più frequenti, i battiti cardiaci erano ridotti a 100 per minuto e i moti respiratorî restavano 16; la pupilla si manteneva normale.

Dopo trenta minuti l'animale venne messo in libertà. Incedeva a stento, con incertezza, accasciandosi di quando in quando, e veniva preso ad accessi da scosse convulsive che si succedevano con rapidità l'una all'altra.

Dopo quarantacinque minuti le convulsioni assunsero proporzioni più allarmanti: l'animale si rovesciò sul fianco dibattendo gli arti a scatti e tentando invano di raddrizzarsi. Riesciva solo a mettersi bocconi cogli arti divaricati quasi essi non potessero reggere il peso del corpo. La sensibilità generale in queste condizioni era molto attutita. La pupilla si manteneva sempre normale.

Durante uno di questi accessi parve che l'animale fosse per morire; ma con grande sorpresa lo si vide ad un tratto rialzarsi barcollando dapprincipio alquanto, ma poi rimettendosi in brevissimo tempo nel suo stato normale come se nulla gli fosse avvenuto.

Il giorno appresso l'animale essendo completamente ristabilito, si procedè allo esperimento coll'atropina.

Dapprima fu come nell'altra prova notata la temperatura che era di 39°. Le pulsazioni cardiache erano 118 per minuto; i moti respiratorî 16.

Gli furono iniettati gr. 0,01 di atropina in soluzione acetica perfettamente neutra.

Quasi immediatamente si notò una certa dilatazione della pupilla.

Dopo dieci minuti la temperatura non era variata; i battiti cardiaci erano saliti a 174 per minuto, i moti respiratorî restavano 16. La pupilla era molto dilatata.

Dopo venti minuti l'animale era molto agitato, ma non aveva convulsioni. I battiti cardiaci erano 184 per minuto; i moti respiratorî si mantenevano 16. La pupilla dilatatissima e l'iride quasi scomparsa.

Dopo trenta minuti l'animale venne messo in libertà. Aveva qualche tremito generale, ma incedeva abbastanza sicuro, accasciandosi soltanto a quando a quando sugli arti posteriori.

Camminando urtava contro gli ostacoli e sfuggiva la luce tentando di rintanarsi negli angoli più oscuri della stanza.

Dopo quarantacinque minuti le condizioni non erano sensibilmente variate: soltanto l'animale era molto agitato ed appariva assai sofferente; guaiva di continuo muovendosi senza tregua da un punto all'altro.

Si mantenne in questo stato per parecchie ore. Non essendovi alcuna cosa nuova a rilevare si cessò dall'osservarlo. La midriasi si manteneva assai intensa dopo 24 ore.

Esperienza sull'uomo.

Si esperimentò di confronto l'azione dell'apoatropina e quella dell'atropina in forma di collirî.

La prova fu fatta sopra due individui di costruzioni fisiche press' a poco eguali.

Prima dell'esperimento le pupille dei due pazienti erano egualmente ristrette, le iridi dello stesso colore grigiastro.

Fu instillata in ambedue gli occhi dell'uno una goccia della soluzione acetica neutra di apoatropina all'uno per cento; ed egual dose di atropina negli occhi dell'altro.

Dopo cinque minuti si notò negli occhi ove fu istillata l'atropina una leggera dilatazione pupillare senza però rossore della congiuntiva.

In quelli ove fu instillata l'apoatropina, non si notò traccia di midriadi, ma solo un po' d'arrossamento alla congiuntiva; ed il paziente accusò un leggero bruciore.

Dopo mezz'ora negli occhi atropinati si aveva una fortissima dilatazione che non cessò malgrado la più viva luce. Negli occhi apoatropinati non si aveva alcuna dilatazione pupillare; i movimenti dell'iride e del muscolo cigliare erano perfetti; il rossore era scomparso.

Dopo ventiquattro ore negli uni si manteneva la midriasi e nulla di anormale si osservava negli altri.

Tralasciando di trarre conseguenze sopra altri fatti che per la loro incertezza meritano di essere ulteriormente confermati si può concludere con tutta sicurezza:

1° Che l'apoatropina non dilata la pupilla e non ha altra azione sull'occhio, salvo quella locale irritativa;

2° Che rallenta notevolmente i battiti cardiaci;

3° Che induce, a dosi mediocremente elevate, delle convulsioni cloniche caratteristiche, ad accessi in forma di violenti contrazioni rapide;

4° Che i sintomi dell'avvelenamento si dissipano con molta rapidità.

Monografia zootomico-zoologica sul Capidoglio arenato a Porto S. Giorgio.

Memoria del Socio L. DE SANCTIS

letta nella seduta del 7 dicembre 1879.

(Con sette tavole)

INTRODUZIONE

Il Ministero della Pubblica Istruzione, ricevuto avviso dal chmo sig. conte Luigi Salvadori, sindaco di Porto s. Giorgio, che un capidoglio si era arenato in quella spiaggia nella notte del 10 marzo 1874, mi diede speciale missione di raccoglierne gli organi pel Museo zoologico-zootomico della R. Università di Roma.

Giunto sul luogo ebbi le seguenti notizie, che credo utili qui riferire, potendo servire in casi consimili. Alle 3 ant. del giorno 10 marzo il telegrafista della stazione ferroviaria, presso la riva del mare, vide muovere nell' acqua una massa nera, che suppose essere un battello capovolto; solo alle 6 del mattino fu scoperto l'animale da alcuni pescatori, che percorrevano il lido, ed in breve si diffuse la nuova nel vicino paese, dell'arenamento di un grosso cetaceo. L'animale era giunto a capofitto contro la sponda, vi si era fortemente incuneato, ed aveva la enorme coda allo scoperto, che agitava di tanto in tanto per divincolarsi, ma inutilmente, e solo potè descrivere un semicerchio il cui centro era la testa.

Lo sfiatatoio gettava nello intervallo di uno o due minuti una colonna di acqua ad un'altezza approssimativa di m. 0,70. Nel giorno 11 i movimenti del cetaceo si fecero sempre più lenti. La pinna codale, che sporgeva fuori l'acqua, era mossa solo dalle onde del mare agitato, lo sfiatatoio gettava ad intervalli più lontani e la colonna di acqua scemava in altezza; finalmente alla sera di quel giorno, ogni movimento cessò, e con esso ogni indizio di vita. Si disse da alcuni marinai, lasciati a guardia, di avere udito durante la notte alcuni muggiti, che paragonarono al suono della buccina o tromba marina.

Il lavoro, per la estrazione del cetaceo dalle acque sulla sponda asciutta, fu lungo e faticoso; sebbene vi fossero marinai esperti, e forniti di grosse gomene, s' incontrarono gravi difficoltà.

Fin dal giorno 10 si legò una gomena all'origine della pinna codale, e con potente argano si potè appena far deviare l'animale di qualche metro dalla sua posizione. Nel giorno 11 si aumentarono gli sforzi, aggiungendo due altre gomene, ma con poco profitto; alla sera dello stesso giorno arrivarono 17 uomini ed un Tenente della pirocorvetta s. Giovanni, ancorata in Ancona, ma senza attrezzi. Nel 12 e 13 continuarono i lavori e, facendo rotolare il capidoglio sul suo asse, si potè tirarlo in

gran parte fuori acqua, al quale risultato contribuì molto la marea, che nella notte del 12 lo rimosse, facendogli prendere una direzione parallela alla spiaggia. Soltanto nella mattina del 14, con l'aiuto di una grossa gomena inviata da Ancona dalla indicata pirocorvetta s. Giovanni, si potè rotolare il cetaceo a parecchi metri di distanza dalla riva, dove rimase adagiato col suo lato destro sopra alcune travi, perchè non si affondasse nell'arena.

Al mio arrivo era già stata aperta la cavità addominale, asportato quasi tutto l'intestino, e gran parte delle cavità gastriche; in quel cumulo di materiali andarono dispersi pure i reni, che non fu possibile di rinvenire, anche perchè il tessuto connettivo enfisemato, nascondeva nel suo mezzo gli organi, che a gran difficoltà si potevano rintracciare. Stando così le cose ci vollero altri dieci giorni di faticoso lavoro, ad onta che fossi stato coadiuvato da una ventina di operai laboriosi, per raccogliere tutti gli organi principali dell'animale, ed isolarne le parti più importanti di ciascuno di essi; non essendo stato possibile conservarli interi per la loro enorme grandezza. Dopo estratti gli organi vi è stato bisogno di parecchi mesi di lavoro nel Museo zoologico-zootomico per assicurarne la conservazione. Per queste favorevoli condizioni è riuscito possibile uno studio anatomico, abbastanza completo, del capidoglio, e di cui si presentano per la prima volta le figure di quasi tutti gli organi, eseguite con molta cura e precisione dal sig. Adolfo Apollonj.

Io ho trasandato di occuparmi dello scheletro, parte che è stata la sola studiata accuratamente dai zootomisti, perchè conservata in molti Musei; mentre i visceri per le difficoltà che presentano ad essere raccolti e conservati, non sono stati altrettanto accuratamente studiati, o solo se ne ha appena qualche notizia molto breve e sommaria, puramente descrittiva e senza alcuna figura.

Da quanto si è detto sopra, circa le difficoltà inerenti allo studio dei grandi cetacei, si comprende la scarsezza degli studî anatomici sui medesimi; perchè i balenieri di professione, troppo occupati, nello interesse commerciale, a raccogliere il grasso ed altri materiali utili di questi animali, come lo spermaceti, l'ambra grigia e l'avorio, debbono trascurare gli organi, che esigerebbero troppo tempo e penoso lavoro pel loro isolamento e per la difficoltà di conservazione. A ciò potrebbe essere di molto vantaggio un personale scientifico fornito di grandi mezzi, associato alle spedizioni baleniere, per raccogliere e studiare fatti, che sono ancora un vivo desiderio per i naturalisti, e che potrebbero chiarire molte intricatissime quistioni, e di alta importanza, non solo per la cetologia in particolare, ma anche per la biologia in generale.

L'arenamento stesso di molti capidogli avvenuto in qualche caso, non ha neppure fornito occasione di accurati studî, e ciò per molte ragioni. Questi studî anatomici sui cetacei non erano coltivati, nei tempi remoti, con quello impegno proprio dei nostri, per cui chi ne aveva avuto occasione, si era limitato a poche notizie sui caratteri esterni. Gli arenamenti avvenuti in epoche recenti, o erano di animali già morti da qualche tempo, ed in istato di putrefazione, da non permettere uno studio; ovvero non avvennero in tanta vicinanza della spiaggia da potere tirare fuori, senza grandi difficoltà, l'animale; od anche perchè capitarono in luoghi deserti, dove non era

possibile avere un aiuto di persone e per molti giorni di seguito, e con tutto il corredo necessario, per raccogliere, conservare e trasportare così grandi masse; od anche infine perchè, nelle condizioni le più favorevoli di luogo, non giunsero persone, capaci di farne uno studio in tempo opportuno, prima che l'avidità del guadagno dei pescatori non avesse messo tutto in pezzi. Per le suddette ragioni il caso di arenamento di un capidoglio adulto, avvenuto a Porto S. Giorgio, è a considerare come uno dei più favorevoli, per il concorso di moltissime circostanze di luogo, di persone e di mezzi, che ha permesso la raccolta di un materiale prezioso per la sua rarità, e credo l'unico esistente in questo stato di conservazione, e che ha fornito l'opportunità al presente studio.

Colgo una tale occasione per rendere riconoscenti grazie al Ministero della Pubblica Istruzione, che ha dato il suo concorso nell' arricchire il Museo zoologico-zootomico della R. Università di Roma di questa importante raccolta, ed al conte Salvadori, che mi fu cortese di affettuosa ospitalità, durante il tempo dei miei lavori a Porto S. Giorgio.

Cenno storico e bibliografico sul Capidoglio.

Il riassumere quanto si è detto di più importante dai diversi autori in diversi tempi intorno al capidoglio è argomento difficile, complicato e quasi inestricabile; ciò dipende dal perchè pochissime sono state le occasioni veramente favorevoli in cui questi animali si sono potuti bene osservare. L'impossibilità di conservare l'animale intero per la sua sterminata mole non aveva finora permesso di fare uno studio molto accurato, e tutto si è fatto in un modo più o meno affrettato, e non sempre da persone, che potevano rilevare i caratteri più essenziali dell'animale, e fissarli con precisione sia con la descrizione, sia con la figura. È tale lo stupore che produce la vista di un organismo così lontano dalle dimensioni solite ad osservare, che si resta quasi disorientati e non si sa più dove incominciare, e come cogliere l'assieme di parti così distanti tra di loro, ed i singoli particolari di ciascuna di esse. Superata la prima sorpresa, si può sul luogo acquistare una sufficiente idea dello stato delle cose, e tutto sembra chiaro; ma quando il pezzo è distrutto incominciano a sorgere dei dubbî, che si vanno sempre più aumentando, al punto da lasciare una vera confusione, se non vi sia una figura esatta, od alcune parti più importanti conservate, le quali servano come termine di riscontro per le altre. Ciò può spiegare e giustificare in qualche modo il grande disaccordo che si trova fra uno scrittore e l'altro, e fra una figura e l'altra, e tanto più che i dati, riferiti da antichi e da moderni scrittori, sono spesso raccolti da relazioni di marinai, o di altri, che non erano in grado di fare una esatta osservazione, nè così abili da rilevare una figura, e dal punto di vista il più caratteristico, per poter definire l'animale. Per cui in mezzo al materiale raccolto dagli scrittori, vi è un gran numero di osservazioni esatte, frammiste ad altre del tutto erronee, e le quali può solo discernere chi ha avuto la opportunità di esaminare i fatti direttamente; mentre invece quelli che, anche autorevolissimi, non hanno avuto tale occasione, servendosi senza norma sicura di quei dati raccolti a quel modo, han fondato generi e specie di capidogli, che non resistono ad una critica,

ed in ultima conclusione si arriva al punto, che tutta la *Fisceterologia*, con ogni probabilità, si riduce ad un solo genere e ad una sola specie, cioè, al *Physeter macrocephalus* di Fabricius O.

Ciò posto, rinviando a quanto è stato detto estesamente nelle opere qui appresso citate, mi limito a dire quello che può essere più utile a far conoscere la connessione fra i diversi autori, a fine di giungere alle condizioni presenti riguardo al capidoglio, e così collegare le mie osservazioni a quelle precedenti, fonderle e compenetrarle in un tutto solo.

Aristotile, che parla di delfini e di balene, non distingue i capidogli da quelli, quantunque il nome di *Physeter* fosse di greca origine, indicando *fistola*, che accenna allo spiraglio. Plinio cita nel libro IX cap. IV il nome di *Physeter*, senza darne i caratteri, ed indicando solo al proposito di questi animali, che nel mare gallico, essi si innalzavano fuori e dritti, fino a spruzzare di acqua le vele delle navi.

Nel 1577 il Parè diede una figura di capidoglio arenato ad Anversa. Nel 1598 se ne ebbe un' altra dal Clusius di capidoglio arenato a Beverwyk, anche sulle coste di Olanda. Nel 1692 il Sibbald, nella sua *Phalaenologia nova*, fu il primo a distinguere i cetacei con denti solo alla mascella inferiore, e ciò fu un buon criterio. Però l'aver voluto trovare tra il suo esemplare del 1689, e quelli figurati da Clusius e Jonston (che essendo rappresentati dal lato del ventre non mostrano nè pinna dorsale, nè particolarità nei denti) una differenza fondata sulla forma della pinna dorsale e dei denti, non è ammissibile. Così neppure è giusto il considerare l'esemplare osservato nel golfo di Forth, come specie differente da quello delle Orcadi del 1687, perchè l'uno ha i denti aguzzi e l'altro ottusi; essendo conosciuto che le differenze di forma, grandezza ed anche di numero dei denti, variando secondo il sesso, l'età e gli individui, non possono essere di alcun fondamento come differenza specifica. La terza specie del Sibbald, fondata sopra un enorme sviluppo della pinna dorsale, non essendo stata da lui figurata, nè mai più da altri veduta, ma poggiata sopra relazioni vaghe ed incerte, non merita maggior fiducia. La quarta specie infine, si è riconosciuto, non essere un capidoglio, ma un beluga. Anche il carattere desunto dalla posizione dello spiraglio, nel mezzo del muso in quello di Forth, e sulla fronte in quello delle Orcadi, è affatto insostenibile. Per conseguenza nel Sibbald non si trova alcun dato sicuro per distinguere il capidoglio in quattro specie, come egli fece, perciò esse sono inaccettabili. Il Ray non avendo osservazioni proprie, seguì il Sibbald. Artedi fece lo stesso, e solo volle distinguere le stesse specie in due gruppi, fondandosi sullo incerto carattere della presenza o mancanza di pinna dorsale.

Dopo le nuove osservazioni di Hasaeus, Dudley, Despelette, Anderson, Bayer, il Brisson aumentò a sette le specie di Artedi, riunendole nel solo genere *Physeter*; però avendo anch'egli stabilito le sue specie sulle varietà dei denti, e delle bozze dorsali, e sopra altri caratteri, variabili da un individuo all'altro, per sesso e per età, non può riscuotere maggior fiducia degli altri.

Lo stesso Linneo ritornò alle specie ammesse dall'Artedi; però le riunì nel solo genere *Physeter*.

In seguito ad altri lavori del Pennant, Robertson, Fabricius O. e Lecoz, che invero aggiunsero poco di nuovo, anche il Bonnaterre ritornò sul numero delle specie,

ne fece sei, escluse il beluga del Brisson, ed accettò la specie *Ph. microps*, che Fabricius aveva fondato sulla osservazione di una sola mascella inferiore, e sopra vaghe notizie ricevute. Col nome di *Ph. trumpo* riunì il capidoglio di Hasaeus (detto a denti aguzzi dal Brisson) quello di Dudley, di Anderson (che nelle isole Bermude è chiamato *trompo*) di Despelette, di Pennant, e di Robertson. Col nome di *grand cachalot*, riunì al *Ph. macrocephalus* di Fabricius O. i trentuno capidogli arenati in una volta ad Audierne, e la prima specie di *cachalot* del Brisson. Il *Ph. cylindricus* del Bonnaterre è quello di Anderson, che questi figura e descrive come sua terza specie. Tutta questa complicata distinzione fondata sopra la forma della pinna dorsale e dei denti, caratteri, come più volte ho ripetuto, affatto insufficienti per la loro variabilità, non è accettabile. Con tutto che dal Bonnaterre al Lacépède non vi fossero state nuove pubblicazioni, pur nondimeno questi ritentò nuove combinazioni sopra i vaghi ed incerti materiali preesistenti, e per conseguenza le sue otto specie, ripartite in tre generi, fondati sulla presenza di natatoria, e di bozza dorsale, o sulla mancanza di entrambe, non hanno base più solida delle altre. Nè è stato di vantaggio l'avervi aggiunto la posizione dello spiraglio, che, come si vedrà, è la parte la più sbagliata nelle figure e nelle descrizioni degli autori, da cui solo si può rilevare in genere, che è poco distante dall'estremo del muso. Il passare in rassegna le otto specie del Lacépède sarebbe un dilungarsi senza profitto. Il Desmarest, che venne in seguito, ammise i tre generi, e le otto specie del Lacépède, e ve ne aggiunse una nona. È veramente singolare il vedere scrittori così perspicaci, affaticarsi incessantemente, e poco proficuamente per la mancanza di dati di osservazioni sufficienti ed esatte, e cadere in contraddizioni, perchè tra le osservazioni ritenute come esatte, ve ne erano altre erronee, incompatibili col rimanente.

Il Cuvier non ebbe mai la occasione di esaminare l'animale intero, e le sue osservazioni furono fatte solo su mascelle, o porzioni di esse; avendo notato delle differenze, aveva creduto perciò potervi essere differenze specifiche tra i capidogli dei mari antartici, e quelli del nord, i soli che sono stati osservati con più frequenza; ma egli si astenne dal risolvere la quistione in questo senso, e ritenne la conclusione, dopo l'esame dei lavori anteriori, che il capidoglio non avesse che una specie unica. Nè a questa conclusione può fare ostacolo l'osservazione del Camper, che ammetteva una differenza specifica tra il cranio di un capidoglio di Audierne ed un altro di Scheveningen, perchè basata sopra materiali insufficienti.

Da tutto ciò si rileva che molto antichi, scarsi ed incerti sono i dati di osservazione su cui è stato fondato un numero vario di specie, e spesso così discordi tra loro da ingenerare una inestricabile confusione; perciò giustamente è accettabile la conclusione che vi sia una sola specie. Per meglio chiarire tale quistione, io credo, possa essere di vantaggio un esame critico delle figure anteriormente pubblicate, in confronto di quelle dell'animale intero, le quali nel presente lavoro ritraggono il capidoglio dai due lati, il ventrale ed il sinistro, che sono i più caratteristici per dare una giusta cognizione dell'animale.

Non è a dubitare della esattezza della presente figura ventrale, perchè è stata rilevata da fotografia, e chiarita con l'ingrandimento nei particolari poco appariscenti nella fotografia stessa, e perciò essa può servire di termine di riscontro alle altre.

Le figure più antiche sono quelle del Clusius, del Sibbald e del Jonston, quelle dei due primi sono molto grossolane, e non meritano considerazione; quella che va col nome di Jonston è a ritenere come una copia di un'incisione di un abile artista, J. Saenredam, che la rilevò da un capidoglio maschio arenato a Beverwyk nel 1601, figura riferita dal Brandt und Ratzeburg (*Medizinische Zoologie*) nella tav. XII fig. 2. Questa figura, designata col nome di *Physeter macrocephalus*, è molto simile alla presente; e se vi è qualche differenza nel rapporto tra la lunghezza e la grossezza, e nel contorno, deve attribuirsi alla difficoltà di cogliere bene le proporzioni; ma l'assieme delle due figure non rileva alcuna differenza specifica tra di loro, e perciò i due esemplari sono a considerare come appartenenti ad una sola specie.

La figura 1, di profilo, della ora citata tavola del Brandt, tolta dal Bonnaterre, (*Cétologie, pl.* 7 *fig.* 2) indicata come *Physeter macrocephalus* femmina, riferita in molti trattati, ed inviata al Bonnaterre dal Chexpuis, è ritratta da uno degli esemplari di Audierne. Questa figura è a considerare come molto lontana dal vero, e basta notare qualche particolare inammissibile, perchè tutti gli altri perdano il loro valore. Infatti essendo la bocca aperta, la mascella inferiore è allontanata dalla superiore, e nell'angolo labiale è figurata una profonda intaccatura che non esiste nel vero, nè può vedersi in alcun modo; giacchè la linea labiale della mascella superiore è rettilinea in gran parte, e verso i masseteri scende in giù per abbracciare la mascella inferiore la quale, vista di profilo, resta come incassata nella superiore, perciò è impossibile rilevare una simile intaccatura; senza dire della enorme gonfiezza del ventre, che non si sa se sia per gestazione, per putrefazione o per inesattezza di disegno, e così della posizione degli occhi, molto in alto, e di grandezza maggiore del vero. (Vedi nelle tavole le fig. I, XXI, che mostrano l'animale di ventre e di profilo).

Ora quando vi sono tali sbagli in parti molto grandi, non merita fiducia quello che si riferisce a parti meno appariscenti, le quali richiedono una osservazione più accurata. Perciò lo spiraglio, posto alla parte anteriore superiore del muso, di forma rotonda, rappresentato col getto di acqua, che n'esce fuori, non ha nessuna verosimiglianza.

La figura 3 riferita nella stessa tavola XII del Brandt, ed indicata col nome di *Physeter cylindricus* maschio, è stata presa dall'Anderson. Questa figura è così grossolana, che non vale la pena di una critica; nel suo assieme potrebbe ridursi alla nostra figura di profilo, però la posizione dello spiraglio, in quella molto indietro dell'estremo del muso, e la sua forma rotonda, la farebbe differenziare assai; e d'altra parte come si può ritenere giusto questo carattere, non notato mai in nessun altro esemplare da nessun altro osservatore, ed in una figura così fatta?

Nello stesso Brandt, alla tav. XIV, si trovano due altre figure di capidoglio, la fig. 2, indicata come *Physeter trumpo*, tolta dal Robertson, e la fig. 1, col nome di *Physeter polycyphus*, dal Quoy e Gaimard.

La figura del Robertson, dalla coda fino alla insersione della pinna toracica, si rassomiglia molto alla figura di profilo della tavola VII di questo lavoro, ma nella parte anteriore presenta parecchie inesattezze. In prima la pinna toracica, se è giusta per la posizione e per la sua piccolezza, è abbozzata nella sua forma, e senza alcuna precisione nei suoi particolari. La posizione dell'occhio è più in alto, e la grandezza maggiore del vero,

essendo l'occhio in confronto molto più piccolo nel nostro esemplare. La mascella inferiore che, dalla sua origine all'angolo labiale, accoglie la mascella superiore, è veramente erronea; perchè è tale la sproporzione, tra la mascella superiore grossissima e la inferiore relativamente molto piccola, che questa resta quasi completamente nascosta verso la sua articolazione dall'altra, ed, a bocca chiusa, la porzione dentale della mascella inferiore è, come incassata, in una nicchia corrispondente della mascella superiore. Mentre tutta la figura è di profilo, non si comprende come si possa rappresentare l'estremità del muso quasi di prospetto, e volto a sinistra, come se l'animale potesse volgere a sinistra l'estremità del muso, restando di profilo col rimanente della testa, e con la massima parte del corpo. Le osservazioni ora indicate mi hanno messo in dubbio anche sulla posizione e forma dello spiraglio, il quale si trova sulla parte mediana anteriore e superiore, ed ha figura rotonda.

Ora, se questo ultimo fatto fosse l'esatta espressione del vero, bisognerebbe concludere per una differenza di specie; ma siccome vi sono parecchie evidenti prove d'inesattezze nella figura, è ammissibile, che anche questo particolare si discosti dal vero, che come nel resto del corpo, anche in ciò, si doveva rassomigliare al nostro esemplare; per conseguenza si avrebbe ragione per considerare tanto quello di Cramond, che quello di Porto S. Giorgio, come simili tra loro, e perciò appartenenti alla stessa specie. La figura del *Physeter polycyphus* del Quoy e Gaimard, pubblicata nella parte zoologica del viaggio di circumnavigazione dell'*Uranie* dal Freycinet, non è accompagnata da una descrizione, ma vi è la seguente indicazione: *Nous ne doutons point, que le dessin executé avec hardiesse et à grands traits, ne rende bien l'ensemble de l'animal et ne caractèrise ses formes principales, mais nous pensons aussi, que il peut y avoir des fautes dans quelques détails ou dans certains proportions.* Confrontando la figura del Quoy e Gaimard con quella del Robertson si vede nell'insieme delle parti, nella forma generale del corpo e della testa, grande rassomiglianza tra loro, solo vi è una differenza nella linea dorsale ondulata nel *polycyphus*, che fu così chiamato perchè si suppose, che le bozze dorsali potessero essere un carattere specifico. Intanto la più grande di queste bozze dorsali, per la sua forma e per la sua posizione, contrapposta al punto di uscita del pene, si rassomigliano in entrambi; le quattro bozze più piccole a forma d'intaccature, tra la grande bozza e la coda, mancanti nel *trumpo*, si rassomigliano a quelle del nostro capidoglio, e le ondulazioni anteriori alla grande bozza, non essendo state mai notate da altri, potrebbero essere una particolarità affatto individuale, dovuta a magrezza o ad altre cagioni accidentali. Ora, se si tiene conto che questa figura non è considerata esatta dagli stessi Quoy e Gaimard, si è autorizzati a non dare importanza alle piccole differenze, esistenti tra la detta figura e quella del Robertson, che simili tra loro nell'assieme, si rassomiglierebbero anche alla nostra, se non vi fosse la notata differenza nello spiraglio; ma per le ragioni precedenti e le seguenti questa differenza di forma e posizione non può essere conforme al vero, e perciò, essendovi riscontro nelle altre parti, bisogna ammettere una rassomiglianza anche in questa, e così i tre esemplari devono ritenersi tutti appartenenti ad una sola specie.

Da quanto è stato precedentemente esposto si rileva, che le diverse figure di capidogli, per la forma generale, quantunque più o meno variata nel contorno, possono

rapportarsi ad una sola forma specifica; ma a ciò vi è un solo ostacolo consistente nella forma e posizione dello spiraglio.

Avendo dimostrato le figure erronee in molte parti, si può ritenere che specialmente riguardo allo spiraglio siano avvenute le maggiori inesattezze; e ciò può darsi non solo perchè questa apertura nel capidoglio è di forma e posizione eccezionale, rispetto ad altri cetacei, ma anche perchè è la parte, che, prima delle altre, è distrutta per procedere alla estrazione dello spermaceti. In generale dalle figure si rileva, che lo spiraglio è posto nella parte estrema, superiore, mediana della testa, ed è di figura rotonda. Trasandando le altre forme, come molto inverosimili, mi limito a considerare la figura del Robertson, il cui sbaglio di forma e posizione può essere interpretato nel modo seguente. Siccome in quel punto, ma un poco a sinistra, nel capidoglio di Porto S. Giorgio vi era una profonda intaccatura, quasi un lontano ricordo del solco *naso-labiale* e che precedeva lo spiraglio, è da supporre che, nell'esemplare del Robertson, la stessa intaccatura sia stata interpretata come spiraglio; tanto più che questo, avente forma di una stretta fenditura longitudinale, è poco appariscente; mentre l' intaccatura indicata risalta più facilmente all'occhio, ed in una osservazione, non molto accurata, può essere scambiata con lo spiraglio; ciò parmi la ragione di questo sbaglio in molte figure.

La posizione a sinistra dello spiraglio, e la sua forma ad *ʃ* adagiata, fu già veduta e notata da parecchi osservatori, come lo Schwediawer, l'Alderson, il Beale, il Chase ed il Jackson, sia in esemplari arenati, sia in individui viventi; per cui da una parte coincidendo la mia osservazione con le altre dei precedenti scrittori, e dall'altra parte potendosi addebitare la diversa forma e posizione, in alcune figure antiche, ad un vero errore, resta che una sola dev'essere la forma e posizione dello spiraglio, e per conseguenza una sola la specie di capidoglio, cioè il *Physeter macrocephalus* Fabricius O.

Nella tavola XIV fig. 3 del Brandt è riferita una figura del Colnett, che quantunque schematica ed a semplice contorno, con lo spiraglio a sinistra ed in forma di *ʃ* adagiata, si può rapportare alla nostra figura di profilo, ed il Brandt l'indica col solo nome di *Physeter*, senza la qualifica di specie, nel cui posto pone un punto interrogativo. È veramente singolare, che figure e caratteri erronei avendo usurpato il posto di specie, quando appare la forma con i suoi veri caratteri è dichiarata quale incognita, nè d'altra parte si trova ragione per farne una nuova specie. Della unicità della specie del capidoglio se ne ha un'altra prova in questo, che avendo il Van Beneden fatto un catalogo degli scheletri di capidogli, esistenti nei diversi Musei del mondo, non ha trovato altra indicazione che la specie *Ph. macrocephalus*. Per le precedenti ragioni, anche l'individuo arenato a Porto S. Giorgio sarà considerato come appartenente a questa specie, che spero sia stata sufficientemente chiarita come unica.

Se incomplete sono le cognizioni zoologiche riguardanti il capidoglio, anche molto più scarse e frammentarie sono quelle riguardanti l'anatomia. Ciò è facile ad intendere, perchè le difficoltà sono veramente enormi, e perchè gli organi non si possono conservare per intero, per uno studio approfondito; e d'altra parte la osservazione affrettata non permette che uno studio molto superficiale, insufficientissimo a far rilevare le caratteristiche speciali di questi colossali organismi, che come il microscopio ci mostra chiare le particolarità degli elementi dei tessuti, così quelli ci presentano,

portati naturalmente ad una grande scala, un gran numero di particolari, che passano inosservati in organismi delle dimensioni comunemente adoperate per studî anatomici.

Per ciò che riguarda l'organizzazione di questi animali, il solo scheletro è stato accuratamente studiato dal Camper, dal Cuvier e da altri, per la opportunità di molti esemplari conservati nei Musei, ma per gli organi interni non vi sono che pochi materiali raccolti.

L'Hunter, che si è molto estesamente occupato dei cetacei in genere, dà ben poche e superficiali notizie anatomiche intorno al capidoglio.

L'Alderson in poche pagine fa una relazione della dissezione fatta di un capidoglio, e si occupa principalmente della misura del cuore e dei grossi vasi alla loro origine, e degli altri organi, dell'apparato respiratorio, digerente ed uro-genitale dà solamente una rapida e sommaria rassegna.

Il Jackson in un giovanissimo capidoglio femmina, di soli 16 piedi di lunghezza, fece le sue osservazioni sopra gran parte degli organi, ma non ne approfondì lo studio, e si limitò ad alcune brevi notizie e misure. La mancanza di figure nei lavori di Hunter, Alderson, Jackson non ha fornito una sufficiente cognizione dei fatti osservati.

Io spero, che il presente lavoro considerato più direttamente dal lato zootomico possa colmare in gran parte queste lacune, e che esso non solo dia una più estesa e precisa conoscenza dell'organizzazione del capidoglio, ma anche, per ciò che riguarda più specialmente l'apparato valvolare cardiaco, contribuisca a risolvere alcune quistioni scientifiche tuttora controverse, e che sono di alta importanza per l'anatomia e fisiologia comparata.

L'essermi occupato per lungo tempo di questo lavoro, e l'avere dovuto prendere conoscenza di quanto è stato precedentemente scritto, e ch'è più riferibile alla parte zoologica, mi ha messo in grado di raccogliere molti dati, i quali esposti ordinatamente erano un complemento necessario della parte anatomica; in tal modo si avrà un complesso di fatti che rappresenterà una monografia intorno a questo singolare animale. A completare le notizie, che possono essere utili nel presente argomento, sarà bene riferire gli arenamenti di questo cetaceo, avvenuti in diversi tempi sulle diverse spiagge, e riferire anche quelli che sono più spesso ricordati, o che furono oggetto di studio, ed infine le numerose pubblicazioni in proposito da cui si può rilevare, che il capidoglio in tutti i tempi ha destato un grande interesse e con tutto ciò offriva ancora occasione ad altre ricerche.

Capidogli arenati in varie epoche su diverse spiagge.

1577. Anversa; A. Parè (figura poco fedele).
1598. Berchey (Olanda); Clusius (figura).
1601. Beverwyk; Jonston (figura).
1687. Orcadi; Sibbald.
1689. Forth (golfo); Sibbald (figura simile al delfino).
1693. Kairston (presso Orcadi); Sibbald (forse è beluga).
1720. Elba; Anderson.
1723. Elba; Anderson.
1723. Spitzberg; Hasaeus.
1725. New England; Dudley (per relazione).
1727. Elba; Anderson.
1738. Eyder; Anderson.
1741. Adour (presso Bayonne); Despelette et de la Peyronie.
1762. Blythsend; Pennant (figura).
1769. Is. Cramond; Robertson.
1780. . . . . . . Fabricius O.
1784. Audierne; Lecoz.
1824. . . . . . . Quoy et Gaimard (figura).
1825. Jorkshire; Alderson.
1842. New Bedford; Jackson.

Capidogli arenati in diverse epoche sulle spiagge d'Italia.

1715. Pesaro.
1715. Golfo Veneto; Klein.
1726. Villafranca; Vallisnieri (figura simile al delfino).
1750. Pelles.
1764. Rovigno.
1764. Zara.
1768. Fano; Brunnido.
1775. Marotta.
1803. S. Elpidio.
1810. Chioggia.
1827. Villafranca.
1837. Budua.
1853. Cittanova.
1868. Tropea.
1874. Porto S. Giorgio; de Sanctis. (1)

Bibliografia intorno al capidoglio.

1559. Plinio, *Hist. nat.* lib. IX. cap. IV. Venetiis.
1605. Clusius C., *Exoticorum libri decem* etc. Raphelengii (Anversa).
1649-1653. Jonston, *Historiae naturalis* etc.
1664. Parè Ambr. *Traité des Animaux.* Lyon.
1692. Sibbald, *Phalaenologia nova* etc. Edinb.
1713. Ray, *Synopsis methodica avium et piscium.* London.
1723. Hasaeus T., *de Leviathan Jobi et Ceto Jonae disquis.* Bremen.
1724-1725. Dudley, in Philos. Trans. Vol. 33. London.
1738. Artedi, *Ichtyologia sive opera omnia de piscibus.* Leyde.
1741. Despelette, *Observ. sur un cachalot.* Mém. Acad. Sc. Paris.
1750. Anderson, *Hist. nat. de l'Islande, du Groenland, et du détroit de Davis.* Paris.
1757. Brisson, *Le régne animal.* Paris.
1770. Robertson J., in Philos. Trans. Vol. LX. London.
1780. Fabricius O., *Fauna Groenlandica.* Lipsiae.
1782. Duhamel du Monceau, *Traité général des pêches* etc. Tom. IV. Paris.
1783. Schwediawer, *Recherches sur l'ambre gris*, in Philos. Trans. Vol. 37. London.
1784-1785. Lecoz, *Lettre sur des cachalots échoués près de Audierne.* Mercure de France.
1787. Hunter, *Observ. on the structure and oeconomy of Whales*, in Philos. Trans. Part. II. London.
1788. Linneo, *Systema naturae.* 13ª ediz. Lipsiae.
1789. Bonnaterre, *Cétologie de l'Encyclopedie Méthodique.* Paris.
1792. Colnett, *Voyage to the south Atlantic.* etc. London.
1793. Pennant, *History of quadrupeds.* 3ª ediz. 2 vol. London.
1803. Lacépède, *Histoire naturelle des Cétacés.* 1 vol. Paris.
1811. Pallas, *Zoographia russo-asiatica.* 3 vol. Petersbourg.
1820. Scoresby, *An account of the arctic Regions.* Edinburgh.
1820. Camper P., *Observ. anatomiq. sur la structure des Cétacés.* Paris.
1820-1822. Desmarest, *Mammologie.* Paris.
1823. Cuvier, *Recherches sur les ossements fossiles.* Paris.
1824. Quoy et Gaimard, *Atlas Zool. in Freycinet, Voyage de l'Uranie.* Paris.
1827. Alderson, *An account of a Whale of the spermaceti tribe*, in Trans. Cambr. Philos. Soc. 2 vol.
1828. Lesson, *Hist. nat. des Cét.* Paris.
1829. Brandt und Ratzeburg, *Medizinische Zoologie.* Berlin.
1829. Cuvier, *Régne animal.* Paris.
1829. Fischer J. B., *Synopsis mammalium.* Stuttgardae.
1836. Cuvier F., *Hist. nat. des Cét.* Paris.
1837. Bennett Fredr. in Proced. Zool. Soc. London.
1839. Beale, *Natural History of the Sperm-whale.* 2ª ediz. London.
1845. Jackson, *Dissection of a spermaceti whale* etc. Journal of natural History. Boston.

(1) Anche a Palo e ad Orbetello si ebbero due capidogli, di cui si conservano gli scheletri nei Musei di Roma e di Firenze.

Descrizione zoologica dell'animale.

Caratteri. — Capo quasi un terzo della lunghezza del corpo, di grossezza eguale fino all'estremità anteriore, che finisce in un muso troncato perpendicolarmente all'asse longitudinale. Mascella inferiore sottile e lunga, a guisa di rostro, munita di 22 denti a destra e 23 a sinistra, di cui gli anteriori ed i posteriori più piccoli ed aguzzi, rispetto agli intermedî più grandi e smussi. Mascella superiore quasi del tutto priva di denti, i due soli rimasti sono sottili e nascosti nelle fosse gengivali, le quali per numero e disposizione corrispondono ai denti della mascella inferiore, che a bocca chiusa in quelle si allogano. Pinne toraciche brevi, tronche; pinna codale biloba, col margine posteriore semicircolare convesso, e con l'anteriore dritto; pinna precodale opposta all'apertura sessuale, rudimentale, seguita posteriormente da quattro dentature cutanee. Spiraglio unico a forma di ∫ adagiata, anteriore, superiore, sinistro, come lunga e stretta rima, parallela alla linea superiore di contorno; forte intaccatura cutanea alla parte anteriore superiore sinistra del muso avanti allo spiraglio. Pelle nero-lavagna superiormente, grigio-biancastra inferiormente.

Descrizione. — L'aspetto generale del capidoglio ricorda quello degli altri cetacei, e dalle pinne toraciche alla coda è molto somigliante al delfino; ma dalle pinne toraciche all'estremità anteriore del muso ha caratteri così spiccati, che a prima vista si distingue da qualunque altro cetaceo, tanto per la sua faccia ventrale, quanto pel profilo. Per facilitare la descrizione dell'animale si può distinguerlo in tre parti pressochè eguali, l'anteriore o cefalica, dall'estremità del muso fino alla origine delle pinne toraciche; la media o toraco-addominale, da questo punto fino al limite posteriore del pene, e la posteriore o codale, che ad essa segue, e si estende fino all'estremità della coda. Secondo questa divisione, sono quasi eguali il terzo anteriore ed il posteriore, ed è più breve il terzo medio. Il punto di attacco delle pinne toraciche corrisponde alla massima grossezza del corpo, che, da questo punto all'inserzione della pinna codale, decresce a guisa di un cono; come anche va decrescendo verso l'estremo anteriore, ma in lievissimo grado, e la testa, terminando tronca, non dà all'animale quell'aspetto fusiforme, che si osserva nel corpo di un delfino.

La superficie del corpo è di una grande semplicità, e quasi tutti gli organi, che spiccano da questa superficie uniforme, si vedono nella ispezione dal lato ventrale, che mostra la bocca, le pinne toraciche, il pene, l'ano e la pinna codale.

Sull'estremità anteriore della linea mediana ventrale si trova la bocca, la quale è di figura del tutto caratteristica per la eccezionale sottigliezza e brevità della mascella inferiore rispetto alla superiore, che si prolunga di tanto in avanti per quanto è più larga lateralmente, in modo da formare una specie di cornice alla mascella inferiore, che a bocca chiusa s'incassa in quella, come in una nicchia formata dal labbro superiore, il quale si rileva come un cercine rigido all'intorno, e solo è più sporgente e molle in corrispondenza dell'angolo labiale, per facilitare l'apertura boccale. La mascella inferiore, non orlata da labbro, è fornita di una plica cutanea in corrispondenza dell'angolo labiale. Ciò merita considerazione, perchè nella prima età l'animale può poppare solo con l'angolo labiale, aiutato dalla lingua.

L' apertura boccale, in corrispondenza degli angoli labiali, ha una ampiezza uguale alla metà della lunghezza della bocca, la quale in gran parte è fatta dalla sinfisi mascellare prolungata, munita di denti, e dalla serie corrispondente delle fosse gengivali, mancando in questo tratto la lingua. Questa essendo rispetto alle mascelle cortissima, e molto larga in proporzione della sua lunghezza, si alloga nel breve tratto rimasto indietro della sinfisi mandibolare, in modo che con la sua estremità libera arriva in corrispondenza degli angoli labiali. È inutile il confutare l'errore, molto ripetuto, che la lingua si prolunghi fin presso all'estremità anteriore della mandibola, come avviene nei delfini, essendo ciò impossibile nel capidoglio per la conformazione speciale della mandibola, la quale ha una sinfisi mandibolare lunghissima e tanto stretta da non potervisi allogare la lingua, la cui larghezza è quasi il triplo dello spazio interposto tra le due serie di denti. All' indietro degli angoli labiali, presso la linea mediana ventrale, vi sono due stretti e lunghi solchi cutanei, incurvati verso l'esterno, che potranno essere di qualche vantaggio nella distensione della cute nei movimenti della mandibola.

Le pinne toraciche sono latero-ventrali, molto vicine fra di loro; esse sono tozze, cioè molto corte e grosse, rispetto alla larghezza e lunghezza che hanno in confronto le stesse pinne dei delfini; l'apice è tronca, e mostra tre lobi in corrispondenza dell'estremità delle falangi terminali, che fanno sporgenza sotto la cute. Non so se ciò sia un carattere individuale per logoramento avvenuto per l'uso, o per ragione di attrito. L'esame di queste pinne toraciche fa supporre, che esse siano di poco vantaggio alla locomozione dell' animale, e pare che possano giovare più particolarmente all' equilibrio del corpo.

Il terzo medio del corpo finisce col pene, di cui un quarto alla base rappresenta il prepuzio, ed il rimanente che va decrescendo a finire in punta, è il glande; entrambi rivestiti da mucosa nera. Nell'esemplare, detto organo è in vista; e forse pel suo gran peso è uscito fuori dopo morte; ma, quando l'animale è vivo, è di solito nascosto nella sua guaina, dove è ritirato quasi completamente da due lunghissimi e robusti muscoli retrattori, i quali, facendo ripiegare ad S quel lungo cono, lo ritirano all' interno, come avviene anche per i delfini, per i ruminanti, per i solipedi ed altri mammiferi. Nel presente esemplare l'ano è distante dall'orifizio prepuziale e si trova nel terzo anteriore della porzione codale perchè anche nel capidoglio, come nella massima parte dei mammiferi, l'orifizio prepuziale è molto al davanti dell'ano, mentre l'apertura sessuale femminile è vicinissima a questo, ed una lunga fenditura cutanea è quasi vestibolo comune alle due aperture. A poca distanza dall'estremità anteriore della fenditura cutanea, come è stato osservato, vi è l'orifizio sessuale femminile, e lateralmente e sulla cute vi sono due strette fenditure dove sono nascosti i capezzoli mammarî, che si fanno sporgenti quando sono turgidi di latte, nel periodo della lattazione.

Giova avvertire che quello che per comodità di descrizione si è detto terzo codale, non corrisponde perfettamente alla coda, la quale incomincia di fatto all'indietro dell'apertura anale, perciò vi è compresa la parte posteriore dell'addome, all'indietro dell'orifizio prepuziale; come anche il terzo cefalico, che ho esteso fino all'origine delle pinne toraciche, non comprende la sola testa, ma pure una parte anteriore

del torace, da cui quella non può distinguersi, perchè manca il restringimento che corrisponderebbe al collo. Per cui la divisione del corpo fatta in tre parti pressochè eguali, prendendo per limite la posizione degli organi esterni è da riferire, e nel modo indicato, solo al maschio, la cui posizione dell'orifizio sessuale è molto più in avanti, che nella femmina. La pinna codale, col suo grande sviluppo, compensa la piccolezza delle pinne toraciche. Nei cetacei ordinariamente la pinna codale triangolare ha i margini antero-laterali convessi ed il margine posteriore concavo, con forte intaccatura nel mezzo; per guisa che la pinna codale di un delfino, per esempio, è ristretta d'avanti in dietro, e posteriormente il suo contorno è semilunare. Nel capidoglio invece i contorni antero-laterali della pinna sono dritti, il posteriore è convesso e la intaccatura è poco profonda; per tali ragioni la estensione di questa pinna aumenta di molto, e con essa la sua potenza come organo di nuoto.

Sulla pinna codale s' inseriscono i robustissimi tendini delle enormi masse muscolari, che per ciascun lato sono il *longissimus dorsi*, il *levator caudae* superiormente, ed il *depressor caudae major*, e *depressor caudae minor* inferiormente; contraendosi alternamente i superiori ed inferiori di un solo lobo, lo innalzano e lo abbassano in antagonismo a quanto avviene nell'altro lobo; e così la coda ha una specie di movimento ad elica, che l'animale adopera quando nuota con media velocità, che è, secondo il Beale, di quattro a sette miglia inglesi all'ora. Quando poi esso adopera i quattro depressori codali alternamente con i quattro elevatori, la pinna codale intera si abbassa e s' innalza, ed allora funziona a guisa di remo tanto nel primo tempo che nel secondo, e la velocità aumenta fino a dieci o dodici miglia all'ora. La massima forza il capidoglio la spiega nell'innalzamento della coda, prodotto dai muscoli elevatori, che superano di molte volte la grandezza dei depressori.

L'animale nuotando forma ora un semicerchio ventrale, ora un semicerchio dorsale, e mostra emerso prima il terzo anteriore, poi questo si sommerge, ed emerge il terzo medio ed in ultimo il terzo codale, che sommergendosi a sua volta fa riapparire la testa. La pinna codale dà tale impulso a tutto il corpo da sollevarlo per intero al di fuori delle acque per tre o quattro volte di seguito, ed il ricadere nelle onde dell'enorme mole produce il fragore di burrascosa marea che batte gli scogli. È facile il comprendere come la coda, per la sua forza e mobilità, sia l'arma la più poderosa di difesa e di offesa dell' animale, con cui può infrangere e sommergere un bastimento, e numerosissimi sono i disastri di questo genere. La pinna codale insieme alle pettorali deve concorrere a sostenere l'animale verticalmente per lungo tempo col terzo anteriore del corpo fuori acqua; come anche l'animale può immergersi con la testa in basso e tenere emerso il terzo posteriore.

Mentre nell'ispezione ventrale si notano tutte le parti sopra indicate, nei lati non vi è altro da osservare che l'occhio e l'apertura uditiva; questa alquanto indietro di quello ed appena discernibile per la sua piccolezza.

L'occhio è posto all'indietro dell'angolo labiale, quasi a metà della distanza, che passa tra questo punto e l'origine della pinna toracica; esso è molto in basso a livello della linea mediana della pinna. La sua piccolezza è veramente eccezionale in proporzione dell' enorme testa. L' apertura palpebrale, che misura 0,07 è orizzontale; la cornea è appianata, l' iride bruno-castagna, e la pupilla molto allungata

orizzontalmente, come nei ruminanti. Giacendo l'animale sul lato destro, non ho potuto asportare che il solo occhio sinistro; non avendo potuto asportare anche l'occhio destro, non mi è riuscito verificare se sia esatta la opinione di alcuni balenieri, riferita dal Cuvier (*Régne animale*) che cioè il capidoglio abbia i due occhi di differente grandezza, e che il più piccolo sia il sinistro, e col quale l'animale vegga meno, per cui i marini, che danno la caccia a questo cetaceo, si dirigono da questa parte, potendo così aggredirlo, prima che si sia avveduto dell'avversario. Quello che posso attestare è, che l'occhio sinistro è tanto piccolo, che eguaglia un occhio di bue; che la sua cavità interna è ridotta appena alla metà, per la enorme spessezza della sclerotica, e che la lente cristallina, appianata anteriormente e convessa posteriormente, misura nel diametro trasverso non più di 0,011 e nell'antero-posteriore 0,007.

Nel lato sinistro oltre a ciò si trova l'unico spiraglio, il quale per la sua asimmetria, per la sua posizione anteriore, per la sua forma di una fenditura molto allungata a guisa di un *ʃ* adagiata, parallela e poco distante dal contorno superiore, è affatto caratteristico nel capidoglio, rispetto agli altri cetacei.

Poco al disotto dello spiraglio, e nella stessa sua direzione, vi esisteva una escavazione navicolare, e di figura così regolare che a prima vista si sarebbe creduto un organo speciale (v. fig. XIV); ma con esame più accurato, trovai che essa non si continuava nell'interno, perchè a poca profondità si arrestava, ed anche perchè lo strato epidermico non s'internava in questa escavazione, la quale perciò era alquanto scabra nella sua superficie, e per tal ragione mi convinsi trattarsi di una cicatrice cutanea di una ferita, che, come si vede dal pezzo conservato, era lunga 0,32 e si può supporre essere stata molto profonda. Indagando, se questa ferita sia stata prodotta da arma tagliente a guisa di lancia vibrata sull'animale vivente, molto tempo indietro, tanto da permetterne come si vede la cicatrizzazione annosa; ovvero, se prodotta da qualche punta aguzza e tagliente di scoglio sottomarino; ho stimato questa seconda supposizione essere più ammissibile, vista la direzione ed estensione di detta cicatrice; ed il trovarsi al principio della testa, punto così lontano dall'occhio, fa supporre, che la punta aguzza non sia stata veduta a tempo, o veduta non potuta schivare, per la velocità del moto acquisito. Noto la coincidenza che questa ferita sia stata riportata sulla parte anteriore sinistra della testa, cioè nel lato dove sarebbe l'occhio più piccolo.

Infine resta a considerare il lato dorsale, il quale è liscio nei due terzi, anteriore e medio, ed in corrispondenza delle pinne toraciche s'inclina leggermente in avanti ed indietro, per modo che il contorno riesce alquanto curvo. Al cominciare del terzo posteriore, si eleva nella linea mediana sul dorso, a livello del pene, come una specie di cresta cutanea di forma triangolare, il cui lato maggiore è l'inferiore, poi viene l'anteriore, ed il più breve è il posteriore. Questa specie di pinna precodale è molto spessa nel suo lato aderente, e poi va sempre più assottigliandosi al punto da finire tagliente negli altri suoi due lati liberi. Questa pinna è costituita dall'epidermide, dal derma con materia grassa, senza elementi muscolari, per cui è del tutto immobile. All'indietro di questa cresta sporgente molto bene spiccata, segue una linea ondulata, in cui si notano quattro intaccature, alternate con quattro rilievi poco sporgenti. Di questi ne sono stati notati tre, due, ed in alcuni casi nessuno; il che vuol dire, che può essere un carattere non sempre costante; nè si può dire essere in rapporto

col sesso e con l'età, perchè ne è stata notata la presenza in una femmina e giovanissima. Della stessa natura sono da considerare le ondulazioni notate, anteriormente alla pinna precodale o dorsale, dal Paré e dal Quoy e Gaimard, e per tale ragione, essendo ciò un carattere individuale variabile, non poteva giustificarsi la denominazione di *polycyphus*, come se si trattasse di una specie distinta.

Dimensione e peso. — Del nostro esemplare, che misurava quindici metri, saranno date in una tabella tutte le misure delle singole parti e i loro rapporti, e sarà di vantaggio il riferire al riguardo alcuni dati raccolti. In genere le dimensioni più frequenti nei capidogli maschi adulti variano dai quindici ai venti metri, e si approssimano alle dimensioni delle balene, che secondo attesta Scoresby, che vide catturarne più di 300 nel nord, erano lunghe dai venti ai ventitre metri, del peso di poco più di 60,000 kil. Anche un capidoglio arenato a Pesaro nel 1715, lungo 18 metri, pesava circa 43,300 kil. Dal Brandt und Ratzeburg rilevo, che un capidoglio dà, in media, 100 barili di circa 148 litri ciascuno, ripartiti in 2859 litri di grasso cetinico, ed 11,913 litri di grasso fuso; che ragguagliato in peso, dà di grasso cetinico 2697 kil. e di grasso fuso kil. 11,200; cioè circa un quarto del primo e tre quarti del secondo. Infine il peso delle due materie grasse rappresenta un quarto del peso totale dell' animale. Le femmine sono quasi la metà dei maschi, ed in proporzione meno grasse. Per l'abbondanza della materia grassa sottocutanea, il peso specifico del capidoglio è minore di quello di un eguale volume di acqua; in una balenottera invece è maggiore, per cui una di queste, appena morta va in fondo al mare, e torna a galla quando per putrefazione è stata gonfiata dai gaz.

Biologia e caccia. — Il capidoglio è cosmopolita; raro ai poli, preferisce l'emisfero sud; vive in frotte numerose che contano da cinque a seicento individui, nella zona equatoriale del grande oceano. La insistente persecuzione delle navi baleniere li ha dispersi in tutte le latitudini; anche nel mediterraneo è stazionaria la sua dimora, e qualche volta s'inoltra presso Capri, nei luoghi dove il mare è molto profondo; se ne vedono anche verso la riviera di Genova, e sono numerosi i casi di arenamenti sulle coste italiane. Il vivere in grandi turbe non solo è attestato dai balenieri, ma anche da' diversi casi di arenamento; come quello avvenuto nella imboccatura dell'Elba di 17 individui, e l'altro ad Audierne di 31; gl'individui, che s'incontrano, o che si arenano isolatamente, sono forse dei dispersi dal branco. I 31 di Audierne erano quasi tutti femmine; i 17 dell'Elba erano quasi per metà maschi e femmine; di solito si trovano delle frotte di maschi ancor giovani, o di femmine con alcuni maschi adulti.

I poppanti nuotando vivacemente accompagnano le loro madri per molto tempo. La madre allatta alla superficie dell'acqua, coricata sul lato destro, ed anche il piccolo è adagiato sullo stesso lato rivolgendo la testa verso la coda della madre; o anche restando verticalmente, per poter entrambi respirare regolarmente. La mancanza dei denti, e la mucosa molle in quel tempo permette una stretta adesione delle due mascelle; la mollezza e lo sviluppo dell'angolo labiale, col quale essi prendono il capezzolo con l' aiuto della lingua, rende loro possibile il succiamento. I capidogli generalmente sono unipari; ma il Bennett, che ne trovò lattanti nei mesi di marzo, aprile, ottobre e novembre, ne vide qualche volta anche due con una madre; tra quelli partoriti ad Audierne si ebbe pure il caso di parto doppio; ed i nati in

genere erano 4 metri lunghi, senza denti, ed agili. Il periodo della loro gestazione si calcola a 10 o 12 mesi. Grande e reciproco è l'affetto tra la madre ed il figlio; quella lo tien d'occhio ed è sempre pronta alla difesa; se l'uno arena l'altra per soccorrerlo vi trova anch' essa la morte. I balenieri profittano di questo mutuo vincolo, e catturano il piccolo, con più facilità, perchè inesperto, e son sicuri di avere ancora la madre che si precipita furente per salvarlo e vi perisce. Anche gl'individui di una stessa schiera, come attesta il Colnett, si difendono reciprocamente, ed è pericoloso trovarsi in mezzo ad essi; quando uno di loro è stato ferito o preso, gli altri invece di fuggire, attaccano il nemico per liberare quello che è stato preso dal rampone, e nella violenza dei loro movimenti e sforzi infrangono e travolgono tutto; infatti numerosi bastimenti sono stati distrutti, sommersi o sfracellati.

Il capidoglio s'ingaggia in fiere lotte sessuali; i maschi si aggrediscono, come vide il Beale, a bocca spalancata, per afferrare la mandibola dell'avversario. Il capitano Chase ha visto più volte l'accoppiamento, che, come nelle balene, dura pochi minuti, in posizione orizzontale; però non di fianco, nè la femmina resta sempre supina; invece la coppia gira, e per tal modo lo spiraglio sporge fuori acqua alternativamente, per rendere possibile la respirazione.

Questi cetacei hanno i sensi alquanto ottusi, specialmente quello dell'udito e forse anche quello del gusto; al contrario hanno sviluppato quelli della vista e del tatto; le loro facoltà intellettuali sono scarse e nell'assieme ricordano più quelle dei delfini che quelle delle balene. Essi sono timidissimi, diffidenti ed evitano la vicinanza dell'uomo; talvolta basta un gruppo di delfini od una nave che si appressi per metterne in precipitosa fuga una schiera; altra volta sorpresi all'impensata, restano atterriti, tremanti e quasi paralizzati si lasciano aggredire senza opporre resistenza; feriti vomitano il cibo e reagiscono con un coraggio indomabile e bellicoso, attaccando furiosamente col grugno con i denti e con la coda, e spesso si riscontrano in essi cicatrici di passati attacchi. Qualche volta si vedono immobili alla superficie delle acque, immersi in sonno profondo; ma quasi sempre sono in moto, e viaggiando in numerose schiere di più centinaia, sfilano ad uno ad uno, eseguendo gli stessi movimenti ed emettendo nello stesso tempo il getto di acqua dallo spiraglio. Probabilmente il disporsi di tutta la frotta in fila a tal modo può interpretarsi come una condizione vantaggiosa per la corsa, seguendo gli altri la corrente già prodotta dall'individuo che è a capo della frotta stessa. Questa interpretazione troverebbe un riscontro nella ordinata disposizione, che seguono gli stormi di alcuni uccelli migratori, per esempio le grù, che nel volo si dispongono ad angolo col vertice in avanti.

Si cibano quasi esclusivamente di cefalopodi, e nello stomaco del nostro esemplare ho trovato migliaia di rostri boccali, che erano essi soli rimasti inalterati dai succhi gastrici, per la loro natura chitinosa.

La caccia dei capidogli è la stessa di quella delle balene; ma essendo essi forniti di formidabile armatura dentale, e di carattere molto più impetuoso, riescono assai pericolosi, e contro di loro vi bisogna molto coraggio, destrezza e prudenza.

I balenieri, a grande distanza, distinguono il capidoglio dalla balena per la posizione, forma e direzione del getto; per il soffio rumoroso della respirazione, e per i movimenti che si rassomigliano più a quelli dei delfini che a quelli delle balene.

Nei primi tempi delle cacce essi si lasciavano avvicinare e toccare, ma dopo tante persecuzioni, si son fatti più sospettosi e guardinghi, riconoscono e schivano il nemico; e perciò ora v'ha d'uopo di maggiore abilità e precauzione.

Sulla importanza ed estensione di questa caccia si legge nel Mac-Culloch, che dal 1814 al 1824, la sola Inghilterra aveva spedito 490 navi della portata di 146,359 tonnellate, montate da 13 mila uomini, altre nazioni come la Francia, l'Olanda, la Danimarca, la Norvegia ed i varî stati di America gareggiano in questa caccia audace, pericolosa, ma proficua, e che ha ripreso maggiore sviluppo, dopo che lo spermaceti è stato adoperato negli stessi usi della materia stearica.

Misure del capidoglio rilevate dalla Tavola I *nella scala di* $^1/_{50}$ *e riportate al vero.*

	In scala	*Al vero*
Animale intiero	metri 0,300	metri 15,00
Dall' estremità del muso all' attacco anteriore della pinna toracica sinistra.	» 0,140	» 7,00
Dall' attacco anteriore della pinna toracica sinistra al limite posteriore della origine del pene	» 0,090	» 4,50
Dal punto precedente all' estremità della coda	» 0,109	» 5,45
Diametro trasverso dell' animale in corrispondenza delle pinne toraciche	» 0,060	» 3,00
Grossezza minima in corrispondenza della coda	» 0,007	» 0,35
Dall' estremo anteriore del muso agli angoli labiali	» 0,065	» 3,25
Dall' estremità della mandibola all' angolo labiale	» 0,056	» 2,80
Dall' angolo labiale al limite anteriore di origine della pinna toracica	» 0,037	» 1,85
Distanza fra i due angoli labiali	» 0,030	» 1,50
Grossezza della parte dentata della mandibola	» 0,007	» 0,35
Lunghezza maggiore o del margine anteriore della pinna toracica	» 0,028	» 1,40
Lunghezza minore o del margine posteriore della pinna toracica	» 0,007	» 0,35
Larghezza maggiore della pinna toracica	» 0,012	» 0,60
Distanza da una pinna toracica all'altra, presa alle loro basi	» 0,040	» 2,00
Da una estremità all'altra delle pinne toraciche, dalla parte ventrale	» 0,070	» 3,50
Lunghezza della fessura anale	» 0,012	» 0,60
Lunghezza del pene, dalla base all'apice	» 0,037	» 1,85
Dalla base alla fine della guaina prepuziale	» 0,008	» 0,40
Dalla base del ghiande all' apice	» 0,006	» 0,30
Grossezza della guaina prepuziale	» 0,006	» 0,30
Grossezza del glande alla base	» 0,005	» 0,25
Dal limite posteriore della guaina prepuziale all' estremo anteriore della fessura anale	» 0,022	» 1,10
Dall'estremo posteriore della fessura anale al punto d'inserzione della pinna codale	» 0,050	» 2,50
Dall'estremo del muso al limite anteriore della base della guaina prepuziale.	» 0,182	» 9,10
Dall' ultimo punto indicato all' estremità della coda nel punto della intaccatura interlobare	» 0,115	» 5,75
Lunghezza del margine anteriore della pinna codale	» 0,027	» 1,35
Lunghezza del margine posteriore, dall' estremo all'intaccatura interlobare.	» 0,030	» 1,50
Lunghezza dall'origine della coda fino al principio dell' intaccatura interlobare.	» 0,025	» 1,25

Apparato circolatorio.

Dovendosi nel corso della descrizione dei preparati del cuore adoperare spesso dei termini di rapporto, che potendo essere interpretati diversamente, secondo che si riferisca al preparato stesso, alla figura del medesimo, o all'animale intero, è necessario stabilire, che i termini adoperati di *superiore*, *inferiore*, *anteriore*, *posteriore*, *laterale*, siano da considerare in rapporto con l' animale intero, la cui testa fosse in alto, l'estremità codale in basso; così tali rapporti sarebbero topograficamente paragonabili a quelli dell' uomo. Ciò sia detto in genere, giacchè può avvenire anche, che nella descrizione minuta dei singoli particolari si adottino dei rapporti delle parti tra loro e con l'organo stesso, come sarà facile intendere da tutto il complesso della descrizione.

Le favorevoli condizioni dei preparati del capidoglio, i quali mostrano le parti degli organi portate naturalmente ad un'altissima scala, in confronto di altri mammiferi, permettono di potere approfondire un grandissimo numero di dati anatomici, i quali, non trovando riscontro preciso negli stessi organi di altri animali, mettono nella necessità di modificare la nomenclatura generalmente adottata, o col dare una diversa estensione a' termini comunemente adoperati in senso più stretto, o anche introducendone dei nuovi, quando riesca di vantaggio alla chiarezza della esposizione.

Auricola sinistra. — Questa auricola in confronto della destra è, come nell'uomo, ristretta alla sua base di comunicazione col seno, e quest'apertura si presenta a contorno triangolare in corrispondenza della quale si trova un restringimento come un collo, con la parte più larga posteriormente, e la più ristretta in avanti (V. fig. III). Guardando il preparato da questa faccia, ch'è la inferiore interna, si ha una figura triangolare, con un lato *superiore,* uno *inferiore* ed un altro *posteriore.*

Il lato *posteriore*, o *aortico* (*p*) perchè corrisponde al tratto aortico discendente, è il più corto, convesso, ed il più grosso per la spessezza della parete, che forma quasi la base del triangolo auricolare. Il lato *superiore*, o *polmonale* (*s*) è il più lungo, più dritto, non convesso come il posteriore, ma leggermente incurvato, per adattamento al tratto ascendente dell'arteria polmonale. Il lato *inferiore*, o *ventricolare* (*i*) perchè è separato dalla zona interposta tra il medesimo e la base ventricolare, è perfettamente libero, medio per lunghezza, ancor esso leggermente incavato nella metà anteriore, è il più sottile e crestato per la divisione in dieci *lobi* di differente grandezza. I due più grandi (1, 2) sono anteriori, ed il terminale anteriore, ch'è anche il più grosso, corrisponde all'apice dell'auricola. Seguono in grandezza, procedendo verso la parte posteriore di questo margine, due altri lobi (3, 4), che sono medî per volume; in fine seguono gli altri sei alternati in maniera che gli altri lobi medî (6, 8, 10) sono, dai due precedenti e tra loro, separati dai lobi piccoli interposti (5, 7, 9). Oltre a ciò nell'auricola è da considerare anche una superficie *superiore convessa*, ed una *inferiore concava*. La superficie *superiore* convessa rassomiglia ad uno spicchio di ovoide triangolare di cui la base sul lato posteriore, come anche il lato superiore sono grossi; mentre il lato inferiore è assottigliato; e l'apice *auricolare* appuntato (*a*) corrisponde al punto d'incontro del lato superiore col lato inferiore.

Tutta la estensione di questa superficie non è liscia, ma ondulata o bernoccoluta; tale conformazione dipende dalle inserzioni nella faccia interna delle trabecole, in corrispondenza delle quali inserzioni formansi delle fovee o infossature più o meno profonde, le quali, alternate con le bozze, danno l'apparenza ondulata a tutta questa superficie. Come per le intaccature del margine inferiore si sono distinti dei lob grandi, medî e piccoli, che in sostanza non sono che le stesse bozze più spiccate nel contorno, perchè viste di profilo; così anche le bozze della superficie convessa vanno distinte in piccole, medie e grandi, alterne tra di loro, e giova ricordare, che le bozze del lato superiore sono più grandi per lo scarso numero delle trabecole corrispondenti, e che la massima di queste si trova sull'angolo anteriore dell'orecchietta, da formare un vero apice.

La superficie *inferiore* concava rappresenta in massima parte l'apertura triangolare sopra indicata comunicante col seno, per guisa che è mancante in corrispondenza del lato posteriore, ha una mediocre estensione verso il lato superiore, ed è principalmente estesa sul lato inferiore ed all'apice. In questa parte è sensibilmente incavata per adattarsi alla zona fibrosa auricolo-ventricolare, e quasi modellarsi sulla base del ventricolo. È anche da notare che, essendo molto grande l'apertura di comunicazione col seno, resta poco spazio tra il collo *auricolo-ventricolare,* ed il margine libero, e questo va crescendo in ampiezza da dietro in avanti, in guisa da raggiungere il massimo in corrispondenza dell'apice. Da ciò ne viene che la parte libera, la quale segue al restringimento del seno, è molto corta, e perciò non pendente come nell'auricola sinistra umana, il cui fondo chiuso dell'apice è in proporzione molto più distante dal collo. Infine è da notare che il collo triangolare dell'auricola col lato inferiore si continua con la zona fibrosa del collo auricolo-ventricolare, con gli altri due lati, il superiore ed il posteriore si continua con la parete muscolo-membranosa del collo seno-auricolare; detta apertura triangolare è quella che conduce nell'interno della cavità dell' orecchietta.

La capacità dell' auricola sinistra è diminuita dalla presenza delle trabecole muscolari, le quali sono disposte in modo da formare una parete *trabecolare interna* (*f*), rispetto alla parete *muscolo-membranosa esterna* (*m*), che è la parete *auricolare* propriamente detta; tra le quali trovasi lo spazio *interparietale.* Siccome la parete esterna forma un sacco continuo, e la parete trabecolare una superficie interrotta dalle ramificazioni trabecolari, lo spazio interparietale non è continuo, ma loculare e alveolare, e l'ampiezza o ristrettezza dei loculi e delle lacune dipende dal vario numero e dalla diversa disposizione delle trabecole terminali. Per quanto queste cavità siano varie per ampiezza, forma e direzione, pure esse sono distribuite con una certa norma, ed in generale si può dire, che occupano quasi esclusivamente la metà posteriore dell'auricola, la quale resta divisa da una larga *fascia muscolare* rettangolare (*f*), che si estende al davanti dell' angolo superiore-posteriore (*ps*), diretta verso l'angolo posteriore inferiore (*pi*), e misura nella sua massima lunghezza 0,40, nella sua massima larghezza, verso il lato corrispondente al collo seno-auricolare 0,18, e nella sua parte mediana più ristretta (*pi*) 0,06. Dei suoi quattro lati l' anteriore, il posteriore e l'inferiore sono a margini arrotondati, e fortemente intaccati per la origine delle trabecole secondarie corrispondenti, il lato superiore interno è il più esteso e non presenta

intaccature per inserzioni trabecolari, ma si continua con una tessitura omogenea, fino a confondersi con la parete esterna e con la porzione membranosa del seno.

Questa fascia comincia molto larga superiormente, come una lamina carnosa, in corrispondenza del collo seno-auricolare, nel suo scendere va diminuendo per ramificazioni trabecolari che fornisce nel suo decorso, come anche è interrotta nella sua continuità da cinque orifizî circolari o ellittici. La detta fascia trabecolare principale, diretta dall'alto al basso, e dall'interno all'esterno, manda, dal suo margine posteriore, tre trabecole secondarie (1, 2, 3) ed altre tre dal suò margine anteriore (4, 5, 6). Queste trabecole non solo sono diverse per la direzione, ma pure per la loro grandezza; imperocchè le tre posteriori sono molto più grosse e ramificate rispetto alle anteriori. Le posteriori si possono distinguere in *superiore* (1), *media* (2), ed *inferiore* (3).

La prima a spiccarsi dal margine posteriore della fascia trabecolare è la *superiore* (1), e si dirige alla parte corrispondente della parete posteriore; tanto all'origine che alla terminazione nella detta parete l' inserzione è più allargata rispetto alla sua parte di mezzo ; la sua lunghezza è di 0,14. L' attacco alla fascia (0,05) è minore dell'attacco alla parete (0,08), ed il punto più ristretto intermedio è (0,02). Questa trabecola, all' origine ed alla fine, sta nello stesso piano della fascia muscolare principale, però nel suo mezzo soffre una torsione per cui resta inclinata obliquamente su di esso. Dal suo margine interno lascia partire una lamina muscolare sottile, la quale, per la sua direzione, è quasi perpendicolare al piano della fascia principale. La porzione perpendicolare va ad incontrare nel punto corrispondente la parete auricolare esterna in guisa da formare un setto di separazione, tra il loculo superiore (l^1) e quello che segue immediatamente (l^2). È necessario avvertire, che questo setto interloculare non è continuo, giacchè il margine, che guarda la parete, si ramifica in un certo numero di trabecole terziarie, ciascuna delle quali isolatamente si fonde con la parete esterna. Nel suo punto d'inserzione la trabecola si espande sulla superficie parietale più o meno estesamente. In tal maniera avviene che tutte le diverse inserzioni trabecolari nella cavità auricolare si presentano come sporgenze, le quali contornano dell' escavazioni più o meno profonde ; il contrario, di ciò che avviene nella cavità interna, si osserva nella superficie esterna della parete membranosa auricolare, in cui le bozze sono limitate da infossamenti alterni in corrispondenza delle inserzioni trabecolari suddette.

La seconda trabecola *posteriore* o *media* (2), designata così perchè si trova tra le altre due e prossima all' asse antero-posteriore di tutta la orecchietta, fin dalla sua origine dalla fascia trabecolare principale , si dirige come una larga e sottile lamina carnosa perpendicolare, per raggiungere la parete membranosa posteriormente. Il margine rivolto verso la superficie membranosa, nella parte mediana, manda due larghe trabecole interparietali, che vanno a raggiungere la parete , e che formano una specie di arco sulla lamina perpendicolare. Al di là di queste due trabecole laminari, cioè anteriormente e posteriormente, in rapporto ad esse vi sono parecchie altre trabecole arrotondate, che raggiungono la parete membranosa. La lunghezza di questa seconda trabecola, dalla origine alla parete membranosa, è di 0,18, l'altezza di 0,05.

La terza trabecola posteriore (3) si può dire *postero-inferiore*, perchè diretta

verso l'angolo posteriore inferiore dell'auricola. Essa può considerarsi come la continuazione della fascia carnosa principale, e come questa diretta orizzontalmente. Prima di raggiungere il collo seno-auricolare questa terza trabecola si biforca; dei due rami, l'inferiore anteriore, molto robusto, sembra la sua diretta continuazione, che dapprima s' inclina obliquamente e poi riprende la direzione orizzontale, continuandosi con una larga e lunga inserzione sul collo auricolare; l' altro ramo posteriormente, ch' è molto sottile a direzione perpendicolare, a sua volta dopo breve tragitto si biforca anch' esso, mandando un ramo inferiore, che raggiunge il collo della parete auricolare, ed un altro posteriore, che raggiunge la ramificazione media sopra descritta. Da tutte le precedenti ramificazioni si partono, dirette alla parete membranosa, sessanta trabecole terziarie, di cui solo dieci nella metà anteriore, e cinquanta nella posteriore, le quali si comportano come quelle procedenti dalla prima trabecola secondaria sopra indicata. La lunghezza del tronco principale e del ramo antero-inferiore è di 0,12, la larghezza del medesimo è di 0,02. Le tre trabecole anteriori sono molto meno sviluppate delle precedenti, di forma quasi arrotondata, o alquanto prismatica, e distinte in trabecola *inferiore* (4), *media* (5), e *superiore* (6), delle quali le due prime vanno a raggiungere il collo auricolare, la superiore va a ramificarsi alla faccia interna della parete membranosa.

Le trabecole di terzo ordine che si spiccano dalle precedenti molto sottili sono in piccolissimo numero e molto tenui; in questo punto si nota una grande diradazione delle trabecole, per cui non si ha più quell' apparenza alveolare, e nè anche una separazione tra i diversi loculi. Ad onta di tutto ciò, le tre trabecole secondarie anteriori, limitate in dietro ed inferiormente dalle altre posteriori, ed anteriormente e superiormente dalla parete membranosa, formano quasi cornice a tre grandi aperture interposte (l^4, l^5, l^6), e ad altre tre minori lungo il decorso delle ramificazioni delle trabecole secondarie.

In tal modo dal diradarsi delle trabecole si giunge fino alla loro completa scomparsa in vicinanza dell' apice anteriore della auricola; questa porzione è del tutto priva di trabecole, e non è costituita che dalla sola parete esterna muscolo-membranosa, la quale in compenso, in questo punto, è molto più ispessita che nelle altre parti. Infine tutte le trabecole, tanto quelle che partono dal margine posteriore della fascia muscolare primaria, come quelle che partono dal suo margine anteriore, vanno a raggiungere la parete membranosa in corrispondenza del restringimento o collo seno-auricolare; ed a ciò fa solo eccezione la trabecola anteriore superiore, che va a finire nella faccia interna della parete membranosa.

Gli spazî che risultano dalla disposizione e direzione delle varie trabecole suddescritte si possono chiamare *loculi* per la loro conformazione. Essi hanno un'apertura circoscritta dal margine libero della fascia muscolare, dal margine libero di due trabecole contigue, che si spiccano da essa, e dalla parete membranosa auricolare su cui queste si attaccano, o da un'altra trabecola che s' interpone tra le due prime. Oltre l' apertura di un loculo, che si trova sulla parete trabecolare, bisogna considerare il suo fondo, fatto da un infossamento, in corrispondenza di una bozza esterna della parete membranosa, e da un certo numero di trabecole interparietali, disposte all'ingiro come una palizzata.

Da tutto ciò risulta, che i loculi vicini sono largamente comunicanti tra loro, e nell'assieme danno alla parete auricolare un aspetto concamerato e alveolare. Descrivendo i loculi con lo stess' ordine delle trabecole si ha, in corrispondenza delle trabecole posteriori della fascia primaria un loculo *superiore*, uno *medio*, uno *inferiore*, a cui seguono due altri minori e quasi marginali, ed altri quattro loculi, che sono in rapporto del margine anteriore della fascia carnosa.

Il loculo superiore (l^1) si trova all'angolo superiore, e la sua apertura con un diametro di 0,08 è molto regolare, circolare, il cui contorno è limitato dalla base della fascia muscolare, e dal margine superiore della prima trabecola, che s'incurva ad arco per fondersi nel collo dell' auricola. Questo loculo è molto profondo, ma stretto, dal suo margine di apertura si prolungano molte trabecole appianate, in forma di lamine, dai cui margini si spiccano, a guisa di denti di pettine, un gran numero di trabecole sottili terminali sulla parete membranosa corrispondente.

Al loculo superiore segue il medio (l^2), il quale ha anch'esso la sua apertura a contorno circolare circoscritta dal margine posteriore della fascia muscolare, dalla trabecola superiore, dalla media e dal collo auricolare; l'apertura di questo loculo medio è la più grande di tutte e misura 0,12 di diametro; la sua profondità è minore del precedente. Dalla trabecola media si prolungano lamine perpendicolari, le quali formano come una specie di tramezzo tra questo loculo, ed il vicino, e poi in ultimo dalle trabecole laminari si spiccano delle trabecole a corda, che vanno a finire sulla parete membranosa.

Al loculo medio segue l'inferiore (l^3), interposto fra la trabecola media e la inferiore; esso sarebbe stato anche più grande dei precedenti, se lo spazio non fosse stato diviso in modo da formare tre loculi, il terzo propriamente detto, e due altri inferiori marginali non apparenti nella figura, circoscritti da ramificazioni trabecolari, interposte tra la seconda e terza trabecola. Il diametro dell' apertura del terzo loculo è di 0,08, e gli altri due marginali inferiori hanno un diametro di 0,06. Questi loculi rispetto a' precedenti sono poco profondi e perciò le trabecole terziarie arrotondate vanno direttamente dal margine orbicolare dei loculi sulla parete membranosa. Dal margine anteriore della fascia muscolare, spiccandosi le tre trabecole anteriori, si hanno anche qui delle aperture, circoscritte dal margine anteriore della fascia primaria e da due trabecole vicine che si spiccano da essa. Però in questa parte, per la grande diradazione delle trabecole terziarie, i loculi non sono circoscritti all' intorno dalla palizzata trabecolare terminale. Da tutto ciò risulta, che l' auricola sinistra non è fatta da una sola cavità, ma da un sistema di concamerazioni interparietali, tutte comunicanti tra di loro, e per gli spazî intertrabecolari, confluenti in una specie di loculo terminale, rappresentato dall' apice auricolare, nel quale si raccoglierebbe il sangue intercettato per versarsi, nel momento della contrazione, nel seno auricolare.

Auricola Destra. — La figura II rappresenta il cuore destro nella sua *auricola*, e nel suo apparato *valvolare atrio-ventricolare*. L' apertura che si osserva in essa era opposta al *setto auricolo-ventricolare*, che è stato asportato insieme alle vene *cave superiore, inferiore* ed alla parete rimanente che costituiva il *seno* dell'orecchietta; per conseguenza, di tutta l'orecchietta, la figura non mostra che la sola *auricola*.

Nel capidoglio, come anche nel delfino, l'*orecchietta* è rappresentata, per circa un quarto, dalla parete corrispondente al *seno,* e tutto il rimanente costituisce l'*auricola.* Per tal ragione, sotto questo punto di vista, la differenza che passa tra il rapporto dell' auricola destra e del seno rispetto all' uomo e ad altri mammiferi è l'inverso.

La base del ventricolo n' è separata per una larga zona fibrosa semicircolare di circa sette centimetri di altezza, che corrisponde al *solco trasverso auricolo-ventricolare.* Pel grande sviluppo dell'auricola, questo *solco* all' esterno corrisponde esclusivamente al disotto della base della auricola stessa, ed all' interno la zona è continua in giro e forma come una cornice all'*ostio auricolo-ventricolare.* La zona fibrosa suddetta, nella figura, col suo margine inferiore è in rapporto con la inserzione valvolare del lembo destro (parietale anteriore) e lo spazio intercuspidale tra il precedente lembo ed il posteriore (parietale posteriore); col suo margine superiore è in rapporto con le inserzioni trabecolari auricolari.

La forma dell'auricola destra è molto allungata da dietro in avanti, e leggermente depressa. Il suo maggior diametro, che nella figura si estende da sinistra (*a*) a destra (*p*), è l'antero-posteriore (m. 0,58). Il diametro verticale (m. 0,24) si estende dal margine superiore della zona fibrosa (*z*) allo estremo superiore (*s*). Per quanto questi due diametri si mostrino facilmente e rappresentino la condizione naturale (meno la varietà da tenersi presente per la differenza tra lo stato fresco dell' organo ed il preparato a secco), altrettanto difficile e differente dal naturale è il diametro trasverso, il quale non ha un limite corrispondente al vero, ma alquanto minore, non essendo stato potuto fare il taglio sul limite preciso dell' organo; cioè in rapporto della intaccatura, che trovasi presso lo sbocco della vena cava superiore. Intanto volendo dare un diametro, che si avvicini al naturale, e quale si rileva dal preparato, si è preso per punto di partenza il margine della sezione, estremo interno presso il setto, fino al fondo della parete, ed esso misura 0,27.

Il solco trasverso auricolo-ventricolare forma una specie di collo (*c*) all'auricola, il quale, posteriormente, incomincia appariscente in corrispondenza della porzione membranosa del seno, e poi si va sempre più distinguendo per la sporgenza del margine libero dell' auricola, il quale margine si aumenta maggiormente verso la parte laterale fino a raggiungere la massima estensione nel suo apice anteriore. In questo margine libero non si trovano notevoli rilevamenti ma solo nella sua parte mediana vi ha un lobo diviso, per una intaccatura a parte posteriore, dal rimanente del margine posteriore e, per un' altra anteriore, dal restante margine anteriore. In tal maniera questo margine presenterebbe un lobo posteriore, uno medio, ed uno anteriore. I due primi a direzione orizzontale, l'ultimo a direzione ascendente, specialmente nella parte terminale, in corrispondenza dell'apice auricolare. Nel margine superiore o interno, verso la base dell' apice auricolare, in corrispondenza della separazione tra l'origine dell'*arteria polmonale* e dell'*aorta,* vi ha una insenatura (*i*), che sarebbe in rapporto della origine aortica; questa insenatura è divisa da un'altra, in vicinanza del punto corrispondente allo sbocco della vena cava superiore, per un lobo (*lb*) che s' interpone tra questi due ultimi tronchi vascolari; e di cui superiormente se ne osserva appena una piccola parte essendone stata asportata la parete corrispondente.

La restante parte della superficie superiore ed esterna dell'auricola è ondulata; ma senza depressioni notevoli e numerose, per cui non risultano lobuli distinti. Probabilmente la distensione della parete auricolare molto sottile, prodotta dalla preparazione, ha reso meno apparenti le ondulazioni della superficie, rispetto allo stato fresco; come anche è da notare, che i rapporti indicati dalle curvature del margine superiore, in corrispondenza dei grossi tronchi vascolari, si hanno nella massima distensione dell' auricola.

L'orecchietta, distinta nel seno e nell'auricola, ha la sua parete muscolo-membranosa che si continua sopra l' uno e l' altra. Il limite di separazione tra queste due parti è definito non solo dalla forma esterna, in quanto che vi esiste una specie di collo *seno-auricolare* (*c'*) che, dirigendosi in basso ed all'esterno, va poscia a continuarsi col collo *ventricolo-auricolare* sulla faccia esterna della zona fibrosa; ma più ancora dal trovarsi nella parete interna della porzione auricolare un rivestimento a trabecole muscolari che, partendo dal collo dell'auricola con molti raggi, va a riunirsi in un centro muscolare. In tal maniera anche l'auricola destra ha una doppia parete, l'una esterna *muscolo-membranosa* (*m*) continua; l'altra interna *muscolo-trabecolare* (*f*) interrotta. Tra queste due pareti, distanti fra loro, vi ha uno *spazio interparietale* non continuo, ma interrotto da altre trabecole più esili, che, mentre collegano le due pareti tra loro, servono anche a dividere lo spazio interparietale in tanti *loculi* di varia forma e grandezza, e largamente comunicanti tra di loro per gli *spazî intertrabecolari* (*si*).

Una condizione di struttura, che molto si avvicina alla precedente, si trova nel delfino comune, il quale, tenuto conto delle dimensioni molto piccole, in un modo rudimentale permette la distinzione della doppia parete e dello spazio interparietale; e ciò perchè, come si è detto, nei cetacei l'auricola, rispetto al seno, ha uno sviluppo notevole; al contrario del grande sviluppo del seno rispetto alle dimensioni piccolissime dell'auricola di altri mammiferi. Però con un esame molto accurato, e diretto a questo scopo, potrebbe questa separazione interparietale riscontrarsi ancora in quelli ad auricola piccolissima.

La trabecola primaria è rappresentata da una lamina, diretta dall'interno all'esterno, che origina insensibilmente dal limite di transizione tra la porzione sottile laminare del seno, la quale si continua nella parete muscolo-membranosa dell'auricola esternamente, e che poi, quasi sdoppiandosi internamente, viene a costituire la seconda parete interna muscolo-trabecolare, concentrica alla prima.

Questa fascia trabecolare orizzontale è di figura rettangolare, e si comporta come una volta poggiata su pilastri rappresentati da distinte trabecole riunite insieme da archi. Il suo lato corto, interno, è in continuazione con la parete del seno; l'altro corto, esterno, è biforcato e si continua con due trabecole secondarie corrispondenti, ciascuna delle quali segna il limite di separazione tra il lato corto esterno della fascia rettangolare, ed i due lati lunghi della stessa, l'uno in avanti e l'altro in dietro, da cui si prolungano le trabecole secondarie del gruppo anteriore e posteriore.

In tal modo questa fascia trabecolare primaria, e le trabecole secondarie, che se ne dipartono, e che la congiungono al margine della zona fibrosa auricolo-ventricolare rappresentano una specie d'*intravatura* principale, da cui si spiccano altre ramificazioni,

le trabecole terziarie, che partendo da quelle secondarie, in direzione per la massima parte obliqua da sotto in sopra e da dentro in fuori, si vanno ad espandere nella parete muscolo-membranosa esterna, ove si sperdono; per la quale ragione le ho dette *interparietali*, od anche *terminali*.

Quella trabecola primaria laminare ha una lunghezza di circa m. 0,20, una spessezza di mm. 6, ed una larghezza di m. 0,08. Ad onta della sua espansione a lamina, essa non è continua, ma nella parte mediana presenta interruzioni circolari più o meno ampie; e nel caso delle più ampie, che arrivano fino a m. 0,04 di diametro, di contro all' apertura si adatta come un coperchio trabecolare a direzione raggiata, i cui raggi si fissano all'intorno del margine di detta apertura. Per conseguenza si ha che mentre i fori della larga lamina facilitano il passaggio del sangue nello spazio interparietale, riducono anche la quantità muscolare; modificano la direzione della contrazione muscolare da rettilinea in circolare o a sfintere (molto opportuna per favorire la contrazione delle trabecole secondarie a direzione raggiata) e la diminuzione della sostanza muscolare non è a scapito della potenza contrattile, pel compenso di quelle trabecole sopraggiunte.

Dal margine posteriore di detta fascia si spiccano le trabecole posteriori, al numero di tre (1, 2, 3). Le due poste più indietro (1, 2) sono corte, perchè raggiungono presto il margine superiore della zona fibrosa, il quale posteriormente si fa alquanto obliquo. Queste due trabecole sono molto grosse, piuttosto laminari che rotonde e, quantunque tra di loro molto vicine, hanno parecchi altri rami interposti, i quali rendono molto più solida la connessione tra loro e quelle di terzo ordine, che ne emanano. L' altra trabecola posteriore (3), messa più innanzi delle precedenti, e che perciò potrebbe dirsi anche laterale, è molto più lunga e più sottile di esse, con le quali sta in connessione solo superiormente, in modo che il suo arco di unione con la seconda resta interrotto nel terzo superiore da ramificazioni trabecolari interposte. Da queste trabecole posteriori di secondo ordine partono quelle terziarie, le quali sono le più sottili, le più corte e le più numerose, e che spiccandosi dalle precedenti con direzione obliqua da sotto in sopra, producendo angoli di diversa apertura, vanno a terminare espandendosi sulla superficie interna muscolo-membranosa. Il maggior numero di queste trabecole interparietali si trova in corrispondenza delle due trabecole posteriori più ravvicinate (1, 2) e sono esse le più corte, le più robuste e frastagliate in maniera da non circoscrivere dei loculi, ma da formare un tratto a guisa di spugna; tra le due trabecole precedenti e l'altra (3) posta più innanzi ve ne sono altre più lunghe, più sottili e più rade.

In complesso tutte le trabecole interparietali, che procedono dalle tre trabecole posteriori, ascendono a circa 50.

Dal margine anteriore della fascia trabecolare primaria si spiccano le trabecole secondarie anteriori, ancor esse al numero di tre; di cui una (4) in basso a direzione verticale, e le altre due in alto a direzione orizzontale che non appaiono nella figura. La prima, che è la continuazione del ramo anteriore di biforcazione di detta fascia, è molto lunga, e di grossezza quasi uniforme (ad eccezione dei due suoi estremi, sulla zona e sulla fascia, che sono dilatati) forma con la posteriore, che, come si è detto, è la continuazione del ramo posteriore di biforcazione, l'arco più

alto, regolare e del tutto privo di ramificazioni commessurali interposte. Da questa trabecola, solo nella estremità inferiore presso la zona, si spiccano alcune trabecole interparietali, dirette allo esterno ed in avanti, e nella estremità superiore se ne dipartono altre, che ancora esse si dirigono lateralmente ed in avanti. Delle altre due trabecole anteriori, che sono orizzontali e fra loro parallele, l'una è interna, cioè verso il setto, e l'altra esterna, cioè verso il fondo laterale auricolare. La prima si spicca direttamente dalla fascia, e l'altra dal ramo anteriore di biforcazione della stessa, il quale mentre in basso si continua con la prima trabecola anteriore verticale suddescritta, spicca in alto ed anteriormente la trabecola orizzontale esterna. Entrambe le trabecole orizzontali, giunte di contro all'intaccatura corrispondente all'apice anteriore dell'auricola, entrano in connessione con le trabecole interparietali, che si originano da alcune altre aggruppate in fasci, e che dividono verticalmente la insaccatura auricolare nel senso antero-posteriore formando due loculi, l'uno verso il setto, e l'altro verso il fondo auricolare. Di queste trabecole, che possono dirsi dell'*apice auricolare,* la più vicina all'ostio auricolare s'inserisce in parte al margine superiore della zona fibrosa, ed in parte alla faccia inferiore della parete membranosa.

L'altra che segue, egualmente diretta, più presso all'apice, e senza ramificarsi nè in basso nè in alto, unisce le due pareti membranose, inferiore e superiore dell'apice auricolare. La trazione di queste robuste trabecole dell'apice auricolare disegna nella faccia inferiore di esso un profondo solco antero-posteriore, che lo divide nei due loculi sopra indicati, molto ampî e che possono dirsi i *loculi* dell'*apice-auricolare.* Le trabecole interparietali della porzione anteriore si avvicinano anch'esse a circa 50; considerando come tanti rami distinti tutti quelli che vanno a terminarsi alla parete membranosa; parecchi dei quali provengono da un solo tronco di origine dalla parete muscolo-trabecolare.

Oltre alle trabecole precedentemente indicate, appartenenti al gruppo anteriore e posteriore, è da considerarne un'altra, la quale si trova propriamente in corrispondenza della biforcazione della fascia trabecolare, e che separa inferiormente lo spazio intertrabecolare in due spazî, anteriore e posteriore. Questa trabecola, che pel sito potrebbe dirsi laterale, origina con un grosso tronco sul margine della zona, e con parecchie, brevi e sottili radici di rinforzo sulla faccia inferiore della parete membranosa, e si dirige obliquamente in fuori ed in alto con tre rami principali; due più corti posteriori, che diretti obliquamente in alto ed in fuori, vanno a sperdersi sul fondo laterale auricolare, ed un altro anteriore lunghissimo, che nel suo decorso dà alcuni corti rami terminali alla parete e si prolunga fino alla volta dell'auricola, dove si collega col sistema trabecolare generale. Come si rileva, questa trabecola, interposta a' due gruppi anteriore e posteriore, si comporta differentemente da tutte le altre, in quanto che, originata dalla zona, si dirige alla parete membranosa, e con un ramo terminale si collega al sistema generale. Per cui, se per la sua inserzione alla zona si rassomiglierebbe allo estremo inferiore di una trabecola secondaria, per la sua diretta terminazione sulla parete membranosa si rassomiglierebbe ad una trabecola terziaria; in altri termini essa sarebbe intermedia tra le secondarie e le terziarie propriamente dette; ed è la sola che si trova nella parte mediana della parete laterale dell'auricola. Nella quale regione, se da un lato il diradarsi delle

trabecole è utile, per facilitare il ravvicinamento della porzione anteriore alla posteriore nella sistole auricolare; d'altra parte era anche necessario, per impedire una distensione eccessiva, che una trabecola solidamente s'inserisse nel margine della zona fibrosa, e che, dopo breve tragitto, raggiungesse la parete membranosa stessa, a cui doveva servire di rafforzo.

Riassumendo si ha, che la parete trabecolare si compone di trabecole orizzontali, (*fascia trabecolare*, e le due trabecole *anteriori superiori* (5-6)); di trabecole verticali (le tre *posteriori* (1, 2, 3) e la prima *anteriore* (4), tra la fascia muscolare e la zona fibrosa, e le due dell'apice auricolare) e di trabecole oblique (la massima parte delle *interparietali*).

La biforcazione della fascia trabecolare separa il gruppo delle trabecole posteriori da quello delle anteriori; quantunque il numero delle trabecole dei due gruppi sia quasi lo stesso, occupando le anteriori un' area doppia delle posteriori, queste sono più aggruppate, più corte, più uniformemente oblique, e formano una specie di tessuto alveolare a piccole lacune; mentre le altre sono più spaziate, più lunghe e più svariate nella direzione in modo da circoscrivere dei loculi di diversa ampiezza.

Ad onta che non vi sia una separazione ben circoscritta dei loculi, pure se ne possono indicare due anteriori, in corrispondenza della insaccatura dell'apice auricolare separati dalle due trabecole verticali ivi indicate.

Questi due loculi sono largamente tra di loro comunicanti per la distanza delle due colonne verticali interparietali, ed anche sono comunicanti con le lacune corrispondenti alla volta. Infine si nota un terzo loculo laterale, limitato dalla trabecola verticale anteriore (4), dalla biforcazione superiore della fascia, dalla trabecola posteriore (3), e dal tratto del margine della zona fibrosa, interposto tra le due indicate trabecole; il fondo di questo loculo è rappresentato da un infossamento della parete membranosa in corrispondenza della base media del margine dell'auricola. Questo loculo è largamente comunicante in sopra e posteriormente con tutte le lacune intertrabecolari.

Confronto tra le due auricole e conclusioni. — Entrambe le auricole sono circoscritte, in sopra ed in dentro, da un collo *seno-auricolare*, in sotto ed in fuori, da un collo *auricolo-ventricolare*. Entrambe hanno una parete *muscolo-membranosa*, continuazione della parete del seno, ed una parete *trabecolare* propria, che forma un rivestimento interno alla prima, e da essa separata da uno *spazio interparietale* diviso in *loculi* e *lacune*. La parete interna è fatta dalla *fascia trabecolare primaria* e dalle *trabecole secondarie*, che formano uno strato frastagliato, concentrico alla parete esterna, ed entrambe queste pareti sono riunite come da un trapunto fatto dalle trabecole *interparietali* o terziarie o terminali. In entrambe le auricole le fasce trabecolari primarie per origine, forma, direzione e numero di rami trabecolari secondarî si rassomigliano. Tanto dalla fascia trabecolare primaria destra che sinistra, come rami da un tronco, si dipartono sei trabecole quasi simili che si distinguono o in due gruppi, l'uno posteriore e l'altro anteriore, od anche esse si possono dividere in due posteriori, due laterali e due anteriori, e che si comportano come raggi che, partendo dalla fascia trabecolare originata dal collo seno-auricolare, si dirigono al margine superiore della zona fibrosa, porzione inferiore del collo auricolo-ventricolare ed all'apice auricolare. Una differenza però esiste nel numero e distribuzione

delle trabecole interparietali, di cui a destra se ne possono contare fino a 100, e che a sinistra arrivano appena a 60; da ciò ne viene di conseguenza che il numero dei loculi a sinistra è maggiore, essendo di 9 rispetto a quelli di destra che sono solo 2 ben circoscritti. Oltre a ciò la diradazione trabecolare è massima nella regione laterale dell'auricola destra, e nella regione anteriore dell'auricola sinistra; però queste due condizioni diverse concorrono allo stesso scopo, cioè, al massimo raccorciamento del diametro antero-posteriore, tanto nell'auricola destra, pel ravvicinamento della metà anteriore alla posteriore agevolato dalla mancanza di trabecole nella regione laterale, quanto nella sinistra, pel raccorciamento principalmente della metà anteriore in gran parte priva di trabecole.

Infine deducendo il risultato funzionale dalle condizioni di forma, distribuzione e rapporto del sistema trabecolare delle auricole, si ha che nella diastole la massa sanguigna resta, per così dire, divisa in una parte centrale, che occupa la capacità del seno, e in una parte periferica, che riempie e distende i loculi auricolari; e la sottile parete esterna auricolare, per la sua inserzione in basso al margine superiore della zona fibrosa, in alto alla parete del seno con cui si continua, e pel regolare rinforzo della intravatura trabecolare, non può essere distesa di soverchio e quasi sfiancata da così forte tensione. D'altro canto l'enorme massa sanguigna, divisa in due porzioni, non gravita che con la parte centrale sull'apparato valvolare atrio-ventricolare, il quale quando si apre, nella diastole ventricolare, accoglie prima la parte sanguigna centrale, che vi si precipita rapidamente; mentre la parte periferica, come acqua montana frenata nella sua corsa torrenziale dalle foreste, discende gradatamente dai loculi e dalle lacune, incalzata dai successivi movimenti della contrazione sistolica auricolare. Questa in complesso è prodotta dalla scomparsa dello spazio interparietale per la contrazione delle trabecole terziarie, che addossano lo strato esterno membranoso allo strato interno trabecolare; dalla scomparsa dei loculi, per la contrazione della fascia muscolare primaria, che ravvicina le trabecole secondarie; e per la contrazione totale centripeta di tutto il sistema trabecolare, che fa punto di attacco intorno al collo seno-auricolare e ventricolo-auricolare, anche la capacità propria del seno che vi è in continuazione, è ridotta al minimo nel termine della sistole stessa. Osservando la direzione e comunicazione dei loculi, e la usura per sfregamento nella parete inferiore anteriore presso l'apice auricolare, più apparente nell'auricola destra, parrebbe che il sangue dovesse, scendendo, seguire un giro a spira e formare vortice nell'imbuto valvolare, e ciò sarebbe anche favorevole per meglio infilare il cono arterioso valvolare, come sarà detto in seguito.

Apparati valvolari atrio-ventricolari.

Prima di entrare a parlare particolarmente degli apparati valvolari sarà bene premettere alcune norme generali intorno alla divisione dell'argomento, ed all'ordinamento e denominazione delle parti, per potere semplificare la nomenclatura in modo da chiarire l'intricata materia onde riesca facile di stabilire le esatte omologie delle parti dei diversi apparati valvolari, per giungere infine ad alcune formole generali,

a cui mi ha condotto lo studio prolungato, e seguito con grande interesse, del cuore e dei tronchi primarî arteriosi del capidoglio.

Negli apparati valvolari atrio-ventricolari sono da considerare le seguenti parti. La *zona fibrosa*, dal cui margine inferiore si prolungano i *lembi o cuspidi valvolari*; l'un lembo è separato dall'altro da profonde fenditure semicircolari a margini dentati, le quali possono dirsi *archi dentati intercuspidali*; dai denti di questi si continuano le corde tendinee, disposte in giro a guisa di raggi di un ventaglio, divergenti in alto, convergenti in basso, come in un centro, e questi gruppi tendinei possono dirsi *ventagli tendinei* intercuspidali. I centri di loro convergenza in basso sono i *pilastri muscolari*; questi alla loro base si fondono con una specie di *zona muscolare*, la quale dei varî pilastri forma un sistema solo; allo stesso modo come fa la zona fibrosa coi lembi valvolari. Entrambi questi sistemi, fibroso superiore, e muscolare inferiore, sono riuniti assieme dai ventagli tendinei interposti.

Gli apparati valvolari atrio-ventricolari hanno le loro parti per numero, forma, posizione, reciproco rapporto e tipo ternario di costruzione, molto somiglianti tra loro (per quanto ciò è possibile nelle forme organiche) ed a cui non fa eccezione, come sarà dimostrato in seguito, l'apparato atrio-ventricolare sinistro, che se è modificato ed alquanto ridotto nel relativo sviluppo di uno dei suoi lembi, conserva però il tipo valvolare ternario, così spiccato negli altri apparati valvolari cardiaco arteriosi.

Oltre a ciò, da tutti gli apparati valvolari non solo atrio-ventricolari, ma anche arteriosi, emerge un carattere molto importante, che chiamerò di orientazione delle parti, considerate rispettivamente al setto cardiaco, che è un vero piano di orientazione dei lembi degli apparati valvolari. Per tale determinazione prendo a modello l'apparato atrio-ventricolare destro, e quanto sarà detto per questo, sarà applicabile pure all' apparato atrio-ventricolare sinistro, ed anche agli apparati valvolari aortico e polmonale per tutto ciò che essi hanno di comune tra loro.

Considerando circolare, l'apertura della zona fibrosa atrio-ventricolare destra, i tre lembi, che si prolungano dal margine inferiore della stessa, vengono a dividere il circuito in tre parti uguali, e le corde di questi tre archi darebbero la figura di un triangolo isoscele inscritto nell'ostio atrio-ventricolare; uno dei due lati uguali, sarebbe interno cioè sul setto, e l'altro esterno cioè sulla parete laterale, ed il terzo in dietro sulla parete posteriore; in tal modo questo triangolo, col vertice in avanti verso lo sterno, la base indietro verso il rachide, è rappresentabile con un lato al setto cardiaco, il quale sarà il piano di partenza per istabilire l'omologia tra' lembi di uno stesso apparato e quelli degli altri apparati valvolari. Così il lembo sul setto sarà chiamato *settale, centrale, interno*, o anche semplicemente il *primo*, o per brevità potrà designarsi col semplice numero I. Il suo lato omologo sarà il lembo *parietale esterno*, o l'*esterno* semplicemente, o il *secondo*, II; quello sulla base, ch' è impari rispetto agli altri due pari, si può dire il *parietale posteriore*, o il *posteriore*, o il *terzo*, III. Gli angoli del triangolo valvolare sono regolari nelle valvole arteriose, polmonali ed aortiche, ma nelle valvole ventricolari sono tronchi; perchè tra un lembo e l'altro vi è una separazione fatta da un margine dentato intercuspidale, cui ho dato il nome di *arco dentato intercuspidale*; questi archi adunque sono tre in corrispondenza degli angoli, e si possono chiamare *arco anteriore*, o il *primo*, I, perchè interposto tra il lembo settale e

l'esterno, cioè tra il I ed il II; *arco esterno*, o il *secondo*, II, perchè interposto tra il secondo e il terzo lembo; ed *arco interno*, o *terzo*, III, perchè interposto tra il terzo e primo lembo. In corrispondenza dei tre archi intercuspidali vi sono i tre *ventagli tendinei*, che anch'essi si denomineranno *ventaglio anteriore*, o il *primo*, I; ventaglio *esterno*, o il *secondo*, II; *ventaglio interno*, o il *terzo*, III. Così, anche in corrispondenza dei tre ventagli tendinei, vi sono i tre pilastri muscolari, i quali pure si denomineranno, il *pilastro anteriore*, o il *primo*, I; il *pilastro esterno*, o il *secondo*, II; ed il *pilastro interno*, o il *terzo*, III.

Dovendo più volte indicare nel corso della descrizione queste diverse parti, è stato necessario di precisare i termini di rapporto e di semplificarli, in guisa che mentre non rechino difficoltà a riferirli giustamente alle parti indicate, d'altro canto ciò sia possibile nel modo il più breve.

Riassumendo adunque, negli apparati atrio-ventricolari bisognerà dire ciò che riguarda: 1° la zona fibrosa; 2° i lembi valvolari; 3° gli archi intercuspidali; 4° la zona muscolare; 5° i pilastri; 6° i ventagli tendinei.

Apparato valvolare atrio-ventricolare destro. Zona fibrosa. — La zona fibrosa (*z*) nel preparato non è intera, e di essa esiste quel tratto in corrispondenza dell'auricola, cioè il terzo antero-laterale, in tal modo dei tre lembi valvolari solo il secondo conserva i suoi rapporti con la zona; ma siccome gli altri due lembi sono uniti al secondo, ai pilastri, alla zona muscolare, ad una parte del setto ventricolare, ed al tratto esistente della zona, così questa offre i rapporti delle parti principali ben conservati, e pel modo adoperato nel fare i tagli, il tutto si mostra a colpo d'occhio, come appare dalla fig. II. La zona è stata anche distaccata dalla parete ventricolare, per isolare l'apparato valvolare e renderne possibile la conservazione, asportando l'enorme massa delle pareti ventricolari. La sua larghezza dal margine superiore auricolare al margine inferiore ventricolare è notevole, e dal tratto che rimane, di cui si è data la descrizione, parlando dell'auricola, appare la sua ampiezza.

Lembi valvolari. — I lembi valvolari, essendo stati studiati nel preparato a secco, si considerano come rigidi in maniera da formare un cono valvolare, e secondo questa norma sono riferiti i loro rapporti. In ciascun lembo è da distinguere il *margine superiore* (*m a*) completamente aderente al margine inferiore della zona fibrosa; il *margine inferiore* (*m l*) completamente libero e liscio, ed i due *margini dentati* (*m d*), che continuandosi in un semicircolo, dal margine di un lembo a quello dell'altro vicino, formano gli *archi dentati intercuspidali*, ed infine le due facce, l'*auricolare o liscia*, e la *ventricolare o scabra*. Del margine superiore aderente, non essendovi interruzione tra un lembo e l'altro, non si può dare una misura propria a ciascuno di essi, ma si dà la circonferenza totale, che corrisponde naturalmente anche alla circonferenza interna della zona fibrosa, o ostio atrio-ventricolare, e tale misura è di m. 1,20.

La larghezza del margine opposto al precedente, cioè l'inferiore, essendo questo perfettamente distinto, si può esattamente misurare per ciascun lembo, ed è variabile di poco essendo nel I (0,08); nel II (0,09); nel III (0,10).

L'altezza dei lembi, misurata dal margine libero inferiore al margine aderente alla zona, è nel I (0,11); negli altri due, che sono uguali tra loro, (0,15). Come si rileva dalle dimensioni il primo lembo è il più stretto ed il più corto; il più

grande è il terzo. La spessezza dei lembi è più di un millimetro nel margine aderente, e va assottigliandosi verso i due margini dentati, ed il margine liscio; questo non è proprio tagliente, ma conservando ancora una certa grossezza, ha un orlo arrotondato, mentre il margine dentato è tagliente in quei tratti tra un dente e l'altro, e dove è il dente, in corrispondenza dell'inserzione di una corda tendinea, s'inspessisce. Le corde tendinee potendo inserirsi proprio sul margine, o estendersi più o meno sulla faccia ventricolare dei lembi, ora a forma di cordoni, ora, il più sovente, a forma di espansioni membranose, rafforzano la tessitura dei lembi, ed ingrossano inegualmente la faccia ventricolare dei medesimi, la quale è molto scabra pel grandissimo numero di ramificazioni tendinee che vi pervengono.

Delle corde tendinee, che arrivano in ciascun lembo dai due margini dentati, alcune s'incontrano con le opposte ad archi ed angoli svariatissimi, ed altre, le più grandi, si avvicinano verso la linea mediana verticale di ciascun lembo, arrivano fino all'attacco con là zona, e si continuano con robuste colonne carnose delle pareti ventricolari aderenti alla zona. Come anche alcune trabecole muscolari non solo si attaccano al margine aderente dei lembi, ma anche prolungandosi in basso vanno ad incontrare le lamine ora indicate, ed esse trabecole, che dirò *arciformi*, formano come archi molto sporgenti in alcuni punti dell'angolo tra l'inserzione dei lembi e delle pareti ventricolari sulla zona fibrosa. Per tutta questa orditura fatta dallo intessersi delle terminazioni tendinee di varia forma e direzione, la faccia ventricolare dei lembi riesce molto scabra per solchi e rilievi, mentre la loro faccia auricolare è molto levigata.

Archi dentati intercuspidali. — Il margine dentato di un lembo, continuandosi con quello del lembo limitrofo, forma un semicerchio, *arco dentato intercuspidale*. L'ampiezza di questi archi è data dalla corda tirata dall'angolo di un lembo (formato dal margine dentato col margine liscio) all'angolo opposto dell'altro; di questi tre archi, il primo è il maggiore, misurando 0,25, il secondo è di media grandezza (0,23), il terzo è il minore (0,19).

Dei tre archi, il secondo ed il terzo hanno una curva molto regolare e simmetrica, il che vuol dire, che i due margini dentati dei lembi corrispondenti sono simili tra loro, e vi concorrono in parti uguali; mentre per contrario il primo arco, ch'è il più ampio, è anche il meno simmetrico; e ciò perchè solo il margine dentato del secondo lembo ha una curvatura simile alle altre, mentre invece il margine corrispondente al primo lembo è più lungo del precedente ed anzichè curvo, quasi rettilineo.

Zona muscolare. — La zona muscolare (*z*) inferiore è il contrapposto della zona fibrosa superiore. Come da questa procedono i tre lembi, così da quella procedono i tre pilastri; l'una rappresenta l'orifizio superiore, che conserva costante il suo diametro, l'altra invece ha il massimo di apertura nel tempo della diastole, e si chiude, accostandosi al setto, nel momento della sistole ventricolare.

La zona muscolare presenta la sua maggior larghezza non nel senso verticale, come la zona fibrosa, ma invece nel senso orizzontale. La figura totale della fascia è triangolare con gli angoli arrotondati, e forma un tramezzo nella cavità ventricolare, su cui si trovano i pilastri, anteriore (I), esterno (II), ed interno (III). La zona muscolare triangolare è di varia larghezza; giacchè in corrispondenza del secondo pilastro è al massimo, cioè 0,09, del primo 0,06, e del terzo 0,03. I tre lati della zona

muscolare, corrispondenti per direzione ed estensione ai tre lembi valvolari, ed i tre angoli, coincidenti con i tre archi dentati intercuspidali, si presentano differenti. Quello sul setto è il lato più stretto degli altri due, e si può dividere in due margini, l' uno aderente al setto, e l'altro libero; il margine aderente presenta delle linguette muscolari con cui si fissa al setto, il margine libero è liscio, arrotondato e rivolto verso il lato esterno; la sua superficie superiore è quasi liscia ed anch'essa libera, mentre la faccia inferiore si unisce col sistema trabecolare dell'apice del ventricolo nel lato corrispondente al setto. Il lato esterno è il più largo; anch'esso presenta un margine interno liscio rivolto verso il precedente, ed una faccia superiore anche liscia, la faccia inferiore ed il margine esterno si collegano col sistema trabecolare dell' apice ventricolare corrispondente al lato esterno. Il lato posteriore è diverso dai precedenti, perchè non è semplice che solo in corrispondenza del secondo e terzo pilastro; ma subito dopo, dipartendosi dal secondo pilastro per avvicinarsi al terzo, si divide in due strisce carnose parallele, di cui l'anteriore limita lo spazio triangolare, e la posteriore si collega col sistema trabecolare dell'apice del lato posteriore. In tal modo resta limitata l'apertura della zona muscolare triangolare, la cui ampiezza misurata dall' angolo anteriore al lato posteriore è di 0,25.

L'apertura triangolare, alla sua volta, è divisa in due triangoli, l'uno anteriore e l'altro posteriore, da tre trabecole fissate per più linguette trabecolari con un estremo al terzo pilastro, e con l'altro sulla metà del lato esterno; queste trabecole sono arrotondate a guisa di cordoni, ed all' infuori delle loro estremità fisse, sono nel rimanente perfettamente libere come corde tese sull'apertura triangolare. Queste tre trabecole corrispondono alla *trabecola regolatrice* del King, che nell' uomo è unica e diretta dal setto alla parete esterna, a livello della base dei pilastri. Oltre le tre trabecole regolatrici, con molte ramificazioni di attacco agli estremi, ve n' è un'altra semplice, più sottile e più corta, che si spicca dal lato muscolare esterno, al davanti delle precedenti, e va ad attaccarsi al margine libero del lato interno presso al pilastro anteriore.

Per farsi una giusta idea della zona muscolare, e dei suoi rapporti coi pilastri, coi lembi dell'apparato atrio-ventricolare, e con le pareti del ventricolo, bisogna ricordare la forma della cavità ventricolare destra. Il ventricolo destro ha forma di piramide triangolare con la base in alto e l'apice in basso; delle tre facce, la interna è convessa, l'antero-esterna, e la posteriore sono concave; dei tre spigoli, l'esterno è arrotondato. Nell'apice ventricolare si ha un aspetto lacunare e alveolare, prodotto da un intreccio reticolato delle trabecole muscolari, numerosissime all'apice, e che poi vanno mano mano diminuendo, fino a scomparire nelle pareti, in corrispondenza della base ventricolare.

Sulla parte superiore di quel sistema trabecolare dell'apice trovasi dunque questa zona muscolare triangolare; la quale, come si è detto, con la sua faccia inferiore, e col suo margine esterno e posteriore, sta in intima connessione col detto sistema trabecolare sottoposto, e col suo margine interno è aderente al setto. In tal modo la forma triangolare della zona muscolare, la direzione dei lati e degli angoli coincidono con quella della cavità ventricolare; ma il triangolo della zona è molto più piccolo rispetto al triangolo parietale; per cui ne segue, che il lato interno di quella aderisce al

setto con la sua metà posteriore; e gli altri due invece sono distanti dalla parete laterale e dalla posteriore; i tre lati però per estensione e per direzione corrispondono con i tre lembi valvolari.

Pilastri muscolari. — Sui tre angoli arrotondati, anteriore, esterno ed interno della zona muscolare, s' impiantano i tre pilastri muscolari, i quali corrispondono esattamente al centro degli archi dentati intercuspidali; l'anteriore, per grandezza, forma e direzione delle sue fibre, si differenzia dagli altri due, l' esterno e l' interno, che si rassomigliano molto fra loro.

Per le precedenti condizioni la posizione dei pilastri, nel ventricolo destro del capidoglio, è molto regolare e simmetrica, rispetto a ciò che si osserva nell' uomo ed in altri mammiferi, in cui vi esiste un numero maggiore, e spesso variabile di pilastri, ed in cui le corde tendinee, sorgendo da un numero diverso di pilastri, ed anche dalla parete interna del ventricolo, non possono avere quella regolarità dei tre ventagli tendinei, che sorgono dai tre pilastri, come si osserva nel capidoglio stesso.

Il primo pilastro non ha la forma di un muscolo papillare, ma di una lamina carnosa, a fibre orizzontali; con l'estremo interno si fissa alla parete del setto, e con l'estremo esterno si fonde col lato esterno del triangolo carnoso corrispondente, col lato inferiore aderisce all' angolo anteriore della zona muscolare, e col lato superiore dà origine a' tendini, i quali, per la lunghezza del margine del pilastro, non sono convergenti, ma quasi paralleli, e diventano convergenti solo nel momento del raccorciamento della lamina carnosa nella sua contrazione. Nel pilastro anteriore è da distinguere anche una faccia anteriore, rivolta verso la parete anteriore ventricolare, ed una faccia interna rivolta al centro della cavità ventricolare e sulla quale prendono attacco alcune corde tendinee. La lunghezza del pilastro anteriore è di 0,15, la sua altezza di 0,06, e la sua spessezza di 0,002. Nella sua contrazione, in senso orizzontale, non solo ravvicina a ventaglio le estremità inferiori delle corde tendinee, ma ravvicina al lato aderente al setto il lato esterno del triangolo muscolare. Esso pilastro forma come il perno della cerniera di un compasso, le cui due branche corrispondessero l' una al lato esterno, e l'altra al lato interno aderente al setto. Continuando la similitudine, alle due punte del compasso corrisponderebbero gli altri due pilastri posteriori, l' esterno e l'interno, che potrebbero essere ravvicinati per la contrazione del lato posteriore del triangolo muscolare, teso fra i due pilastri posteriori.

I pilastri posteriori sono molto simili tra loro per la forma papillare appiattita, per la direzione verticale delle loro fibre, e per avere le basi, aderenti agli angoli corrispondenti della zona triangolare, molto slargate, e gli apici ristretti però bilobi, su cui sorgono i ventagli tendinei, divisi, per la biforcazione dell'apice del pilastro, in due gruppi di tendini divergenti. Le misure dei pilastri posteriori sono eguali fra loro, e sono le seguenti: larghezza all'apice 0,06, altezza 0,04, spessezza 0,002.

Misurando le distanze dal I al II pilastro si hanno 0,33; dal I al III 0,31, e dal II al III 0,25; ciò vuol dire anche che i tre lati del triangolo carnoso sono di varia lunghezza, e che il posteriore, più corto, contraendosi ravvicinerebbe i due pilastri posteriori, e ridurrebbe il triangolo ad una semplice rima antero-posteriore;

e la trabecola del King, e l'altra accessoria, concorrerebbero a ravvicinare tra loro i due lati, l'esterno e l'interno. D'altra parte questi due lati, facendo punto fisso sul pilastro anteriore, che supera di un terzo la grandezza dei due posteriori presi assieme, tirano questi in avanti; ed il pilastro anteriore, raccorciandosi con la sua contrazione sul setto, li avvicina a questo; in tal modo tutti e tre i pilastri, in un fascio presso al setto, formerebbero l'apice inferiore chiuso del cono valvolare, ed i tre pilastri, tirati in alto dai tendini laminari massimi (che saran descritti in seguito) si troverebbero in corrispondenza degli archi dentati intercuspidali, e degli angoli dei lembi valvolari, comportandosi, ad un dipresso, come i *noduli* di *Aranzio,* rispetto alla chiusura centrale dei lembi delle sigmoidi. Intanto, mentre i pilastri sono tirati in alto, presso la zona fibrosa e nel mezzo dell'asse del cono valvolare, per le contrazioni della zona muscolare triangolare, il sistema trabecolare dell'apice è tirato verso la zona muscolare, cioè verso la base, e le sue lacune, nel primo tempo amplificate, danno più facile corso al sangue. Il quale, per l'avvicinarsi all'asse della parete posteriore e laterale, per la successiva scomparsa delle lacune nella parte spongiosa dell'apice e, per le contrazioni del reticolo trabecolare, si raccoglie a sinistra e s'incanala nel cono arterioso anteriore e di qui è iniettato nell'arteria, esclusivamente nel massimo della sistole ventricolare. Bisogna por mente, che tutti questi complicati movimenti si compiono successivamente, ma in brevissimo tempo; a mano a mano che la cavità ventricolare si restringe, il sangue del tratto discendente valvolare infila nel cono ascendente arterioso, la cui apertura arteriosa valvolare dà facile ingresso anche al sangue leggermente premuto, e così, solo la parte del sangue, rimasta nel cono arterioso, sarebbe espulsa per la forte spremuta, ed iniettata con tutta la forza sistolica, che costituisce il massimo impulso circolatorio. Insomma la chiusura valvolare sulla zona fibrosa è fatta dalla sistole auricolare, la quale si prolungherebbe di tanto, dopo la incominciata sistole ventricolare, da permettere la chiusura inferiore della zona muscolare; quindi la orecchietta entra in diastole, ed il ventricolo compie la sua vera sistole espulsiva, tutta coordinata verso il cono arterioso e non verso l'apparato atrio-ventricolare, rimasto chiuso ed accantonato in dietro ed in dentro.

Ventagli tendinei. Tendini angolari. — Avendo innanzi chiamato *ventagli tendinei* l'assieme dei varî gruppi di tendini, dirò ora delle proprietà di questi in particolare. I tendini principali di ciascun ventaglio sono quattro, tutti gli altri sono accessorî o complementari; i principali sono costanti nel loro numero, gli altri variabili. I tendini principali, alla loro volta, per posizione, rapporti, dimensioni ed ufficio, si distinguono in vario modo. I più esterni del ventaglio in basso non originano dall'apice dei pilastri, ma qualche volta dalla base dei medesimi, e più generalmente dalla faccia superiore della zona muscolare triangolare, e vanno ad attaccarsi in alto all'angolo corrispondente di ciascun lembo valvolare, formato dal margine liscio inferiore e dal margine dentato laterale; per questo attacco all'angolo del lembo li distinguerò col nome di *tendini angolari*, od *angolari* semplicemente. Ognuno di essi sorge unico in basso e si attacca al lembo con grande numero di rami terminali di tre specie, cioè con uno o due rami precisamente all'angolo, con varî rami sul margine dentato e con altri che si espandono a linguette triangolari sulla faccia scabra del lembo. Questi tendini angolari hanno una grossezza e lunghezza media rispetto

agli altri, misurando in diametro 0,001 ed in lunghezza 0,18. Tutti i tendini angolari si comportano allo stesso modo, ad eccezione del primo, cioè quello del primo ventaglio tendineo che corrisponde all'angolo anteriore del primo lembo; il primo angolare adunque è caratteristico, perchè non sorge dal lato settale della zona muscolare, ma invece dal lato parietale della medesima, presso all'attacco della trabecola regolatrice del King, e distante dieci centimetri dall'origine del secondo tendine angolare del primo ventaglio. Questa inserzione in un punto differente da quello degli altri angolari è associata con una maggiore grossezza, maggiore lunghezza e maggior numero di ramificazioni terminali sul lembo.

Mentre gli altri tendini angolari tirano verticalmente in basso gli angoli dei lembi, il primo di essi tende l'angolo anteriore del primo lembo in basso, ma obliquamente dall'interno all'esterno, il che vuol dire che stacca ed allontana il lembo dal setto ch'è molto vicino alla faccia scabra del lembo stesso. Questa funzione del distacco del lembo dalla parete ventricolare nel primo tendine si mostra tanto spiccatamente da far supporre che anche gli altri tendini angolari, che si rassomigliano ad esso per molte proprietà comuni, debbano prendere parte alla stessa funzione, quantunque in un grado molto minore.

I tendini angolari dei tre ventagli tendinei destri sono sei, cioè due per ogni ventaglio. Esaminando isolatamente i sei tendini angolari: il 1° dà 17 rami terminali, di cui 2 sono veramente angolari, 2 laminari medî e 13 marginali; il 2° dà 12 rami, di cui 2 angolari, 4 laminari e 6 marginali; il 3° dà 7 rami, di cui 2 angolari, 1 laminare e 4 marginali; il 4° dà 11 rami terminali, di cui 2 angolari, 3 laminari e 6 marginali; il 5° dà 7 rami terminali, di cui 2 angolari, 2 laminari e 3 marginali; il 6° dà 14 rami terminali, di cui 2 angolari, 3 laminari e 9 marginali. In totale tutte le ramificazioni terminali dei sei tendini angolari dei ventagli tendinei destri giungono al numero di 68. Considerando le terminazioni dei suddetti tendini angolari dal punto di vista del loro numero, si ha che questo è al massimo grado nel 1° e 6°, decresce nel 2° e 4°, ed è ridotto al minimo nel 3° e 5°.

Tendini laminari massimi. — In ciascun ventaglio, dopo i due angolari vengono, o immediatamente, o dopo qualche tendine accessorio interposto, due tendini che hanno la massima grossezza di 0,003 di diametro e la maggior lunghezza di 0,24. Questi tendini sorgono inferiormente ciascuno dall'apice dello stesso lato del pilastro bifido, ascendendo divergono e, dopo di avere sorpassato i margini dentati dei lembi, si fissano sulla faccia scabra dei medesimi, quasi ad eguale distanza dal margine dentato e dal mezzo di ciascun lembo, espandendovisi largamente in forma di lamina triangolare; per cui li ho chiamati *tendini laminari massimi*, per distinguerli da altre terminazioni laminari di media e piccola grandezza, le quali si espandono sul lembo, ma però non si estendono dal pilastro alla zona fibrosa, nè sono in continuazione più o meno diretta con una trabecola muscolare. Ciascun tendine laminare massimo, convergente col suo omologo verso la linea mediana, arriva al margine inferiore della zona fibrosa, per ripiegarsi e continuarsi con una lacinia trabecolare della parete ventricolare. La quale lacinia, indicata col nome di *trabecola arciforme,* alla sua volta incontrando l'espansione laminare del tendine in discorso, forma come un arco muscolo-tendineo, interposto nell'angolo ventricolo-valvolare, al disotto del detto margine

inferiore della zona fibrosa, e discende per parecchi centimetri sulla base del lembo valvolare. Oltre a queste due e grandi lacinie trabecolari ve ne sono molte altre sottili e corte, che sono da considerare come corrispondenti alle *trabecole basali* descritte da Henle nell' uomo, e che vanno dalla parete ventricolare alla base aderente del lembo valvolare.

I tendini laminari massimi possono sorgere dal pilastro e finire sul lembo isolati, ovvero, poco dopo la loro origine, dare dei rami secondarî, e poco prima di arrivare al margine dentato, dare degli altri rametti, ovvero dare solo i primi, o solo i secondi. Questi rametti secondarî vanno esattamente al margine, ovvero si espandono a minore o maggiore distanza dello stesso sulla faccia scabra del lembo. I laminari massimi non si associano mai coi tendini angolari con cui sono in antagonismo, perchè questi legano gli angoli estremi valvolari in alto alla zona muscolare inferiormente; e quelli legano gli estremi papillari dei pilastri in basso alla zona fibrosa superiormente. I laminari massimi, partendo divergenti, formano un angolo col vertice inferiore sopra uno stesso pilastro ; e quelli provenienti da due pilastri, arrivando convergenti sullo stesso lembo, formano un angolo col vertice superiore; dal che risulta, che detti tendini laminari massimi, tutto in giro, formano degli angoli superiori ed inferiori, alterni tra le due zone, fibrosa e muscolare, come la corda di tensione tra i due cerchi di un tamburo.

I tendini laminari massimi dei tre ventagli tendinei sono anch'essi 6, cioè 2 per ciascun ventaglio; tre di essi il 1° il 2° ed il 6° terminano isolati, il 3° ed il 4° sono associati ciascuno a 3 rami terminali marginali, ed il 5° con cinque di questi rami marginali. In tal modo si ha, che i sei tendini laminari massimi danno 17 rami terminali, di cui 6 sono le terminazioni proprie dei laminari massimi, ed 11 sono terminazioni marginali, e queste si trovano associate solamente a tre di essi tendini e propriamente al 3° 4° e 5°.

Tendini marginali. — In ciascun ventaglio, oltre le due specie di tendini, cioè i due angolari ed i due laminari massimi, ve ne sono altri accessorî, che costituiscono una terza specie, e questi saranno detti *tendini marginali*. Questi tendini sono in genere i più corti, e i più sottili, sorgono dall'apice dei pilastri, e vanno a terminare, o con un solo ramo, o con parecchi, al margine dentato degli archi intercuspidali; e di frequente ad essi si associano alcune terminazioni, le quali si espandono a lamina, sulla faccia scabra dei lembi, a poca distanza dal margine ed anche ad una distanza maggiore, e sono queste le terminazioni laminari minime e medie, che si possono associare anche con i tendini laminari massimi. I tendini marginali sono più numerosi delle altre due specie e sono anche variabili nei diversi ventagli; così ve ne sono due nel terzo, quattro nel secondo, ed otto nel primo. Il maggior numero di essi si trova fra i due laminari massimi, e ve ne sono anche interposti tra l'angolare ed il laminare massimo, ed in ciascun lembo quelli di un lato sono in antagonismo con quelli dell'altro lato e distendono in tale maniera molto opportunamente il lembo nel senso orizzontale.

I tendini marginali del primo ventaglio tendineo, che originano dal primo pilastro, sono 8; e le loro terminazioni sul margine del primo arco dentato sono 22; il che significa che ciascuno degli otto tendini ha in media tre rami terminali. I tendini

marginali del secondo ventaglio nella loro origine sul secondo pilastro sono 4, e le loro terminazioni sul margine del secondo arco dentato sono 18; ripartite nel modo seguente: il 1° e 2° tendine danno 5 rami ciascuno; il 3° ne dà solo 1; ed il 4° ne dà 7. I tendini marginali del terzo ventaglio nella loro origine sul terzo pilastro sono 2 soli, e le loro terminazioni, nel margine del terzo arco dentato, sono solamente 4. In complesso dai 14 tendini marginali dei tre ventagli tendinei dell'apparato valvolare destro, si hanno 44 rami terminali sui margini dei tre archi dentati. Da tutto ciò si rileva che i tendini marginali alla loro origine sui pilastri, al numero di 14 rappresentano più del doppio rispetto a' 6 tendini angolari, i quali alla loro volta con le loro 68 ramificazioni superano di gran lunga i 44 rami dei tendini marginali.

Posizione dei tendini nei ventagli. — I ventagli tendinei hanno una forma, che si avvicina molto alla regolare, e tutti ad un dipresso si assomigliano nella disposizione dei diversi tendini, di cui si compongono. Ciascun ventaglio, avendo un estremo inferiore ristretto sul pilastro, ed un estremo superiore slargato sull'arco dentato intercuspidale, ha un tendine mediano, che sorge sul centro del pilastro, e va a terminarsi con uno o più rami, sul centro dell'arco dentato; in tal modo, per questo raggio tendineo mediano, il ventaglio stesso è diviso in due parti più o meno eguali e simmetriche; l'una diretta verso la metà destra dell'arco, e l'altra verso la metà sinistra dello stesso. Ciascuna metà si compone di parti omologhe, cioè di un tendine angolare, di un tendine laminare massimo e di parecchi marginali; questi marginali, che sono sempre i più numerosi degli altri, s'interpongono, e separano il tendine angolare dal laminare massimo di un lato, come anche s'interpongono tra i laminari massimi ed il tendine mediano; in guisa che i diversi tendini sono regolarmente spaziati tra di loro da permettere a ciascuno un ufficio diverso ed indipendente dall'altro. In tal modo si ha, che una metà di un ventaglio è antagonista dell'altra, nel senso che mentre una di esse tende il margine dentato di un semiarco, l'altra quello dell'altro semiarco; come anche, considerati in rapporto ai due margini dentati di uno stesso lembo, una metà di un ventaglio di un margine dentato è in antagonismo con l'altra metà dell'altro margine dentato. Per chiarire meglio quanto si è detto è bene prendere ad esempio il secondo ventaglio dell'apparato valvolare destro, che è il più regolare e simmetrico. Considerando i tendini alla loro origine inferiore, essi sono al numero di 8, cioè 2 angolari, 2 laminari massimi e 4 marginali; considerati alla loro terminazione nell'arco dentato danno 44 rami terminali; cioè 18 provenienti dagli angolari, 18 dai marginali, ed 8 dai laminari massimi. I due tendini angolari, con le loro ramificazioni, formano i raggi esterni del ventaglio; poi segue a ciascuno il laminare massimo corrispondente; e tra i due laminari massimi sono interposti sulla parte centrale dell'arco i quattro tendini marginali di cui uno è il mediano. Quando i marginali sono numerosi, allora uno o più s'interpongono anche tra l'angolare ed il laminare massimo dello stesso lato; ma sempre un numero maggiore di marginali si trova nella parte centrale dell'arco tra i due laminari massimi. Questa posizione dei diversi tendini conduce alla conclusione; che i tendini, i quali particolarmente appartengono a ciascun lembo, sono due angolari e due laminari massimi, tra cui s'interpone qualche tendine marginale; e che il maggior numero dei tendini marginali sorgono nella parte centrale dei pilastri, e terminano nella parte centrale dell'arco dentato intercuspidale.

Apparato valvolare atrio-ventricolare sinistro. — Nel descrivere le parti costituenti di questo apparato si terrà lo stesso ordinamento adottato per l'apparato valvolare destro, e sarà possibile trattarlo più brevemente, dopo le descrizioni precedentemente fatte delle parti omologhe.

Zona fibrosa. — La zona fibrosa (fig. IV) è stata in gran parte asportata nel preparato, e di essa rimane il solo margine inferiore di attacco ai lembi valvolari, il quale permette di potere misurare la circonferenza dell'orifizio superiore valvolare ch'è di m. 1,10; e tale misura è di dieci centimetri minore del corrispondente orifizio di destra di cui precedentemente a pag. 189 si è data la sua misura. La sua figura ellittica differisce dall'altra circolare, il suo diametro maggiore, cioè l'antero-posteriore, è di 0,40 ed eguaglia il diametro antero-posteriore destro; il diametro minore, cioè il trasverso dell'ellissi valvolare, è di 0,32.

Lembi valvolari. — Prima di cominciare a parlare dei lembi, e delle altre parti costituenti l'apparato valvolare, è necessario, per precisare qualche punto importante, di dare alcuni schiarimenti.

Il Sée, descrivendo la valvola atrio-ventricolare sinistra del cuore umano, ritiene la denominazione di valvola mitrale, e dice ch'essa è composta di una valvola destra e di una sinistra, tra le quali si vedono due piccole linguette triangolari, quasi rudimentali, di cui si è fatto abitualmente astrazione; poi aggiunge che queste due linguette hanno anch'esse i tendini e si comportano nel loro ufficio come le valvole principali. Anche nell'apparato atrio-ventricolare destro indica due altre linguette dello stesso genere. L'avere il Sée solamente indicate queste linguette, trascurate dagli altri, senza descriverle particolarmente, mostra di non avere loro dato quella importanza che meritavano; o se si volesse ritenere ch'esse due linguette fossero due rudimenti di lembi, in tale caso la valvola mitrale non sarebbe più bicuspide, ma quadricuspide, e la destra arriverebbe a cinque cuspidi; non ammettendo ciò egli stesso ritiene la solita denominazione di mitrale e tricuspidale, e non entra nel merito del fatto. Si può dire che il Sée era quasi per cogliere nel segno ; ma l'avere considerato i due lembi accessorî (tanto a sinistra che a destra), come simili fra loro e con i grandi lembi, l'ha tenuto lontano dal giusto punto della quistione, come lo erano stati tutti quelli che ammettevano due lembi solamente, trascurando del tutto le linguette accessorie. In altri termini questi non sono arrivati al vero per difetto, il Sée l'ha sorpassato per eccesso; e tutti insieme han lasciato le cose come stavano, ritenendo col nome di mitrale o bicuspide la valvola atrio-ventricolare sinistra. Per avventura prima di leggere quanto dice il Sée, io aveva già fatta la mia osservazione nel cuore del capidoglio, e così studiando il preparato direttamente, e senza prevenzione di sorta, aveva notato in più due linguette membranose sulla valvola atrio-ventricolare sinistra (e nulla di simile nella valvola atrio-ventricolare destra), di cui l'una più grande e l'altra più piccola, e fornite di tendini come i grandi lembi. Ero quasi per considerare ciò come un anormale e straordinario sviluppo di qualche linguetta del margine dentato; e solo quando ho fatto uno studio accurato dei tendini e la classificazione dei medesimi, in modo da stabilire quali erano i tendini principali, indispensabili per ciascun lembo, e quali gli accessorî; e dopo di avere stabilito, che i tendini principali occupano regolarmente un posto costante,

e che perciò essi possono servire di confine tra un lembo e l'altro; solo allora sono potuto entrare nel valore e nella interpretazione di quelle linguette accessorie. Cioè che l'una era una linguetta semplice, espansione esagerata di una delle linguette del margine dentato, del tutto accessoria e di nessuna importanza morfologica; e l'altra più grande era un vero lembo rudimentale con tutti i caratteri degli altri lembi grandi; e che per sito e rapporti con i lembi, i tendini ed i pilastri, rappresentava a sinistra il terzo lembo della valvola atrio-ventricolare destra; ed in tal modo l'apparato valvolare atrio-ventricolare sinistro si mostrava uniforme, nel tipo ternario di costruzione, a tutti gli altri apparati cardiaco-vascolari.

Questa fu la mia idea; ma nei nostri studî le idee han poco valore se non sono ben definite e non trovano esatto riscontro nei fatti. Per tale ragione è d'uopo entrare in molti particolari, dall'assieme dei quali emergerà evidentemente la verità della mia asserzione, e più che dalle mie parole la convinzione sarà prodotta dalla figura V, che ritrae esattamente il *lembo rudimentale* e la linguetta accessoria nei suoi minuti particolari. Era necessaria molta circospezione nel trattare l'argomento; perchè ho trovato veramente applicabile qui, quanto diceva Buffon, ch'era più difficile nella scienza rimuovere un vecchio errore, che introdurre una nuova verità. Così è avvenuto nel caso presente; dal Vesalio che denominò la valvola atrio-ventricolare sinistra *mitrale*, perchè composta di due lembi, anzichè di tre come la destra, d'allora in poi tutti gli anatomici, riposando sulla sua autorità, hanno ritenuto ciò come un fatto indiscutibile e tanto ripetuto per secoli, che persino molti, che hanno fatto studî accuratissimi sul cuore, vi sono passati sopra; ed il Sée stesso, che vi nota due linguette, trascurate abitualmente da altri, non va più oltre e continua nell'uso di chiamarla valvola mitrale, perchè non dà importanza, nel senso generale morfologico, a quelle due linguette, che indica eguali fra loro ed alle altre due linguette di destra. Altri, che hanno avuto occasione di studiare all'ingrosso cuori di grandi cetacei, non hanno richiamato l'attenzione in proposito; ed io stesso avendo innanzi un buon preparato, che mostra per la sua grandezza chiaramente il fatto, era talmente impressionato da quella denominazione autorevolmente consacrata di *mitrale*, che mi sarebbe sembrata un'eresia scientifica l'ammettere, che nella sinistra vi fosse un terzo lembo, come nella destra, e che il nome dato, quantunque basato sopra una rassomiglianza non perfetta, non fosse nell'accettazione del nuovo fatto un ostacolo insormontabile.

Premessi questi schiarimenti per stabilire il punto di vista preciso nella presente quistione, passo alla descrizione delle parti, e son certo che lo studio dei lembi, degli archi dentati, dei ventagli tendinei e dei pilastri, nel complesso dei fatti dichiarati, arrecherà quella convinzione, che ho acquistata con maturo esame io stesso, della esistenza di un *terzo lembo rudimentale posteriore* nell'*apparato atrio-ventricolare sinistro*; e ciò in omaggio alle leggi di morfologia, di simmetria, di omologia ed analogia, attuate con mirabile accordo in tutto il meccanismo della costruzione cardiaca. Posto ciò come un fatto, passo alla dimostrazione dei tre lembi, e delle altre parti dell'apparato valvolare per provarlo.

Il primo lembo, o il settale, è il più regolare di tutti gli altri lembi valvolari cardiaci, è il più spesso, sia perchè vi si distribuiscono i tendini i più robusti, sia

per la sua tessitura; le sue dimensioni superano quelle dei lembi valvolari destri, e sono perfettamente eguali a quelle del secondo lembo, o parietale, che gli sta di contro. L'altezza verticale, misurata dal margine aderente al margine libero, in entrambi è di 0,16; e sono anche uguali i loro margini liberi inferiori misurando 0,11. Il lembo settale è quello che si presenta in avanti nella figura IV, e l'altro indietro, in gran parte ricoperto, meno nel margine libero inferiore, è il lembo parietale. Il terzo lembo rudimentale, o il posteriore, non appare nella citata figura, perchè ricoperto dal primo lembo; ma si vede molto spiccato nella sua forma e nei suoi rapporti nella figura V, che rappresenta il terzo lembo, limitato dal secondo arco e dal secondo lembo a destra, e dal terzo arco dentato e dal primo lembo a sinistra; le parti sono state sviluppate in un piano per poterle bene rappresentare nella figura. In essa si vede anche rappresentata a destra ed in alto la linguetta marginale accessoria, che sarà descritta nel parlare del secondo arco dentato del cui margine fa parte. L'altezza del terzo lembo è di 0,10 e la larghezza del margine libero inferiore è di 0,02. Per la grande sproporzione fra le due dimensioni, il terzo lembo ha una figura che differisce dagli altri lembi perchè è molto ristretto, ma per la sua altezza non differisce che di poco, meno di un terzo, in confronto dei due altri lembi dello stesso apparato; mentre quasi eguaglia l'altezza del primo lembo di destra (0,11). In esso si nota un margine aderente alla zona fibrosa; due margini dentati che concorrono per metà alla formazione del secondo e terzo arco, ed un margine inferiore libero, il quale, quantunque piccolo, è molto bene distinto, ed i suoi due angoli, che risultano dal margine liscio inferiore e dai suoi due margini dentati, danno attacco a'due tendini angolari corrispondenti, i quali tendini, per la loro origine distinta e separata da tutti gli altri nel cuore del capidoglio, sono un vero e preciso limite di separazione dei diversi lembi, come si è visto già nel parlare dei ventagli tendinei destri, e come vedremo anche nel parlare di quelli di sinistra.

Considerando la posizione reciproca dei tre lembi valvolari sinistri, vi è una notevole differenza rispetto a'tre lembi valvolari destri; e ciò dipende dalla forma dell'ostio, circolare nella valvola destra ed ellittica nella sinistra. Nella destra i tre lembi valvolari formano i tre lati di un triangolo con la base posteriore, e l'apice anteriore; per cui il lembo impari è il posteriore ed i due pari, che formano i due lati omologhi, sono il lembo settale ed il lembo parietale. Nella valvola sinistra invece per la forma ellittica, i due lati cioè il lembo settale ed il parietale hanno il massimo sviluppo; mentre il lato posteriore è stato ridotto alla minima proporzione, ed il terzo lembo che vi corrisponde ha dimensioni affatto rudimentali; però non fino al punto da distruggersi il tipo ternario, sibbene a modificarlo ed adattarlo alle mutate condizioni di forma; perciò il lembo rudimentale sinistro, essendo l'omologo del terzo lembo posteriore destro, sarà anche esso il terzo lembo posteriore sinistro. Per la forma ellittica della valvola sinistra resta anche modificato il rapporto reciproco; giacchè il lembo settale forma, esso solo, la semiellissi destra o interna; e la semiellissi sinistra o esterna è rappresentata in massima parte dal lembo parietale, a cui si associa anche il lembo rudimentale, ed il secondo arco dentato interposto; ed i due poli dell'ellissi sono fatti esclusivamente dal primo e terzo arco dentato. Per cui se, in omaggio al Vesalio, si vuol ritenere la denominazione

di *mitrale*, per l'apparenza generale che presenta tutto l'apparato, ciò non deve indurre nel grave errore, che altera tutta la simmetria valvolare, che si tratti cioè di valvola, che abbia soltanto due lembi, e non già tre, come l'altra cardiaca e le arteriose, pel solo fatto che l'uno di essi sia rudimentalmente rappresentato.

Considerando le facce dei lembi valvolari sinistri, vi è poco da aggiungere a quello che si è detto a proposito di quelli di destra, da cui non differiscono. La conservazione nel preparato di quella parte della parete ventricolare, ch' è in rapporto con la zona fibrosa e col secondo e terzo lembo, permette di osservare molto chiaramente quello che è stato accennato precedentemente; cioè che i laminari massimi del secondo lembo, dopo di averlo percorso fino al suo margine aderente con la zona fibrosa, si continuano con le due trabecole arciformi corrispondenti, molto sporgenti, che formano come un arco di passaggio dalla parete valvolare alla parete ventricolare, nella cui tessitura muscolare si fondono. Si vedrà in seguito l' importanza che merita questo congegno, che può, come una molla, spingere in alto un lembo valvolare, nella contrazione di quelle trabecole unitamente alla parete ventricolare. Vi sono anche qui sull'angolo ventricolo-valvolare, in corrispondenza del margine inferiore della zona fibrosa, parecchie lacinie muscolari che partono dalla parete ventricolare e s' innestano al margine aderente valvolare, e che, come si è detto, furono descritte da Henle nell' uomo col nome di *trabecole basali*. Il terzo lembo presenta anch' esso la faccia ventricolare scabra per l'incrociamento dei tendini che arrivano dai due suoi margini dentati. Anche i due laminari massimi di questo lembo vanno a finire ad arco sulla sua parete ventricolare.

Archi dentati intercuspidali. — Per la forma ellittica della valvola sinistra, e per la grande altezza dei lembi valvolari, gli archi dentati sinistri sono molto diversi da quelli di destra. Essi hanno una corda, misurata dai due angoli dei lembi limitrofi, che è quasi la metà, rispetto agli archi omologhi di destra; così la corda del I e del III misura 0,13 ; e quella del II 0,11. Invece guadagnano molto in altezza, specialmente il primo arco, giacchè la misura dal centro dell'arco all'uno o all'altro angolo dei lembi nel I dà 0,17, nel II 0,06, nel III 0,09. Le dentature degli archi sono pressochè uguali ed equidistanti tra loro, ad eccezione del second' arco, in cui si trova una linguetta membranosa, molto più sporgente delle altre, che, invece di finire appuntata, finisce tronca, e si trova nel centro dell'arco, e riceve alcuni rametti tendinei terminali, ma non riceve nè tendini angolari, nè tendini laminari, massimi, che sono caratteristici per dare il significato di un vero lembo; come si osserva nei grandi lembi, ed anche nel lembo rudimentale. Questa linguetta marginale sottilissima, che si osserva nella figura V, per la sua posizione e per la sua forma, può essere di vantaggio nella chiusura valvolare per coprire in parte lo spazio interrotto del secondo arco dentato, interponendosi per formare quasi una continuazione tra il secondo ed il terzo lembo; d'altra parte la presenza del secondo arco, insieme al primo ed al terzo, è molto opportuna per amplificare l'apertura inferiore valvolare per la facile e rapida discesa del sangue auricolare nel ventricolo.

Zona muscolare. — Per la forma ellittica dell'apparato valvolare, per la sua posizione all'esterno del cono arterioso, interposto tra il lembo settale ed il setto, e per la distanza dall'apice ventricolare della inserzione dei pilastri, i quali si fissano alla metà

dell'altezza della parete ventricolare, è semplificata di molto la zona muscolare; e ciò non pertanto il suo ufficio, della chiusura valvolare inferiore, è completamente adempiuto. La zona muscolare adunque non è, come a destra, triangolare, ma semilunare; e la medesima occupa soltanto la semiellissi esterna, o parietale; si estende dai pilastri posteriori all'anteriore, e presenta un margine libero concavo, che guarda il setto, ed un margine convesso adattato alla concavità della parete ventricolare, con la quale solidamente si unisce per parecchie trabecole, che si dirigono in alto ed in basso. Per la sua posizione e direzione la zona semilunare limita una specie di nicchia esternamente, superiormente e posteriormente nel ventricolo sinistro, ed in essa si adatta l'apparato valvolare. Dalla direzione della zona muscolare, e dai suoi rapporti coi pilastri e con la parete, si rileva che nella contrazione deve avvicinare i pilastri alla parete e tra di loro, e tirarli anche in alto ed indietro. In tal modo, quanto più l'apparato valvolare si allontana dal setto e dall'apice ventricolare, tanto più resta sgombro il cono arterioso; ed il sangue può facilmente seguire il suo corso a destra ed in avanti per infilare l'aorta, senza avere bisogno di battere sull'apparato atrio-ventricolare, rimasto a sinistra, in alto ed indietro.

Pilastri muscolari. — Agli estremi, anteriore e posteriore della zona muscolare semilunare, si fissano i pilastri, in corrispondenza dei rispettivi centri degli archi dentati intercuspidali. I pilastri del ventricolo sinistro nel capidoglio sono tre e ben isolati, mentre nell'uomo sono due; ma però se si tiene giusto conto della scanalatura profonda, che si trova nella faccia anteriore del pilastro posteriore, si può ammettere che nell'uomo, per angustia di spazio, vi sia stata fusione di due pilastri in uno; in tal modo il tipo ternario sarebbe modificato, ma non distrutto; e nel capidoglio, pel grande spazio, esso è spiccatamente manifesto. I due pilastri posteriori sono simili tra loro, e l'anteriore è differente, come si è visto anche nel ventricolo destro. Il pilastro anteriore, anche qui, ha forma di lamina carnosa, con le sue fibre dirette orizzontalmente dall'interno all'esterno, e dall'alto in basso, per cui riesce alquanto obliquo. L'estremità più bassa ed esterna si collega col sistema trabecolare della zona muscolare semilunare, e l'apice si continua in alto col secondo tendine laminare massimo; l'altra estremità interna e più alta, si appunta in un apice che si continua direttamente col primo tendine laminare massimo, che è il più robusto di tutti i tendini del cuore. La sua faccia anteriore aderisce alla parete ventricolare, ed anche il suo margine inferiore, che ne forma la base, si fonde con la estremità anteriore della zona semilunare. La sua faccia posteriore, che guarda la cavità valvolare, è liscia un po' arcuata, ed in basso, presso la zona, dà attacco a' due tendini angolari, e più in alto ad un tendine marginale. Il margine superiore è alquanto obliquo, come si è detto, e da esso si spiccano i tendini marginali, i quali, come nel pilastro anteriore destro, essendo distinti fra loro, non sono divergenti ma paralleli. Le sue misure sono: lunghezza 0,09, altezza 0,05, spessezza 0,01.

A differenza del pilastro anteriore i due pilastri posteriori sono composti di fibre muscolari dirette verticalmente, come i due posteriori del ventricolo destro. Essi sono impiantati sopra una robusta massa trabecolare, che è in continuazione con la zona semilunare. Essendo sulla stessa trabecola, essi formano come un solo sistema, ma però sono abbastanza distanti tra di loro; e l'uno dà origine ad un

ventaglio tendineo in corrispondenza del secondo arco dentato, e l'altro del terzo. I due pilastri posteriori sono molto simili per grandezza e per forma, l'uno di essi è interno, e posto alquanto indietro, l'altro è esterno, e posto alquanto innanzi. Ciascuno di essi è bifido, essendo diviso da un solco trasverso in due lobi, l'uno anteriore e l'altro posteriore; e nella osservazione del preparato vien facile alla mente l'idea, che nella contrazione della trabecola, di comune sostegno, i due pilastri si avvicinino tra loro, e si addentellino reciprocamente in modo, che il lobo posteriore del pilastro interno s' alloghi nel solco del pilastro esterno e, d'altra parte, il lobo anteriore del pilastro esterno si adatti nel solco del pilastro interno. Il pilastro esterno, o il secondo, misura alla base 0,04, in altezza 0,02, in spessezza 0,015. Il pilastro interno, o il terzo, ha la base di 0,03, l'altezza di 0,02, la spessezza di 0,015. La distanza dal primo al secondo è 0,28, dal primo al terzo 0,36, dal secondo al terzo 0,04.

Considerata la robustezza e direzione del primo pilastro esso deve tirare l'apparato valvolare verso la parete esterna, e deve servire come punto fisso alla zona semilunare, che, nella sua contrazione, avvicinerebbe il pilastro anteriore ai posteriori, e tutti assieme alla parete ventricolare esterna.

Ventagli tendinei. — Avendo trattato estesamente dei ventagli tendinei di destra, qui basterà solo accennare le differenze esistenti tra loro. I destri, per la forma circolare dell'apertura valvolare, hanno i loro tendini disposti quasi in un piano, ovvero con leggiera curvatura in dentro. I sinistri invece hanno tale disposizione solo nel secondo ventaglio; e gli altri due, che si trovano ai poli dell'ellissi, cioè il primo ed il terzo, nell'assieme dei loro tendini terminati ai rispettivi archi dentati, circoscrivono poco più di un semicono, quasi due terzi di cono, a concavità interna. La forma conica dei due ventagli, posti a'due poli dell' ellissi, dà maggiore solidità, e maggiore semplicità al meccanismo valvolare sinistro; giacchè essi si possono facilmente spiegare nella diastole, in modo da permettere il massimo allontanamento dei lembi; al punto che, aumentato il diametro minore, l'apertura da ellittica si avvicinerebbe alla circolare, e ciò con vantaggio per la rapida discesa del sangue; del pari si possono restringere e raccogliere, durante la sistole, in quella specie di nicchia della parete ventricolare; così tutto l' apparato valvolare, rimanendo in alto, all' esterno ed indietro, resta separato dal cono arterioso in basso, all'interno ed in avanti; e la corrente sanguigna non vi può battere, essendo già incalzata soltanto verso il cono arterioso nella massima sistole.

Tendini angolari. — I tendini angolari dei tre ventagli sinistri sono 6: cioè 2 nel primo arco dentato intercuspidale, 2 nel secondo arco; però trovandosi questo secondo arco tra il margine dentato del secondo lembo ed il piccolo margine del lembo rudimentale, cioè il terzo, così esso è il più piccolo di tutti gli archi dentati di sinistra e di destra, e per tale ragione i due tendini angolari si spiccano in basso da un tronco comune, e gli ultimi 2 sono nel terzo arco dentato. Una speciale considerazione merita il 5° tendine angolare il quale è esilissimo; ma per la sua origine distinta in basso, e per il suo attacco esclusivamente all'angolo del piccolo lembo, presenta quei caratteri proprî di tutti gli altri angolari, e che sono così importanti per segnare il limite di confine tra un angolo di un lembo, all'estremità di un arco dentato, e quello dell'altra estremità di uno stesso arco. Esaminando il numero delle ultime terminazioni dei 6 tendini

angolari della valvola sinistra si ha: che il 1° ramo ne dà 5, il 2° ne dà 9, ed in tal modo tutte le ramificazioni del primo arco dentato sono 14. Il 3° ramo angolare ne dà 10, ed il 4° ne dà 7, per cui il secondo arco dentato, ancorchè ristretto tanto, da avere i due tendini angolari riuniti inferiormente in un tronco comune, pure, esaminato nelle sue ultime ramificazioni, in complesso ne dà 17. Il 5° ramo angolare ne dà 2, ed il 6° ne dà 11, in tal modo il terzo arco ha 13 rami terminali.

Riassumendo quanto si è precedentemente detto intorno alle ramificazioni degli angolari si ha: che il primo arco dentato della valvola atrio-ventricolare sinistra, che è il più regolare, dà 14 rami terminali, il secondo 17, il terzo 13; e così si ha un totale di tutte queste ramificazioni che ascende a 44; il che vuol dire che si avrebbe una media di 15 rami per ogni arco.

Tendini laminari massimi. — Dei sei tendini laminari massimi i due del lembo settale, a cui si associano alcuni laminari medî, sono al maggiore grado di sviluppo, in grossezza e lunghezza; giacchè il 1° è lungo 0,17 e grosso 0,005, ed il 6° è lungo 0,21 con eguale grossezza; il 2° 0,20, ed il 3° 0,16 sono più sottili; il 4° ed il 5°, che sono in corrispondenza del lembo valvolare rudimentale, sono uguali in lunghezza, 0,14, ed in grossezza, 0,002. Il 1° e 6° laminari massimi sembrano la diretta continuazione degli estremi interni, e superiori del primo e terzo pilastro; la loro robustezza è di grande rinforzo al lembo settale; il quale, pel suo allontanamento dal setto, ne sarebbe rimasto alquanto indebolito senza quel compenso proporzionato alla sua importanza funzionale; e quei robusti tendini servono a tirare il lembo stesso, in fuori ed in alto, per lasciare il più ampio passaggio al sangue nel cono arterioso. I laminari massimi dei tre ventagli tendinei della valvola sinistra sono molto più semplici nelle loro terminazioni, rispetto a' precedenti; solo i primi due sono più complessi, in quanto che il 1° tendine laminare massimo dà 6 rami marginali, ed il 2°, esso solo, ne dà 17. Il 3° ramo ha soli 3 rami marginali; il 4° ed il 5°, che sono in corrispondenza del piccolo lembo rudimentale, sono perfettamente isolati; ed il 6° non dà che 2 soli laminari medî. In totale, dai sei laminari massimi sinistri si hanno 28 rami terminali, e questi sono dati in gran parte dai due primi, mentre il 3° e 6° ramo danno poche ramificazioni, ed il 4° e 5° non ne danno affatto.

Tendini marginali. — I tendini marginali sono più variabili per numero e grandezza e, rispetto alle altre due specie di tendini, hanno una importanza molto secondaria. Quelli del primo arco sono al numero di 6; ciascuno ha un'origine distinta inferiormente sul pilastro, e le ramificazioni sul lembo sono in media di 5; e tra queste ve ne sono di laminari medie, miste alle marginali; il totale delle ramificazioni del primo arco è di 34. Il secondo arco manca di tendini marginali con origine distinta nei pilastri, e le sue terminazioni marginali provengono dagli angolari e dal terzo laminare massimo. Nel terzo arco vi sono due soli tendini marginali con origine distinta nei pilastri, e le loro terminazioni ascendono anche a 34 rami; per cui si ha un totale di 68 rami terminali dai 9 tendini marginali della valvola atrio-ventricolare sinistra. Infine, per ciò che riguarda la posizione reciproca delle tre specie di tendini, esistenti in ciascun ventaglio tendineo, è applicabile in questo apparato atrio-ventricolare tutto ciò, che è stato detto a tale proposito, intorno all'apparato atrio-ventricolare destro.

COMPARAZIONE TRA I DUE APPARATI VALVOLARI E CONCLUSIONI. — Da quanto si è detto innanzi si ha: che la valvola destra per ampiezza supera la sinistra; quella circolare, questa ellittica; la prima ha i tre lembi spiccatamente distinti ed uguali; la seconda, per la forma modificata e la capacità ristretta, presenta i lembi apparentemente duplici, ma in realtà triplici, di cui uno rudimentale per angustia di spazio, cioè il lembo impari posteriore, esterno, che è l'omologo del lembo posteriore della valvola destra. I tre pilastri, in entrambe le valvole, si rassomigliano per numero, forma e direzione di fibre, orizzontali nei due anteriori, verticali nei quattro posteriori; solo vi è differenza per la distanza maggiore dei due pilastri posteriori destri, rispetto a' sinistri, i quali sono molto ravvicinati, perchè separati dal lembo rudimentale assai ristretto. Lo stesso si dica per gli archi dentati, di cui il secondo della valvola sinistra è molto piccolo, rispetto a tutti gli altri, che presso a poco si eguagliano; la differenza si nota nell'ampiezza maggiore della corda tra gli archi di destra, rispetto a quelli di sinistra, che in ricambio sono più alti degli altri. Una maggiore differenza si ha nei ventagli tendinei, i quali sono corti, larghi e piani a destra; e sono lunghi, stretti ed incurvati a semicono a sinistra. Tutti i sei ventagli hanno le tre distinte specie di tendini, cioè *angolari, laminari massimi,* e *marginali*; le prime due specie sono costanti per numero, dimensioni, posizione, modo di origine, variabili solo nelle loro terminazioni; i marginali invece sono variabilissimi sotto tutti questi diversi rapporti. Alla loro origine gli angolari sono 12, sei per ciascuno apparato valvolare, due per ciascun ventaglio; e i due degli angoli del lembo rudimentale fanno eccezione; il 5° per la sua estrema sottigliezza, ed il 4° perchè in basso ha un'origine comune col 3°; ed il 1° di destra per la sua origine eccezionale, giacchè, come si disse innanzi, non sorge dal lato interno della zona muscolare triangolare, ma dal lato esterno di questa. I laminari massimi sono 12, sei per ciascuna valvola, e due per ciascun ventaglio, e sono i più somiglianti fra loro. I tendini marginali, al numero di 24, da per sè soli eguagliano la somma delle altre due specie di tendini; ma non sono ripartiti ugualmente, giacchè a destra sono 14, ed a sinistra 10; e sono molto variabili non solo per numero in ciascun ventaglio tendineo, ma anche per lunghezza, grossezza e ramificazioni. Il numero maggiore è in rapporto con la maggiore ampiezza della valvola destra rispetto alla sinistra, e con la maggiore estensione dei margini dentati del lembo posteriore destro rispetto al lembo rudimentale posteriore sinistro; i tendini marginali, divergenti nei pilastri posteriori, che sono bifidi ed appuntati in cima, sono paralleli sopra i lunghi margini dei pilastri anteriori, e si raccolgono a ventaglio, solo nel loro raccorciamento per contrazione. Da questa loro grande variabilità si può dedurne la secondaria importanza riguardo a' primi, e come nella valvola sinistra, più stretta, sia di molto diminuito il loro numero; giovando ciò alla semplificazione ed alla maggiore solidità di questo apparato, riducendone le parti accessorie al minor numero possibile, per potere resistere alla potente contrazione della enorme parete ventricolare sinistra, di circa 20 centimetri di spessezza.

Oltre il numero dei tendini alla loro origine, che presi insieme sommano a 48, bisogna considerare il numero di tutti i rami terminali che si ramificano sugli angoli, sui margini dentati e sulla superficie dei lembi. I rami terminali dei tendini angolari a destra sono 68, a sinistra 44; quelli dei laminari massimi a destra 26,

a sinistra 10; e quelli dei marginali a destra 44, a sinistra 68; e così in complesso si hanno, a destra 138 rami terminali, a sinistra 122 con una differenza in meno di 16 in questa rispetto alla destra. Ciò è dovuto esclusivamente alle terminazioni dei laminari massimi, più numerose a destra; mentre gli angolari di destra si eguagliano a' marginali di sinistra, ed i marginali di destra agli angolari di sinistra; e la somma totale di tutti i rami tendinei terminali delle valvole atrio-ventricolari, destra e sinistra, è di 260. Tutto il complesso dei tendini dà agli apparati valvolari l'aspetto di una tela in parte intessuta nei lembi ed in parte rimasta in fili nei ventagli tendinei. Per i loro rapporti con la zona fibrosa e coi lembi, con la zona muscolare e coi pilastri, messi tutti assieme in moto, direttamente o indirettamente, dai movimenti sistolici e diastolici dei ventricoli e delle orecchiette, si ha una complicazione tale, che a volere seguire le fasi dei singoli movimenti nelle singole parti, sarebbe opera impossibile. Ma pure in mezzo al molteplice traluce l'ordine e la semplicità; e le numerose direzioni di forze sono mirabilmente disciplinate; in modo da operare ora coordinate, ora in antagonismo, e da coadiuvarsi reciprocamente nell'uno e nell'altro caso, concorrendo egualmente ed opportunamente a scopi totalmente opposti, e variati da un momento all'altro, a seconda della chiusura o apertura valvolare, alternate con varia rapidità, in rapporto col variabile numero dei battiti cardiaci. Gran parte di questo coordinamento ed antagonismo nella meccanica valvolare è fatta dai ventagli tendinei, per i loro rapporti, per la loro posizione, conformazione, direzione in totale, e nei singoli tendini onde risultano. Ciascun ventaglio, in ciascun apparato valvolare, destro o sinistro, funziona divergente nella apertura dei lembi valvolari e convergente nella chiusura; così anche una metà di un ventaglio, rispetto all'altra, ora è associata, ora è in antagonismo; come pure i diversi tendini di una metà di un ventaglio sono in antagonismo o associati tra loro. Considerando i tendini, che arrivano in un lembo valvolare, una metà di essi appartiene ad un ventaglio, ed una metà all'altro; e sono in antagonismo tra di loro i tendini della stessa specie, ma opposti, cioè i due tendini angolari, i due tendini laminari massimi, ed i marginali, che stirano il lembo in senso verticale, ed in senso orizzontale; volendo isolare anche di più si può dire, che la distensione orizzontale è fatta principalmente dall' antagonismo tra i marginali di un lato e quelli dell' altro; e la distensione verticale è prodotta dagli angolari in basso e dai laminari massimi in alto; i quali hanno punti diversi di origine e di terminazione ed una estensione più o meno grande.

I marginali hanno due punti di attacco, ai pilastri ed al margine dei lembi; gli angolari invece sorgono dalla zona muscolare ed arrivano agli angoli dei lembi, ed i laminari massimi, che sono principale continuazione dei pilastri, si spandono largamente sui lembi, si fissano al margine inferiore della zona fibrosa, e si continuano per quelle trabecole arciformi nella parete muscolare ventricolare. Per guisa che questi si comportano come corde tese fra un semicerchio muscolare, fatto dalla parete muscolare, che finisce in basso con l'apice del pilastro, ed in alto con le trabecole arciformi ventricolo-valvolari; così che a seconda che la corda dell'arco è tirata in basso o in alto, così il lembo si abbassa o si innalza; nel simultaneo abbassamento dei lembi si ha l' apertura valvolare, e nel simultaneo innalzamento dei medesimi si ha la chiusura valvolare. La chiusura valvolare però non è fatta solo dai lembi, chè essi sarebbero

troppo deboli, sia per sostenere l' onda di rigurgito ventricolare, se vi fosse, come si ammette, sia per sostenere la massa di sangue contenuta nella orecchietta. Invece i lembi con la loro forma laminare costituiscono un piano quasi continuo di separazione, ed alla chiusura valvolare concorrono in diverso modo nei varî momenti della funzione cardiaca disponendosi a forma di cono. Questo cono non serba sempre costanti i suoi rapporti di posizione tali quali si osservano nel preparato a secco, in cui esso si mostra con la base regolare in alto all'ostio fibroso atrio-ventricolare, e con l'apice in basso tronco e frastagliato, perchè circoscritto dai margini liberi e dentati dei lembi valvolari; ma esso invece inverte i suoi rapporti in quanto che nella massima diastole ventricolare la sua base è in basso, perchè i lembi sono respinti verso le pareti ventricolari, producendosi in tal modo la maggiore ampiezza di apertura, e l'apice tronco è in alto in corrispondenza dell'ostio fibroso atrio-ventricolare. Il contrario avviene nella sistole, in cui i lembi convergendo verso l'asse della cavità ventricolare formano in questo punto l'apice del cono, che pel raccorciamento dell' asse ventricolare quasi scompare inferiormente sul finire della sistole ventricolare, e del medesimo cono non resterebbe immutato che solamente l'ostio fibroso che ne rappresentava la base, il cui margine inferiore resterebbe così chiuso dal ventricolo, come il superiore dalla orecchietta, giacchè la zona muscolare, spinta in alto nella sistole ventricolare, gli formerebbe come un pavimento mobile, e nella diastole ventricolare, gli formerebbe come una volta mobile la parete auricolare; in tal modo la chiusura avverrebbe sempre all'estremo più ristretto del cono. Da tutto ciò si rileva che i lembi valvolari, i ventagli tendinei, ed i pilastri sono parti intermediarie, e compiono una funzione di secondaria importanza, al punto che potrebbero essere anche eliminate senza rendere impossibile il meccanismo valvolare, essendo ridotto questo alla sola zona fibrosa ed alla zona muscolare, come se ne ha un esempio nella valvola carnosa atrio-ventricolare destra degli uccelli, ed anche dell'ornitorinco tra i mammiferi. Infine per la loro forma laminare i lembi possono costituire un piano di separazione, e sostenuti nella sistole ventricolare possono separare e sostenere tutto il peso della massa sanguigna contenuta nell' orecchietta in diastole; e quindi la separazione della massa sanguigna sarebbe il loro ufficio principale. Il cono trabecolare, che s' innalza dall'apice ventricolare, contraendosi sempre più, spreme il sangue dai suoi loculi, serra le sue maglie e diventa come una colonna solida, intorno a cui si addossano prima la parete ventricolare posteriore e laterale, e per ultimo anche la parete anteriore, quando essa avrà spremuto il sangue residuo, rimasto nelle sue lacune trabecolari, lo avrà raccolto nel cono arterioso, ed infine spinto con la massima forza contro all'arteria polmonale. Nel ventricolo sinistro ciò avviene diversamente, in modo più semplice, e con l'applicazione più diretta, della forza di contrazione, di gran parte delle robuste pareti ventricolari, alla spinta della massa sanguigna di contro all'orifizio dell'aorta. L'apparato valvolare occupa la parte superiore e laterale del ventricolo sinistro, ed il suo orifizio si trova in una specie di nicchia. Per l'innalzamento dei pilastri, della zona muscolare semilunare e dei lembi, tutto l'apparato è innalzato ancora dippiù, e tirato alquanto in dietro; lasciando la maggiore ampiezza al cono arterioso, che si trova in basso, in dentro ed in avanti dove si raccoglie il sangue, sul quale si serra con tutta la potenza delle sue robuste pareti il ventricolo sinistro. Per siffatto modo

il sangue è spinto così regolarmente secondo l'asse dell'aorta, che non è possibile alcun urto nell'apparato atrio-ventricolare, rimasto in disparte. Per cui mentre il meccanismo valvolare si comporta differentemente nei due ventricoli, pure il risultato è lo stesso. In tal maniera non è affatto ammissibile la idea che il sangue chiuda da sè solo le valvole atrio-ventricolari, come le arteriose, per retrospinta; ciò è possibile in queste, perchè si trovano in orifizî molto regolari, sono di costruzione semplice e perchè, trovandosi in basso, sono favorite anche dalla gravità; ma in quelle invece, in condizioni tanto diverse, vi è necessario l'aggiunta di un apparato muscolare, che renda inutile o impossibile l'intervento del sangue, che per la *vis a tergo* della coordinata contrazione ventricolare, deve rapidamente progredire innanzi, verso gli ostî arteriosi.

Questo risultato, ottenuto dopo un lungo studio dei rapporti di fatto, ed interpretati nei loro possibili movimenti, non sarà facilmente inteso. A maggiore schiarimento bisogna ricondurre il ventricolo al tipo tubolare, comune a tutto il sistema vascolare, che in questa parte è modificato, per amplificazione del lume, per spessezza delle pareti e per speciali curvature, necessarie per cambiare direzione alla corrente. Così si può ammettere che i ventricoli sono tubi curvati a *U*; il destro ha il tratto discendente a destra ed indietro, al cui principio si trova l'apparato atrio-ventricolare, ed il tratto ascendente a sinistra ed in avanti, sul cui fine si trova l'apparato valvolare sigmoideo polmonale. Il sinistro ha la stessa forma ma inversa nella direzione, perchè il tratto discendente è a sinistra in dietro ed in alto, con la valvola atrio-ventricolare al principio, ed il tratto ascendente a destra in avanti ed in basso con le valvole sigmoidee aortiche alla fine, ed anche esse dirette nel senso della corrente. I tratti discendenti rappresentano gli imbuti di afflusso, che quando han dato passaggio al sangue dall'orecchietta al ventricolo si obliterano; ed allora entrano in funzione i tratti ascendenti di efflusso, rappresentanti i coni arteriosi, che si obliterano anch'essi per spingere a tutta forza il sangue nelle arterie; e la direzione del sangue è secondata dalle contrazioni della parete ventricolare in modo, che tutta la forza si spieghi nello stesso verso e non sia possibile il contrario. Da ciò ne viene anche per conseguenza, che nella sistole i ventagli tendinei ed i lembi sono nel massimo riposo, e questi non sono innalzati dal sangue ventricolare, che va in direzione opposta; ma invece lo sono da tutta la parte muscolare dell'apparato stesso, a cui si associa nella massima sistole tutta la massa ventricolare divenuta compatta, per la obliterazione della cavità; e così tutta la quantità di sangue, che si trova nell'auricola, preme sui lembi, i quali per la loro continuità chiudono tutti gl'interstizî delle parti sottoposte, che alla loro volta fanno una solida armatura di sostegno.

Da tutto ciò si rileva ancora che la sistole ventricolare non è un atto semplice, ma molto complesso; in prima è diversa per potenza, per direzione, e per posizione delle parti nei due ventricoli; e poi nello stesso ventricolo si compiono diversi successivi movimenti, che danno per risultante una contrazione totale, che per la sua rapidità sembra unica (come si fondono nella luce bianca i sette diversi settori coloriti di un disco girante rapidamente). I singoli momenti di una sistole ventricolare analizzati sarebbero: la contrazione delle trabecole arciformi, che tirano verso la base ventricolare i 6 tendini laminari massimi dei ventagli tendinei, e questi i pilastri, i quali facendo punto fisso su di quelli, traggono in alto la zona muscolare, che fissandosi

ai pilastri si contrae; ed essa tira lo strato interno trabecolare in modo diverso nel ventricolo destro e nel sinistro, ed indipendentemente nell'uno e nell'altro. Facendo punto fisso sullo strato interno si costringe lo strato medio, che per le sue fibre ad 8 in cifra, comuni ai due ventricoli, coordina questi reciprocamente in un sistema solo riavvicinandone le pareti al setto, e spostandone gli apparati valvolari cardiaci; ed infine sullo strato medio si serra lo strato esterno (che circonda in totale orizzontalmente e longitudinalmente i due ventricoli) occupando il posto lasciato dai due strati ristrettisi precedentemente. Per la chiusura e per lo spostamento avvenuti nei coni valvolari cardiaci, e per il coordinamento delle fibre muscolari dei tre strati, la contrazione totale delle pareti ventricolari si comporta in modo, che nella massima forza sistolica l'effetto utile è quasi tutto a vantaggio dell'incanalamento e della spinta del sangue nei coni arteriosi diretti nel senso della corrente; anzichè a far perdere una parte di quell'effetto utile, respingendo il sangue contro gli apparati atrio-ventricolari già tirati in disparte nell'estremo opposto del cono discendente. Mi parrebbe assurdo, che mentre tutto concorre mirabilmente ad assicurare la celerità e la forza della corrente, vi fosse un intoppo di ritardo ed un indebolimento di forze per invertita direzione. Ad internarsi ancora meglio nel meccanismo valvolare cardiaco bisogna anche decomporre la diastole nei suoi singoli momenti. Le pareti ventricolari, fortemente compresse tra loro nella massima potenza sistolica, avvenuta in modo centripeto, cioè prima negli strati interni, e poi nell'esterno, per elasticità, e per altre ragioni, in modo centrifugo entrano in diastole; cioè con l'allontanarsi dal centro prima lo strato esterno, per far posto al medio, e questo dopo, per far posto all'interno, e così gradatamente fino a ripristinare la cavità ventricolare. A misura che questa si amplifica il sistema trabecolare centrale del ventricolo destro è tirato in basso dall'apice ventricolare, e così anche la zona muscolare, i pilastri, i ventagli ed i lembi; e sarebbero tirati con tanta forza dal peso della parete muscolare, che si spezzerebbero tutti i tendini sottili se non vi fossero i 6 tendini laminari massimi, i quali per la loro robustezza, e pel loro attacco alla zona fibrosa ed ai pilastri, si oppongono; ed i lembi valvolari stessi, che si comportano come fasce tendinee legate direttamente al margine inferiore della zona, ed indirettamente per i ventagli ai pilastri, concorrono nel risultato. L'urto resta anche smorzato dalla elasticità dei tendini e dei lembi, e dalla forma trabecolare della faccia interna ventricolare, che concorrono a dare un giusto grado di tensione ai ventagli. Le parti sono così bene disposte, che dopo la compressione della sistole, i lembi si spiegano perfettamente e rapidamente, per lasciare libero corso al sangue auricolare nel ventricolo, di cui occupa tutte le lacune tenute aperte per la sospensione delle trabecole all'apparato valvolare stesso; una parte del sangue nel primo tempo scende quasi per proprio peso, e lo stesso sangue amplifica in basso l'apertura valvolare; ma poi la forza crescente della spinta della sistole auricolare lo spingerebbe con tanto impeto contro i lembi, che questi sarebbero addossati alla parete ventricolare, se non fossero rattenuti dai ventagli tendinei, i quali per la loro elasticità permettono la massima distensione a' lembi, e poi, cessata la pressione, li ritirano verso il centro.

La terminazione dei ventagli tendinei sulla faccia scabra dei lembi è chiaro indizio del modo di funzionare dei medesimi; cioè ch' essi sono rattenuti dai ventagli, perchè non aderiscano alla parete ventricolare, pur potendola toccare per la

elasticità dei tendini; ma dopo finita la pressione auricolare, essi rimettono i lembi nella posizione la più naturale, che è quella del cono valvolare ristretto in basso. Per conseguenza i tendini di sostegno dei lembi si trovano opportunamente in fuori, cioè sulla loro faccia scabra ventricolare, come il reticolato di corde si trova all'esterno della tela di un pallone, per rafforzarne le pareti, e di poco o nessun vantaggio sarebbe se fosse all'interno. Questo secondo caso sfavorevole si avrebbe, qualora si volesse ritenere giusta, la idea finora ammessa, che i lembi dovessero contrapporsi al reflusso del sangue dal ventricolo all'orecchietta nella forte spinta sistolica; se ciò fosse di fatto, vi sarebbe la possibilità del distacco dei lembi dai tendini, almeno dei più deboli nella loro aderenza, e ci sarebbe anche la rottura dei tendini più sottili, i quali funzionerebbero in condizione molto svantaggiosa; mentre invece, tirando in basso e verso il centro, si trovano nella direzione verticale, che è la più opportuna per resistere alla spinta centrifuga. Per conseguenza, nell'apertura valvolare, i tendini ed i lembi sono nella massima tensione; mentre per contrario, nella chiusura, la parte muscolare dell'apparato valvolare ha il principale ufficio, ed i lembi fanno solo da piano divisorio per la loro estensione membranosa. Per cui i lembi, ed i ventagli si abbassano spinti dalla corrente, ed anche tirati giù dalle pareti ventricolari nella diastole; e s'innalzano spinti in alto dai tendini laminari massimi, tirati dalle trabecole arciformi. Essi si muoverebbero, come una pinna di pesce in acqua, per congegno proprio, e non per reflusso sanguigno, il quale con le sue ondate regressive, mentre ostacolerebbe il facile corso, d'altra parte non potrebbe assicurare la regolarità di una funzione così importante e complicata qual'è la chiusura valvolare; la quale invece è affidata quasi esclusivamente ad elementi muscolari, opportunamente disposti, ed adattati alle condizioni speciali delle cavità, e delle pareti di ciascun ventricolo.

Dal modo di funzionare degli apparati valvolari si rileva anche un altro ufficio molto importante, che essi hanno, e che è bene di precisare; cioè il tenere sospeso tutto lo strato interno trabecolare dell'apice nel ventricolo destro, e di parte della parete laterale nel ventricolo sinistro, tenendo così sollevate le maglie trabecolari, onde non si accascino per proprio peso, e non gravitino sull' apice ventricolare, nè sullo strato esterno della parete. In tal modo resta alleggerito gran parte del peso, stabilendosi una specie di equilibrio, tra lo strato interno trabecolare, sospeso all'apparato valvolare, e lo strato esterno, fissato alla parte esterna ed inferiore della zona fibrosa. Questa è come un fulcro interposto tra la piccola cavità interna del cono valvolare e la grande cavità esterna della parete ventricolare. Per tale disposizione, mentre l'apparato valvolare sostiene lo strato trabecolare delle pareti ventricolari, queste alla loro volta spiegano e tendono fortemente le valvole; per cui vi può essere una giusta distensione per la elasticità dei tendini e delle trabecole; quindi la massima tensione dei lembi e ventagli tendinei è nella diastole ventricolare.

Infine lo studio del cuore del capidoglio mi ha offerto occasione a chiarire molti fatti che possono applicarsi anche, in gran parte, all'anatomia del cuore umano e dei mammiferi in genere; e di cui l'applicazione a' singoli casi e la comparazione, per quanto facile altrettanto vasta nella sua particolareggiata esposizione, estenderebbe di troppo i confini del presente lavoro; come pure per la stessa ragione è stato necessario di eliminare la parte di erudizione, che lo avrebbe reso irto di

citazioni, senza un vero vantaggio per i competenti in materia, che possono provvedervi da loro stessi. Invece prima di lasciare questo argomento, essendo stato precedentemente ammesso e definito un terzo lembo valvolare atrio-ventricolare sinistro, che uniforma nel tipo ternario tutte le valvole dei due ostî ventricolari e dei due arteriosi, sarà utile formulare in un modo generale e facile tutti i reciproci rapporti dei diversi lembi. Per fare questa semplificazione bisogna riferire tutti i rapporti al setto, ch'è il piano regolatore della simmetria cardiaca, e dare lo stesso numero, come si è detto innanzi, a tutti i lembi omologhi, che si trovano nelle quattro valvole cardiache ed arteriose. Il tutto si può restringere nella seguente formola riassuntiva di quanto è stato detto a pag. 188.

I 12 lembi delle 4 valvole cardiache ed arteriose sono distinti in 8 pari, e 4 impari; gli 8 pari in 4 *settali* o interni (ciascuno di essi designato con lo stesso numero I) di cui 2 del cuore destro, e 2 del sinistro; ed in 4 *parietali* o *esterni* (II), di cui 2 del cuore destro, e 2 del cuore sinistro; i 4 impari (III) distinti in 3 posteriori ed in 1 anteriore, cioè il polmonale.

Ovvero detto in un modo più breve; i 12 lembi, dei quattro orifizî cardiaci e vascolari, formano 4 triangoli isosceli valvolari; di cui 3 a base posteriore, ed 1 a base anteriore, cioè il polmonale.

Arterie aorta e polmonale.

Il preparato, che ora si descrive, rappresenta l'arco dell'aorta, preso a poca distanza dalla sua origine, in corrispondenza dell'apparato valvolare fino al punto opposto, in cui il tronco diventa discendente; nella medesima condizione si trova il tronco polmonale, tagliato presso la sua origine, e nell'estremo opposto dopo la biforcazione nei due tronchi, destro e sinistro, ad una lunghezza presso a poco corrispondente all'estremo aortico discendente. Questi due tronchi sono riuniti insieme, quasi verso la metà della loro lunghezza, dal condotto di Botallo, in guisa che formano un gruppo solo. Relativamente, questa connessione sarebbe molto tenue, ciò non pertanto quei tronchi sono strettamente addossati fra loro, per essere stati sempre in reciproco rapporto per tutta la vita, in un campo ristretto, limitato dalla base dei ventricoli inferiormente, dai margini superiori e anteriori delle due auricole lateralmente, e dai grossi tronchi venosi posteriormente. In tal modo tutto il gruppo aortico-polmonale è accolto in una specie di nicchia semicircolare, le cui estremità sono rappresentate dagli apici auricolari. Se si considerano le parti nello stato di turgore, come si ha nel momento della diastole delle orecchiette, contemporanea alla diastole dei grossi tronchi, si potrà di leggieri rilevare come, non solo vi sia una reciproca e regolare compressione tra le orecchiette ed i grossi tronchi presi insieme; ma più ancora fra i tronchi stessi, i quali avviticchiati come sono in uno spazio ristretto, e comprimentisi tra loro fortemente, come in mutua lotta, nel momento della massima distensione, proporzionale all'enorme massa sanguigna, ed alla potente pressione ventricolare, devono siffattamente modellarsi l'uno sull'altro, concrescendovi insieme, da acquistare delle curve di adattamento molto pronunziate. Queste curve secondo la loro direzione, e secondo il loro grado, sono un indizio della direzione e potenza dell'onda sanguigna; per questa ragione sarà bene indicarle

accuratamente, perchè nel caso presente sono accentuate al massimo grado. L'accentuazione delle curve è in rapporto, non solo con la grandezza dei vasi, propria del cetaceo, ma anche con una dilatazione che occupa tutto l'arco dell'aorta e la porzione ascendente del tronco polmonale fino all'origine del condotto di Botallo.

Arteria polmonale. — Il calibro dell'arteria polmonale è maggiore di quello dell'aorta, ma non è uniforme; giacchè la sua porzione all'origine delle valvole sigmoidee misura 0,78, e presso all'origine del condotto di Botallo presenta una massima dilatazione la quale giunge a 0,81. Nel punto dove finisce il tratto rigonfio ascendente (che nella sua lunghezza fino alla base sigmoidale è di 0,55) vi è un restringimento, che misura 0,73; e dopo questo tratto ristretto, nuovamente si allarga per dare origine a' due rami polmonali destro e sinistro. Questi due rami si eguagliano ad un dipresso nel loro calibro, e vi è una piccola differenza in più nel destro, che misura 0,57 rispetto al sinistro, che misura 0,54. Anche questi tronchi non sono equidiametri in tutta la loro lunghezza, giacchè incominciano ristretti nella loro biforcazione e si dilatano alquanto dopo, per andare gradatamente diminuendo di calibro. Mentre il tronco sinistro decorre rettilineo, il destro ha una curva con la concavità a destra, che circonda esattamente tutto il tratto ascendente dell'aorta, in corrispondenza della curvatura, mentre l'aorta stessa, alla base ed anteriormente, è circondata dal tronco principale. Questo, oltre alla curvatura suddetta in continuazione col suo ramo destro, che può dirsi una curvatura orizzontale, ne presenta un'altra più in basso nella sua parte posteriore, che si adatta di contro la faccia anteriore della base aortica. In corrispondenza della curvatura posteriore della origine dell'arteria polmonale anteriormente si osserva il massimo rigonfiamento ad ampolla, rigonfiamento reso anche più manifesto da quella specie di collo che s'interpone tra questa dilatazione e l'altra che precede la biforcazione. In questo punto, ristretto anteriormente e superiormente, sorge il condotto di Botallo, diretto da destra a sinistra e quasi orizzontalmente verso il centro dell'arco aortico, nella sua parte anteriore inferiore. La lunghezza del condotto di Botallo, dall'estremo polmonale all'estremo aortico misura 0,15, la sua circonferenza 0,08. Il calibro di questo condotto è uniforme per tutta la sua lunghezza, e comunica pei suoi estremi coi due tronchi polmonale ed aortico.

Arco aortico. — L'arco aortico dalla sua origine in corrispondenza delle sigmoidee fino al punto di restringimento, corrispondente al tratto aortico discendente, misurato nella sua massima curva superiore, ha una estensione di 1,24. Tutta questa estensione dell'arco non si presenta con diametro uguale. Per facilitarne la descrizione si può distinguerlo in due tratti, uno ascendente e destro, un altro discendente e sinistro; la porzione ascendente è quasi equidiametra e misura 0,70; l'altra discendente dapprima va aumentando nel suo calibro e poi notevolmente si restringe per continuarsi nel tratto seguente, ossia l'aorta discendente. Il punto massimo di dilatazione dell'arco aortico è nel punto intermedio tra l'origine della carotide sinistra e quella della toracica posteriore dello stesso lato; o altrimenti poco dopo lo sbocco aortico del condotto di Botallo. La circonferenza della massima dilatazione misura 0,90, e quella del punto più ristretto ne misura 0,37. Nei due tratti aortici non vi è solo differenza nel calibro, ma pure nelle curvature, in quanto che il tratto ascendente, mentre si dirige da destra a sinistra, s'incurva

da dietro in avanti; e si sovrapporrebbe al tronco principale polmonale, in corrispondenza del condotto di Botallo, se non deviasse la sua curva anteriore ripiegandosi a sinistra ed in basso; in tal maniera passa a ridosso del tronco polmonale sinistro. Questo tratto discendente dell'arco aortico, se si considera nella sua curva superiore si troverà in accordo con la porzione ascendente; come anche nella curva della sua faccia posteriore; mentre invece si presenta molto differente nella sua curva inferiore, che nei due tratti non è in continuazione; in quanto che quel lato in corrispondenza del tratto ascendente è quasi rettilineo, e l'altro lato del tratto discendente è leggermente incurvato, di maniera che tra le due porzioni si forma, più che una curva, un angolo. Si fa notare questa particolarità, perchè come si vedrà, è di molta importanza, in quanto che questo angolo esterno forma una sporgenza nella faccia interna del vaso, a guisa di uno spigolo rilevato, e che permette una distinzione del tratto ascendente e del discendente. Anche nella faccia anteriore del tratto discendente, in corrispondenza dello sbocco del canale di Botallo, vi è una differente curvatura fra il tratto ascendente, che si presenta incavato in avanti, ed il tratto discendente, che si mostra fortemente rigonfio in avanti, da accennare manifestamente, che questa dilatazione sia in stretta relazione con lo sbocco del condotto di Botallo stesso.

I tronchi primarî sorgono dalla massima curvatura aortica a diversa altezza, e sono al numero di tre; di cui due sul tratto ascendente a destra, l'altro sul tratto discendente a sinistra. I due primi sono i due brachio-cefalici, destro e sinistro; l'altro è il ramo toracico posteriore sinistro. Partendo dall'origine aortica presso alle sigmoidee, il primo tronco, che s'incontra, è il brachio-cefalico destro, quello che segue è il sinistro; questi due tronchi hanno al loro principio un diverso calibro, il destro nella circonferenza misura 0,40, ed il sinistro 0,30; il destro è inferiore, il sinistro superiore; il destro è posteriore, il sinistro è anteriore. I rami che si spiccano dall'arco aortico del capidoglio sono simili a quelli del delfino, in quanto che dal brachio-cefalico destro si spicca, come si vede nel preparato, a poca distanza dalla sua origine, un tronco rivolto in dietro, il quale rappresenta l'arteria toracica posteriore destra della circonferenza di 0,33.

È degno di nota il rigonfiamento fusiforme che si osserva in questo ramo, in quanto che questo rigonfiamento si conforma con quelle dilatazioni che sono state notate nei grossi tronchi. Poco dopo l'origine della toracica posteriore, si osserva la sezione di un vaso della circonferenza di 0,27, che corrisponderebbe al tronco brachio-cefalico propriamente detto, in quanto che dallo stesso avrebbero origine la succlavia destra, e le due carotidi destre, cioè l'interna e l'esterna. Dal tronco brachio-cefalico sinistro sorgono tre rami, cioè la succlavia sinistra e le due carotidi sinistre, cioè l'interna e l'esterna. L'avere questo tre rami solo, invece di quattro come si osserva nel tronco precedente, è la ragione della piccolezza del suo calibro, il quale poi, messo in rapporto col calibro del tronco da cui si spiccherebbero i tre vasi omologhi del tronco precedente, lo supera di 0,03. Mentre i due tronchi anteriormente notati si trovano sulla parte ascendente a destra della curva aortica e molto vicini tra loro; un terzo tronco molto lontano dai precedenti sorge, sulla parte superiore sinistra della curva discendente dell'arco aortico con un calibro minore, essendo che

la sua circonferenza misura solamente 0,23. Questo tronco unico corrisponde alla toracica posteriore sinistra.

Da quanto precedentemente si è esposto, circa l'angolo che si trova nella curvatura minore o inferiore dell'aorta, e la origine dei grossi tronchi brachio-cefalici destro e sinistro, si rileva, che questi due tronchi si trovano sul tratto ascendente dell'arco aortico, il quale è distinto dal tratto discendente da una specie di spigolo che divide l'interno del vaso in due compartimenti, di cui l'uno conterrebbe sangue puramente arterioso; e l'altro sangue misto. Tale condizione riesce molto vantaggiosa, perchè in tal maniera i tronchi brachio-cefalici, le cui ramificazioni vanno a' centri nervosi ed agli organi di locomozione (pinne), hanno un sangue esclusivamente arterioso. L' altro compartimento del tratto aortico discendente, quantunque contenga sangue misto, per la posizione da cui sorge il tronco toracico posteriore sinistro, questo riceve anch'esso sangue esclusivamente arterioso; e ciò avviene per le condizioni della corrente arteriosa aortica, e pel modo di confluenza della corrente venosa del condotto di Botallo. Imboccando questo condotto nella parte antero-inferiore dell' arco aortico, la sua corrente venosa deve seguire, restando sempre in basso, la direzione della corrente arteriosa discendente, e perciò la parte superiore della corrente che infila nel tronco toracico posteriore sinistro anch'esso riceve sangue esclusivamente arterioso. In tal modo i centri nervosi, le pinne e le origini del plesso intercostale del *retetoracicum*, che va a' muscoli intercostali e che devono tutti funzionare attivamente, anche durante la sommersione dell'animale, hanno sangue arterioso, mentre tutti gli altri tronchi, che sorgono dall'origine dell' aorta discendente, e che si ramificano in organi vegetativi, la cui funzione relativamente risente meno della presenza di un eccesso di acido carbonico, riceverebbero sangue misto.

La quantità di sangue venoso che scorre nel tratto aortico discendente, la cui circonferenza è di 0,46, si può rilevare considerando il rapporto che si ha tra questa circonferenza e quella del condotto di Botallo che misura 0,08.

Dilatazione all'origine dei grossi tronchi arteriosi. — Come si rileva dalla descrizione, tanto l'arteria polmonale, quanto l'arteria aorta presentano una dilatazione al loro principio, che nell'aorta ha una estensione dalla sua origine fino alla porzione discendente, ed è quasi il doppio della porzione dilatata dell'arteria polmonale, la quale si estende dalla sua origine fino al punto in cui sorge il condotto di Botallo. Osservando le pareti di questi due vasi non si nota nulla di particolare nella loro spessezza, nella loro resistenza, nella loro tessitura, e nella forma della dilatazione, che potesse dare indizio di un fatto patologico, cioè di un aneurisma; e d'altra parte, non trovando citato alcun fatto di questo genere, a questo grado di sviluppo, ho cercato d'indagare quali fossero state le condizioni, che avessero potuto produrlo, e parmi che ciò debba attribuirsi al tuffare che questi animali fanno a grandi profondità. Nella normale inspirazione il polmone è giustamente disteso e perciò tutte le maglie dei vasi capillari nel loro calibro sono regolarmente stirate, e quindi il circolo sanguigno è reso anche più facile; l'opposto si verifica nella espirazione in cui i capillari e le loro maglie sono raggrinzate. Però ciò che avviene per difetto si verifica anche nei casi di eccesso, cioè quando la distensione sia forzata; allora le maglie ed i capillari quanto più si distendono, tanto più diminuiscono il

loro calibro, e per questa ragione il sangue dovendo attraversare tubi ristretti va sempre più rallentando fino a che succede una stasi. Oltre à ciò se alla massima distensione si aggiunga anche la pressione del diaframma per compressione addominale che si risente a grandi profondità (e per gli sforzi che l'animale fa per percorrere nel minore tempo possibile la maggiore estensione) si avranno tanti ostacoli, che la circolazione andrà sempre più rallentando fino ad arrestarsi. Infine il polmone coi suoi movimenti di espansione e di restringimento fa come da pompa aspirante e premente e quindi aiuta il corso del sangue; mentre la sospensione della respirazione per un tempo più o meno lungo deve in proporzione intercettare il circolo sanguigno nel polmone, e produrre una replezione nel tratto destro del circolo cardiaco-polmonale, come nel caso dell'asfissia meccanica. È da notare anche il rapporto che passa tra il numero delle pulsazioni cardiache ed i moti respiratorî, che concordemente si accelerano e si rallentano serbando un certo rapporto; così in un cavallo 36 pulsazioni si associano ad 8 respirazioni, e nel trotto le pulsazioni arrivano a 100 e le respirazioni ascendono a 28. Questo equilibrio è necessario per potere regolare l'afflusso ed il reflusso del sangue nel polmone. Ora siccome il capidoglio prima di tuffare inspira profondamente, poi chiude lo spiraglio, la glottide e si sommerge, avviene che il detto equilibrio si altera, perchè da una parte l'animale sospende la respirazione e dall'altra accelerando il moto, per restare il minor tempo possibile sotto acqua, aumenta i suoi battiti cardiaci; e per conseguenza è facile il comprendere come tutta la pressione sistolica destra si debba concentrare alla base dell'arteria polmonale, che è il punto più vicino al centro premente. Non potendo la colonna sanguigna procedere innanzi, deve distendere la parete dell'arteria in rapporto della forza del ventricolo, della durata della stasi e della resistenza della parete vasale, e si arriverebbe al punto da seguirne una rottura di questa, se non vi fosse il condotto di Botallo pervio, che fa quasi da valvola di sicurezza, e produce un discarico che scema la tensione nell'arteria polmonale. Quello che avviene in questa accade pure nell'arteria aorta ma in un grado più alto, in ragione della potenza maggiore delle cause produttrici che sono le seguenti. Primo, la spessezza e la elasticità maggiore delle pareti dell'arteria aorta la rendono più distensibile della polmonale. Secondo, la lunghezza maggiore del tratto aortico alla base della grande circolazione, rispetto al tratto polmonale alla base della piccola circolazione. Terzo, l'arresto del sangue nei capillari dei visceri addominali straordinariamente maggiore rispetto a' capillari polmonali, per la forte pressione a grandi profondità sottomarine delle pareti addominali sui visceri interni. Quarto, la compressione del *retetoracicum* (che sta in rapporto con le arterie toraciche anch'esse dilatate posteriormente) fatta dal polmone disteso e compresso a sua volta dal diaframma, spinto dai visceri e dalle pareti addominali. Quinto, l'associata e contemporanea pressione dei due ventricoli cioè del destro, indirettamente per mezzo del condotto di Botallo, e del sinistro direttamente, la cui potenza sistolica è quintupla rispetto al destro. Per tutte queste ragioni si può capire la esistenza delle due dilatazioni, polmonale ed aortica, ed anche il loro relativo grado di sviluppo, tenendo anche conto della enorme massa di sangue, che calcolata col metodo del Vierordt in rapporto al peso del corpo, sarebbe di circa kil. 5,000.

Dalle ragioni precedentemente esposte ne segue, che nella sommersione del capidoglio queste pressioni anomale, ripetendosi così di frequente, devono produrre una dilatazione compensativa della interrotta funzione respiratoria, ed il grado di aumento nel diametro del vaso, e la lunghezza della dilatazione stessa, devono segnare il limite massimo della distensibilità vasale, proporzionata al tempo della interruzione respiratoria durante la sommersione ed a cui l'animale possa resistere, prima di giungere all'attossicamento carbonioso; perciò quelle dilatazioni alle origini dei grossi tronchi arteriosi sarebbero dilatazioni di adattamento alla sommersione.

Nei mammiferi tuffatori, quantunque non a questo grado, si è notata una dilatazione dell'arco aortico, e specialmente nelle foche, nel delfino, nel narvalo, ed anche nella lontra e nel castoro; e si è notata pure la persistenza, per qualche tempo dopo la nascita, del foro di Botallo nelle foche, nel castoro, nel marsuino, nel narvalo, nel dugong, nella rhytina, nell'ornitorinco; però questo forame dopo un certo tempo si oblitera.

Del resto l'apertura del forame ovale inter-auricolare non è neppure rara nella specie umana; giacchè il Pasqualini a Roma, in una Memoria pubblicata nel 1827, la notò molto frequente nel cuore dei tisici; ed il Bizot in individui da' 16 a più che 40 anni, sopra 155 cuori, l'ha riscontrata in 44 soggetti, in alcuni dei quali in vita non si era manifestato alcun sintomo, che accennasse a questa comunicazione anormale; mentre invece la persistenza della comunicazione dei due tronchi polmonale ed aortico, mediante il condotto di Botallo, è eccezionale nel capidoglio adulto.

Valvole sigmoidee dell'arteria polmonale. — Il principio dell'arteria polmonale, in prossimità delle valvole sigmoidee, presenta una dilatazione, la cui circonferenza esterna è di 0,95 ed il suo diametro 0,31. Questa dilatazione è specialmente manifesta nella parte anteriore in corrispondenza della valvola sigmoidea anteriore e del corrispondente seno del Valsalva. Tale seno corrisponde alla parte convessa della curva dell'arteria polmonale, ed è non solo più sporgente in avanti, ma pure in basso. Indietro di esso vi sono gli altri due seni, di cui l'uno in rapporto del setto e l'altro con la parete esterna. I due lembi valvolari, che rispondono a questi due seni, si trovano riuniti insieme in modo da formare un angolo posteriore, ed essendo in corrispondenza della parte concava della curva dell'arteria polmonale verso la base di essa, sono per conseguenza più alti e ristretti rispetto al lembo valvolare del seno anteriore. Prese le misure delle corde del seno settale si ha, che in questo la corda è di 0,27, nel seno parietale di 0,29, e nell' anteriore di 0,25; in modo che, il seno anteriore è il più corto, mentre gli altri due, il settale e il parietale, sono più lunghi e specialmente questo ultimo, e d'altra parte mentre questi due ultimi sono più ristretti, l'anteriore è più ampio.

Valvole sigmoidee dell'arteria aorta. — L'origine dell'arteria aorta in corrispondenza delle valvole sigmoidee è anch'essa alquanto dilatata, ma relativamente meno di quello che si osserva nell'arteria polmonale, in quanto che la sua circonferenza esterna misura 0,85 ed il suo diametro 0,26. I suoi seni riescono meno sporgenti all'esterno. Questa porzione aortica si presenta molto simmetrica, sia per una certa uguaglianza della grandezza delle valvole, sia per la presenza delle due arterie coronarie. Misurate le corde dei seni dai due punti d'inserzione del lembo valvolare

sulla parete aortica, ne risulta che, nel seno in corrispondenza del setto, la corda è di 0,24, e questa misura corrisponde anche per l'opposta, invece la corda del seno posteriore, o impari, è la più breve cioè 0,22.

Per ciò che riguarda le inserzioni e la forma di questi seni in particolare vi è poco da osservare, solo si nota che mentre nella arteria polmonale la valvola sigmoidea impari, o anteriore, era la più bassa, nell'aorta invece le più basse sono le due pari, cioè la settale e la parietale. L'angolo in cui si vede più esteso lo spazio intervalvolare (*spatia intervalvolaria* di Henle) è l'anteriore e l'esterno, la cui area si presenta di una forma triangolare, mentre l'angolo interno è molto ristretto ed appare come una semplice fenditura. In corrispondenza del margine libero di ciascuna valvola sigmoidea è da notare (come si vede nella fig. IX) nel mezzo, invece di un semplice nodulo indicato col nome di Aranzio, una specie di linguetta arrotondata alla sua estremità, e molto allargata alla base in continuazione del margine libero, e che sporge per 0,015, e la sua base, la quale si confonde col suddetto margine, misura 0,05. In tal maniera la linguetta divide il margine libero di una sigmoidea in due metà semilunari, che si estendono da essa linguetta a' due angoli d'inserzione. Tale conformazione è del tutto diversa dal margine libero delle sigmoidee polmonali, nelle quali non solo non esiste la succennata linguetta, ma non vi è neppure alcun indizio dei noduli del Morgagni, i quali esistono nell'uomo ed in altri mammiferi; per tal ragione il margine delle sigmoidee polmonali ha una semplice curvatura semilunare che si estende da un estremo all' altro d'inserzione. In corrispondenza dei due seni, settale e parietale sorgono i due grossi tronchi coronarî, i quali si eguagliano nella loro circonferenza esterna e nel diametro, essendo quella di 0,18 e questo di 0,06. La distanza inferiore di origine delle arterie coronarie dal fondo dei seni è differente, in quanto che è di circa 0,10 nel seno settale, e nel parietale 0,07. Le due coronarie non si trovano sul mezzo dell'arco corrispondente al seno, ma il margine anteriore del vaso è alquanto indietro della metà dell'arco stesso; per conseguenza la metà posteriore dell'arco è divisa in due parti quasi uguali, l'una occupata dal diametro del vaso, e l'altro dalla distanza che passa tra il margine posteriore del medesimo e l'angolo semilunare corrispondente. Considerata la distanza del margine superiore delle coronarie dal fondo dei seni sigmoidei, e messa in rapporto con l'altezza delle valvole semilunari corrispondenti, il margine libero delle medesime ed i loro angoli d'inserzione potrebbero trovarsi quasi a livello del margine superiore del vaso, quando si applicano alla parete aortica; in modo che se non tutta, gran parte degli orifizî coronarî resterebbe indietro dei lembi valvolari; e se l'orifizio del vaso non fosse piuttosto indietro anzichè nel mezzo, come la linguetta del margine libero, questa si opporrebbe di contro, avvicinandosi alla parete interna corrispondente dell'aorta. In tal modo l'orifizio coronario sarebbe contrapposto più che alla linguetta mediana, alla semicurva posteriore della sigmoidea corrispondente (vedasi fig. IX).

Quantunque il calibro delle due coronarie sia simile, pure per lunghezza i due vasi sono molto differenti tra loro; in quanto che la coronaria destra, ad onta che ne sia alquanto lungo il tratto conservato nel preparato, pure non dà alcun ramo, e forse solo a grande distanza, dopo di avere girato attorno al solco auricolo-ventricolare,

avrà dato un ramo discendente sul solco interventricolare posteriore, ed un ramo trasverso diretto verso il solco auricolo-ventricolare; presso la sua parte mediana posteriore e lungo il suo decorso, prima della biforcazione dei due tronchi terminali, avrà fornito dei ramuscoli all'orecchietta e ventricolo corrispondente nelle loro facce, anteriore, laterale e posteriore. La coronaria sinistra invece (come si vede nella fig. IX) a brevissima distanza dalla sua origine dà due rami, quasi equidiametri, diretti in avanti, ed un ramo, che per calibro è il doppio di uno dei precedenti, diretto indietro. Questo grosso tronco, per la sua curvatura, doveva girare contornando il solco auricolo-ventricolare sinistro per raggiungere, dopo aver dato i rami auricolari e ventricolari nella faccia posteriore del cuore sinistro, il ramo trasverso posteriore della coronaria destra. Degli altri due tronchi diretti in avanti, quello vicino al ramo posteriore ha una direzione ascendente e potrebbe dirigersi in avanti ed in alto girando a destra, verso la base dell'arteria polmonale, fornendo rami di distribuzione alla faccia anteriore della base del ventricolo destro; l'altro ramo, alquanto più grande del precedente, si dirige in avanti ed in basso e parrebbe dovesse corrispondere al ramo interventricolare anteriore, che verso l'apice del cuore andrebbe ad incontrare le ramificazioni del ramo interventricolare posteriore, formando in tal modo, un circolo ventricolare secondo l'asse longitudinale, ed un circolo auricolo-ventricolare secondo l'asse orizzontale.

Apparato digerente.

Bocca. — Nella descrizione dell'animale si sono indicati alcuni caratteri esterni della bocca; ora a darne una cognizione più approfondita bisogna entrare in maggiori particolari per ognuna delle parti componenti. Il labbro inferiore non ha una figura distinta, il superiore forma come una cornice rigida, in cui s'incassa la mascella inferiore, e solo agli angoli si può dire esservi la pelle molle e prolungata, da ricordare le labbra. La mascella inferiore, o mandibola, è veramente caratteristica nel capidoglio per la sua lunghezza, per la sua sottigliezza e per la sinfisi mascellare, che occupa quasi due terzi della lunghezza totale, dalla sua estremità anteriore agli estremi opposti articolari. La figura totale della mandibola è rassomigliabile ad un Y, di cui l'estremità biforcata, che rappresenta la parte articolare, è relativamente breve ed in quello spazio si alloga la lingua, la quale, per tale ragione, è molto corta e non può giungere nell'estremo dentale anteriore, come erroneamente è stato detto, e come si osserva nel delfino, in cui l'ampiezza tra le due serie di denti è proporzionata alla lingua.

I denti della mandibola sono al numero di 22 a destra, e 23 a sinistra; questa disparità nel numero non è un caso speciale nel nostro esemplare, ma è a considerare come normale, e la differenza da un lato all'altro non è sempre di uno, ma anche di due o più denti. Inoltre vi è anche una differenza nel numero totale, in rapporto dell'età ed anche del sesso; secondo F. Cuvier il massimo numero osservato è di 54. Alcuni autori ammettono che il capidoglio muti i suoi denti ed anche più di una volta; il T. R. Jones opina, riguardo ai cetacei, che con l'avanzare in età si formino nuovi denti posteriori, mentre gli anteriori cadono ed i loro alveoli sono riassorbiti; queste due supposizioni non sono sostenibili, perchè nel nostro esemplare, ed in altri ancora

adulti, i denti anteriori e tutti gli altri sono ben conservati nel loro numero, e si sono osservate anche nei più piccoli individui condizioni simili a quelle degli adulti; i denti dei delfini ancora sono variabili da un individuo all'altro della stessa specie, ed è raro che quelli della stessa età si rassomiglino. I denti erano disposti in entrambi i lati in serie quasi parallela sulla sinfisi, e la distanza della serie destra dalla sinistra era pressochè uguale a quella che passava da un dente all'altro di uno stesso lato; i denti più grandi si trovavano nella regione intermedia, ed i più piccoli anteriormente e posteriormente, con la particolarità che gli anteriori erano più corti, ma dello stesso calibro, ed arrotondati all'estremo come gli altri, che erano più lunghi a forma di fagiuoli con la curvatura posteriore ed alquanto indietro ed in fuori, laddove i posteriori erano corti ed aguzzi; nei giovani, e pare anche nelle femmine, tutti i denti sono aguzzi. Alcuni denti erano usati all'apice, e mostravano lo smalto bianco all'esterno e l'avorio giallognolo all'interno.

I denti non erano infissi in alveoli separati gli uni dagli altri; ma erano in un solco alveolare comune sostenuti dalla mucosa, in guisa che si avrebbero potuto estrarli tutti tirando la mucosa; ma ciò non era facile, perchè in corrispondenza di ciascun di essi la mucosa formava come un cercine a collina, che li circondava fortemente, lasciando tra l'uno e l'altro dente una depressione. La mucosa di color roseo era resistente e tesa; e sul cercine gengivale presentava una cuticola epiteliale della durezza e compattezza dello smalto; questa cuticola si poteva distaccare dalla mucosa sottoposta, che allora si mostrava tutta irta di papille grosse un millimetro e lunghe due. Sulla linea mediana, tra la doppia serie dentale vi era un solco poco profondo indietro, ma in corrispondenza dello spazio tra il 5° e 2° paio di denti esso si slargava ed approfondiva in una fossetta navicolare, che indietro dei due primi denti finiva arrotondata; cosicchè la mandibola aveva superficie cilindrica esternamente, piana e scavata internamente. Le due branche articolari, fortemente scavate nella loro faccia interna, accoglievano per ciascun lato una enorme massa mucosa ove decorrevano nervi e vasi, specialmente questi in grandissimo numero, ed essa si continuava nei solchi alveolari inviando grosse papille in corrispondenza di ciascun dente, e confondendosi con la mucosa mascellare. I denti senza radice, cioè avendo lunga e larga escavazione conica, in cui si allogava la papilla dentale, presentavano tra la cavità e la papilla, per ciascun dente, parecchie formazioni ossee della grandezza di un cece, che sembravano come germi di nuovi denti, ed ossificazione della papilla stessa.

Sulla linea mediana del palato vi era una cresta, che si adattava esattamente alla scanalatura della mascella inferiore ed, in corrispondenza della fossetta navicolare, la cresta si faceva più erta e più grossa, modellandosi su quella fossetta in cui si allogava.

Al principio della mascella superiore, come si è detto, correva il labbro superiore, il quale formava cornice d'incasso alla mandibola; oltre a ciò, a bocca chiusa, vi era un vero addentellato tra le due mascelle, e ciò perchè nella superiore mancavano i denti, ed al loro posto vi erano altrettante fosse gengivali corrispondenti ai denti della mandibola, con la cui parte sporgente ciascuno di essi vi si allogava, come in un astuccio di ampiezza e lunghezza uguale.

Nell'esemplare in disamina nella quinta coppia di fosse gengivali (vedi fig. X) vi era in ognuna un dente appena sporgente con la sua estremità, ed esso, internando un

dito nella fossa, si sentiva molto sottile e vacillante, e così lungo da impiantarsi nel fondo della stessa, nella quale era talmente adattato, da non impedire in essa l'ingresso del dente corrispondente della mandibola, come per gli altri. La presenza di questi due denti mi fece supporre, che nella prima età e per qualche tempo vi avran dovuto essere anche gli altri, ma questi temporanei e decidui, come i denti di latte proprî di altri mammiferi, e che i due indicati sarebbero stati i soli superstiti fino a quel tempo, ma rimasti in uno stato rudimentale, quasi conficcati nelle fosse stesse per compressione dei denti inferiori nel chiudersi della bocca, però anche questi due ultimi avrebbero potuto cadere perchè già vacillanti. Così il capidoglio offre uno dei migliori esempî della dentizione unica nei cetacei, che perciò dall'Owen furono detti *monofitodonti.*

In tal modo, col cadere dei denti temporanei della mascella superiore, col non svilupparsi dei nuovi di ricambio, le fosse gengivali rimaste vuote, avrebbero accolto i denti inferiori, e col continuo attrito le fosse sarebbero rimaste aperte e cresciute contemporaneamente e corrispondentemente ai denti. In tal maniera si può spiegare la differenza tra diversi esemplari osservati, alcuni dei quali erano privi di denti, altri ne avevano in vario numero, e forse potrebbero incontrarsene altri che nel tempo della loro prima età li avessero tutti.

Il capitano baleniere Chase vide più di una volta denti di una notevole grandezza nella mascella superiore di femmine adulte, benchè sempre coperti dalle gengive; nei capidogli maschi invece, essendo più grossi sono foggiati differentemente e non sono apparenti. L' Anderson chiamò il beluga (*Beluga leucas*) capidoglio bianco, perchè avendo in uno di essi osservato la mascella superiore priva di denti accidentalmente, credè ciò un fatto normale; ma altre osservazioni hanno mostrato l'errore in cui era incorso. Anche nelle balene e balenottere deve avvenire altrettanto, ma all'inverso del capidoglio, che cioè nella prima età esistono i denti solo nella mandibola, e che poi cadono rimanendo i fanoni nella mascella superiore per tutta la vita. Pure nel narvalo, tanto nel maschio che nella femmina, cadono tutti i denti originati, e con l'accrescimento delle mascelle scompaiono anche i corrispondenti alveoli; però nel maschio, delle due difese spirali che solamente restano, cade la destra; e la sinistra, che raggiunge uno straordinario sviluppo, rimane per tutta la vita; anche l'Hyperoodon resta con due soli piccoli denti all'estremità della mandibola. Considerando la forma dei denti del capidoglio, ed il genere di alimenti preferito (cefalopodi) si deve ritenere, che non servono ad uso masticatorio, ma come difese; queste, ad onta della mancanza dei denti superiori, potendosi incuneare dentro le fosse gengivali quando la mandibola si serra contro la mascella superiore, possono comprimere potentemente o fare anche una presa formidabile. Infine è da notare che l'asimmetria esistente in altre parti della testa, tra il lato destro ed il sinistro, si riscontra pure nel sistema dentario e nelle fosse gengivali, e pel fatto che vi possono esistere uno, due o varî denti in più in un lato rispetto all'altro, avviene che le coppie di denti e di fosse non si corrispondono esattamente, ma sono asimmetriche (vedi fig. X).

Lingua. — La lingua del capidoglio è molto caratteristica per le sue particolarità. Prima d'ogni altro, avendo già detto che le due branche della mandibola si allontanano tra loro molto indietro, la lingua non può occupare che quel breve spazio, e perciò il suo

apice arrivava solo presso i denti posteriori, e sorpassava di poco il livello dei due angoli labiali, perciò era molto corta e si trovava così, in fondo alla gola; la sua larghezza (0,21) era quasi un terzo della sua lunghezza (0,58), i margini laterali erano paralleli, cosicchè dalla sua base fin presso l'apice non vi era differenza di diametro. L'apice arrotondato finiva nel mezzo con una specie di capezzolo, il quale non era stato da altri osservato prima; nel preparato a secco esso ha una lunghezza di 15 mill. e nel fresco aveva 0,02 tanto in lunghezza come in diametro, e doveva essere molto estensibile e retrattile.

Questo *capezzolo linguale,* che non esiste in nessun altro cetaceo nè in altri mammiferi, deve avere una grande importanza nel capidoglio, e servire in compenso della brevità e poca mobilità della lingua. Il suo ufficio dev'essere tattile e prensile principalmente; e capitando altre occasioni sarebbe interessante il farne uno studio istologico. La superficie linguale piana, rivestita da una spessa cuticola epiteliale, e senza papille di nessuna forma; però profondamente solcata nel senso longitudinale verso l'apice, ed alla base anche nel senso trasverso, in modo da formare come delle masse quadrate da offrire l'aspetto di un selciato; probabilmente nel fondo dei solchi, dove la mucosa è più sottile, potranno trovarsi le terminazioni gustative.

La mucosa linguale nera faceva un distacco dal colore roseo della mucosa-faringea e mascellare. Il margine linguale arrotondato sporgeva alquanto dalla faccia laterale della lingua. La spessezza della lingua in proporzione grandissima eguagliava quasi la sua lunghezza; la gola era relativamente molto stretta, avrebbe però potuto dare facilmente passaggio al corpo di un uomo.

È singolare il modo come prende l'alimento il capidoglio, che il Beale riferisce, secondo gli è stato assicurato dai balenieri, che cioè esso scende a una certa profondità e spalanca la bocca; per lo splendore dell'avorio dei denti attira le seppie ed i piccoli pesci che poi inghiotte e come prova ch'esso non insegue ma attrae, dice di avere trovato capidogli ciechi, ed altri con mandibola non adoperabile per mostruosità o altra ragione, che erano grassi come gli altri. Stando così le cose, è supponibile che il capezzolo linguale, come la lingua del formichiere, possa coi suoi movimenti essere un'esca di attrazione ai cefalopodi ed ai pesci, che aggrappandosi fanno avvertito l'animale, per la sensibilità tattile, della loro presenza, e così esso li può prendere col capezzolo linguale stesso e poi inghiottire. È stata anche più volte dal mentovato Beale e dal Chase notata la particolarità, che il capidoglio quando è ferito vomita tutto l'alimento preso. Nello stomaco del presente esemplare si sono trovate parecchie centinaia di becchi chitinosi di cefalopodi, che esaminati si possono tutti riferire allo stesso genere *Onychoteuthis.*

Serbatoi spermacetici ed apparato respiratorio.

Prima di parlare dell'apparato respiratorio è necessario di approfondire la costruzione anatomica della testa del capidoglio, ed interpretare, se quella forma così eccezionale sia nuova del tutto, ovvero sia modificazione, esagerazione o trasformazione di parti, già esistenti in altri mammiferi, qui adattate a raggiungere scopi diversi.

Dopo avere considerato tutti i possibili rapporti anatomici, e fatte le comparazioni con altre forme più o meno affini, io trovo, che lo sviluppo eccezionale, che si

osserva nella testa del capidoglio, è da riferire principalmente alla faccia, e delle parti della faccia al naso, il quale in generale adempie a due ufficî diversi, l'uno d'introdurre aria nell'apparato respiratorio, l'altro nelle cavità olfattive comunicanti con molti seni. Questa seconda parte, che sarebbe un complemento della prima, e che non manca in organismi di elevata organizzazione, ne' cetacei è stata soppressa, o almeno nella forma così vistosa esistente in altri; mentre d'altronde l'area che avrebbe dovuto occupare la parte olfattiva è rimasta trasformata ed utilizzata in altro modo. In altri termini, tutto l'apparato olfattivo, con tutti i suoi tortuosi meandri facciali, e con le amplificazioni per comunicazioni coi seni mascellari, etmoidali e frontali, che accolgono e contengono aria, è stato sostituito da spongiosi serbatoi per contenere lo spermaceti, materia grassa, allo stato liquido; che se non ha la leggerezza dell'aria, nell'alleggerire il capo, come in altri mammiferi (elefante), è tra le sostanze organiche una di quelle che meno se ne allontana; e perciò concorre mirabilmente a diminuire il peso dell'enorme testa. Al certo, se il cranio del capidoglio avesse avuto lo sviluppo delle ossa facciali, come quelle di un cavallo, il suo peso sarebbe stato enorme rispetto al resto del corpo, e di condizione molto sfavorevole all'equilibrio. L'alleggerimento della enorme testa è fatto dall'olio cetinico, sostituito all'aria, essendo l'animale tuffatore, e dal tessuto connettivo assai diradato, sostituito al tessùto osseo. Ciò neppure sarebbe stato sufficiente se non vi fosse stata la massima riduzione della materia ossea spinta fino ad un punto compatibile con la leggerezza e la solidità, indispensabili ad una massa così grande. A raggiungere tale scopo, la parte ossea facciale è stata diminuita di molto, e ridotta ad una specie di sessola scanalata ad angolo, con due sottili lati che si prolungano dalla parte antero-laterale del cranio escavato anch'esso in avanti, e che decorrendo innanzi vanno sempre più assottigliandosi e restringendosi fino a finire appuntati in corrispondenza della linea mediana incisiva.

Oltre a ciò un altro alleggerimento è fatto sulla mascella dalla mancanza di tanti denti, quanti ne sono sulla mandibola, e che avrebbero avuto un considerevole peso col trovarsi all'estremo anteriore del braccio di leva occipito-atloideo, che può considerarsi come fulcro; e che per giunta, avendo bisogno di alveoli molto solidi, avrebbero portato di conseguenza un maggiore sviluppo osseo nella regione alveolare. Infine un alleggerimento al peso della testa si consegue con la riduzione della mandibola ad una dimensione eccezionalmente esile in proporzione del volume della testa.

La testa quantunque rimasta alleggerita con le indicate modificazioni, non ha punto scapitato in solidità, ed ha raggiunto il massimo grado di elasticità.

Per poter ben chiarire quanto è stato precedentemente detto, bisogna esporre sotto questo punto di vista la costruzione di questo apparato cetinico e del rapporto che ha col vestibolo dell'apparato respiratorio, cioè quel tratto che si estende dalla apertura esterna dello spiraglio fino alle aperture nasali sul cranio.

Come si vede dalla fig. XVI (che rappresenta la sezione verticale del muso del capidoglio, al davanti dell'estremo anteriore dello spiraglio e dell'apice mascellare) la testa si presenta sotto la forma di un cilindroide lateralmente compresso e scavato da una specie di insenatura a ciascun lato; per tale conformazione la testa si può considerare come di forma rassomigliabile ad una cassa rettangolare, di cui le pareti,

posteriore cranica, inferiore facciale, sono ossee e formano il bacino spermacetico; tutte le altre, cioè le due laterali, la superiore e l'anteriore sono cutanee. Dalla figura stessa si vede il rapporto di spessezza dello strato grasso sottocutaneo con le parti sottoposte, le quali consistono di uno strato muscolare, da riferirsi ad una parte del pellicciaio fissato indietro sul contorno frontale, e terminato anteriormente da un grandissimo numero di tendini a forma di larghi nastri, che si dirigono superiormente, lateralmente, e vanno a sperdersi nella cute fortissima del grugno, e sui margini dello spiraglio, in guisa che questa fasciatura muscolo-tendinea può esercitare una certa compressione sul muso, ed aprire e chiudere lo spiraglio. Al disotto di questo involucro, tutto lo spazio rimasto è occupato da una specie di massa cavernosa, spongiosa, lacunare che dir si voglia, fatta da tessuto connettivo principalmente, il quale nella sua periferia è in continuazione con l'involucro muscolare e tendineo-cutaneo, e da cui come propaggini si parte il reticolato, il quale quanto più si allontana dalla periferia, si va sempre più diradando per guisa, che nella parte centrale il diradamento arriva al massimo grado, e qui le maglie del reticolo possono avere l'ampiezza di uno o più centimetri. Le maglie poligone sono fatte da trabecole lunghe e sottili, che formano un reticolato bianco-latteo per l'abbondanza del grasso che si unisce al connettivo, ed esse sono dirette secondo i diversi piani, e l'assieme presenta un aspetto molto elegante, che si può rassomigliare a quello delle maglie del parenchima della milza. Entro queste lacune, come il sangue nei corpi cavernosi, si trovava lo spermaceti, che nell' animale vivente è allo stato liquido della apparenza di sego fuso, ed anche nel morto, dopo parecchi giorni, per calore d' incipiente putrefazione, si vedeva pure allo stato liquido, e si poteva attingere con un recipiente, lacerando facilmente le trabecole delle lacune. Con la lacerazione delle trabecole si rompeva pure un gran numero di vasi sanguigni e grande quantità di sangue si mesceva al grasso cetinico; ma per la diversa densità dei due liquidi se ne separava facilmente come l'olio dall'acqua; però senza lacerare le trabecole, se vi s'immergesse un sifone, si potrebbe estrarre la massima parte del grasso cetinico scevro di sangue per la comunicazione di tutto il sistema lacunare. Poco dopo esposta all'aria la materia grassa cambiava di stato, prendendo l'apparenza granosa di olio di olivo congelato. L'apparato spermacetico trovandosi, per la grande spessezza dell' involucro, alla profondità di un mezzo metro dalla superficie cutanea, ed anche un mezzo metro all'indietro dello spiraglio, ed altrettanto al davanti dell'occhio, era di molto ridotto nella sua estensione; per cui la cavità, che ne risultò dopo la lacerazione delle trabecole, ed il pigiamento di queste contro le pareti circostanti, era di un metro di lunghezza nel senso antero-posteriore, di un metro di profondità nel senso verticale, e di 30 cent. di ampiezza nel senso trasversale. Però questa cavità sarebbe stata di molto aumentata se si fosse asportato tutto il tessuto spongioso fino a raggiungere le pareti del serbatoio, verso cui le maglie andando sempre più restringendosi, finivano per confondersi col tessuto compatto della parete del serbatoio. Questo serbatoio descritto non è che quello di un lato, ma ve ne esiste un altro corrispondente al lato opposto, ed entrambi sono separati nella linea mediana da una grande e spessa parete interposta di tessuto connettivo compatto ricco di grasso, che si comporta come il setto nasale, e nella spessezza di questa parete divisoria vi è scavato il condotto

nasale membranoso, diretto da dietro in avanti, e da basso in alto, e che dalla linea mediana in corrispondenza delle aperture nasali ossee del cranio, inclinando ad un lato, va ad aprirsi nello spiraglio posto a sinistra in avanti ed in alto. In tal modo il condotto nasale membranoso è interposto ai due serbatoi spermacetici laterali.

Da quanto è stato precedentemente esposto si può venire alla conclusione, che quella massa enorme, che si trova nel bacino fronto-mascellare, rappresenti un naso di esagerate dimensioni, il quale troverebbe un riscontro nella proboscide dell'elefante per la sua estensione, e che sarebbe modificato nella costruzione speciale dei cetacei; cioè ridotto al condotto naso-respiratorio; e le capacità aeree dei seni sarebbero rimpiazzate dalle capacità spermacetiche, ed entrambe avrebbero lo scopo di alleggerire il peso del capo in rapporto all'ambiente in cui l'animale vive. A tal proposito è importante ricordare il fatto, che si sono osservati dei capidogli in cui le cavità spermacetiche sono superiormente chiuse da una volta cartilaginea, che può divenire anche ossea con l'età; e secondo Anderson i balenieri distinguono quelli a volta *cartilaginea* e quelli a volta *ossea*, e ciò in rapporto col colore della cute, variabile anch' esso con l' età dell' animale. Se la ossificazione si estendesse anche alle trabecole, si avrebbe un sistema di cavità ossee labirintiche, che ricorderebbe quello delle cavità etmoidali con le amplificazioni e diverticoli dei seni etmoidali, frontali e mascellari ; o altrimenti i notati seni e diverticoli, mancanti nel capidoglio, sarebbero rimpiazzati dai serbatoi cetinici che ne fanno l'ufficio.

Come la proboscide dell'elefante oltre al suo ufficio di naso, ne compie molti altri a vantaggio dell'animale, così anche questo enorme naso del capidoglio (che sembrerebbe anch'esso una specie di proboscide, se non fosse aderente inferiormente alla mascella superiore, e qualora questa fosse anche molto più breve della mandibola) funziona da galleggiante, da apparato idrostatico, quasi come la vescica natatoria dei pesci. Oltre a ciò è da considerare, che se la massa oleosa fosse come contenuta in un otre sarebbe poco o niente compressibile, e le pareti di facile rottura; mentre invece la loro struttura trabecolare riunisce la massima resistenza alla massima elasticità, e ciò sia per la natura dell'adipe, specialmente allo stato liquido, sia pel modo come è distribuito in mezzo a tessuti di varia compressibilità. Per tali condizioni il grugno riesce di una formidabile potenza nel dare colpi di cozzo; come d'altra parte l'animale, percorrendo 10 chilometri all'ora ed anche di notte, con occhi la cui distanza, piccolezza e posizione laterale non permettono vedere ostacoli che s' offrano al grugno, o che visti, non avrebbe potuto schivare, sarebbe andato incontro ad urti così violenti, i quali, per la velocità acquisita e proporzionata a quella enorme massa, avrebbero prodotto un vero sconquasso, se non vi fosse quella specie di corazza o cuscino di protezione resistente ed elastico per smorzare ed attutire i colpi. Infine la presenza dello strato muscolare con robusti tendini, diretti in senso longitudinale e trasverso, fa supporre, che l'animale con la contrazione, e con la chiusura dello spiraglio e condotto nasale, possa diminuirne alquanto il volume, aumentandone il suo peso specifico nel tuffare, come col rilasciamento, e col riempimento di aria del condotto nasale, possa aumentarne il volume, e diminuirne il peso stesso quando vuole stare a galla.

Spiraglio e condotto nasale. — Lo spiraglio quantunque esterno, è stato sconosciuto per molto tempo nella sua forma e nella sua giusta posizione; poi dallo

Schwediawer, dall'Alderson prima e poi dal Beale, dal Jackson, dal Chase, è stato riconosciuto, nella forma, e nella posizione ; ma non si era dato finora nè una descrizione particolareggiata, nè una figura che ne indicasse le sue proprietà, nè il modo di comunicazione con il condotto nasale interno. Lo spiraglio del capidoglio sotto molti rispetti è veramente caratteristico in confronto degli altri cetacei soffianti. Mentre nelle balene e balenottere sono due gli spiragli di forma navicolare, simmetrici, molto ravvicinati alla linea mediana, a cui sono paralleli, e molto lontani dall'estremo anteriore del muso, nei delfini lo spiraglio è unico, parimenti distante dall'estremo del muso, ma però di forma semilunare, trasverso alla linea mediana, rivolto con la concavità della curvatura anteriormente, e comunicante con due ampî sacchi membranosi sottoposti, e questi con le due aperture nasali ossee vicinissime allo spiraglio ed agli occhi; nel capidoglio invece è pure unico, ma sinistro, superiore, anteriore, e perciò lontano molto dalle aperture nasali ossee, e dagli occhi che si trovano su quella linea.

La sua forma è stata rassomigliata a quella di un *ſ* adagiata, a curvature molto appianate (vedi fig. XIII e XXI), disposta parallelamente alla linea superiore con una estremità anteriore ed una posteriore. Quando lo spiraglio è chiuso appare in forma di una rima stretta e lunga (0,45) interposta tra due orli, che si potrebbero dire delle pinne nasali, superiore ed inferiore, le quali si corrispondono esattamente adattandosi con le loro curvature in maniera, che la pinna superiore ha la metà anteriore del suo orlo convessa e la metà posteriore concava; il contrario di quanto si osserva nella pinna inferiore a concavità in avanti e convessità in dietro; in modo da formare una specie di addentellato, utile per una forte ed ermetica chiusura. La estremità anteriore e la posteriore di ciascuna pinna presenta una forte intaccatura.

Tanto la rima dello spiraglio, che le intaccature angolari si trovano in fondo ad un solco, che risulta dalla convessità delle due pinne nasali. Nell'animale, in corrispondenza della estremità anteriore dello spiraglio, si trova sul muso, e solamente a sinistra, una forte insenatura cutanea, la quale insieme alle intaccature angolari suddette, rende possibile l' apertura dello spiraglio, cioè l'allontanamento dell' orlo superiore dall'inferiore. Per l'azione dei muscoli delle pinne, e per l'elasticità cutanea, l'apertura da lineare diventa circolare quando l'animale respira; come anche per la stessa elasticità ed alternata curvatura degli orli superiore ed inferiore, questi combaciano così esattamente e così fortemente, da fare una chiusura ermetica quando l animale si tuffa. A tale scopo concorre mirabilmente la conformazione dell'entrata nel condotto nasale, che presso lo spiraglio (vedi fig. XVI) si biforca in due tubi schiacciati, depressi, che si aprono in due narici a forma di rime lineari longitudinali, superiore ed inferiore, divise da un setto anche longitudinale a forma di mandorla, cioè biconvesso; su cui, come le due palpebre sul bulbo oculare, si adattano la pinna superiore ed inferiore dello spiraglio, in modo che quando si apre lo spiraglio si apre anche la comunicazione con le due sottoposte narici, ciascuna limitata dalla faccia convessa del setto e dalla faccia concava della pinna corrispondente dello spiraglio. Cosicchè delle due narici, che d' ordinario negli altri mammiferi si aprono a destra ed a sinistra, la destra, convergendo a sinistra, è diventata superiore, e la sinistra, conservando il suo posto, è rimasta inferiore; sotto tal rispetto della rotazione

sinistrorsa il capidoglio è quasi un rappresentante dei *pleuronectes* tra i mammiferi pisciformi. Con la indicata chiusura a zaffo dello spiraglio riesce facile l'entrata all'aria, difficile all'acqua, e la chiusura ermetica è resa semplice e solida.

Infatti quando l'animale a grandi profondità si trova sotto un'altissima pressione, le pinne nasali semprepiù si serrano contro lo spigolo del setto, il cui margine libero si adatta esattamente di contro alla rima dello spiraglio, e quanto più cresce la pressione esterna, tanto più quelle parti elastiche si accollano reciprocamente; mentre invece, se non vi fosse tale sostegno, cioè se lo spiraglio si aprisse in cavità di relativa ampiezza, l'inflettersi e l'arrovesciarsi all'interno delle pinne sarebbe inevitabile, ed il precipitarsi dell'acqua soffocherebbe l'animale. L'assicurazione dei balenieri, che il capidoglio quando tuffa si corica sempre di lato, senza precisare se ciò avvenga dal lato sinistro o indifferentemente ora dall'uno, ora dall'altro lato, comunque sia, fa supporre che questo fatto debba avere la sua spiegazione dalla posizione dello spiraglio. Tutto considerato è da ammettere che l'animale trovi necessario che la pressione dell'acqua cada perpendicolare allo spiraglio, perchè siano premute di contro al setto equabilmente le due pinne nasali, cosa che sarebbe possibile tanto se coricato sul lato destro, quanto e forse meglio sul lato sinistro, gravitando così sullo spiraglio anche col peso del proprio corpo di contro alla spinta all'insù dell'acqua; mentre al contrario tuffandosi col ventre in basso la spinta del liquido premerebbe dippiù la pinna inferiore di contro al setto e ne sarebbe favorita la chiusura; ma invece la stessa forza tenderebbe a staccare e sollevare l'orlo della pinna superiore dalla sua adesione di contro al sottoposto setto.

Dopo l'apertura dello spiraglio, che mette nelle due narici, superiore ed inferiore separate dal setto a mandorla, fissato a' suoi due estremi, anteriore e posteriore, si entra nei due tubi depressi nasali. Questi dopo di avere girato intorno al setto, in corrispondenza del margine opposto a quello libero, si riuniscono in un solo condotto, il quale percorre la spessezza del sepimento interposto tra i due serbatoi cetinici con una ampiezza di un sei centimetri e senza dilatazioni membranose laterali, come nei delfini, e con mucosa liscia e nera in gran parte della sua estensione, e con una striscia di color giallognolo, che ne percorre la lunghezza. Questo condotto nasale membranoso, che si estende dallo spiraglio alle aperture nasali ossee del cranio, è di una lunghezza considerevole, e perciò l'ho già rassomigliato ad una proboscide; da cui differisce perchè non è libero, ma aderente al cranio. Il capidoglio è l'unico cetaceo che ricorda le forme nasute, di cui esistono rappresentanti in quasi tutti gli ordini dei mammiferi (dugong, cystophora, tapirus, elephas, mygale, nasua, nasalis), le supera tutte per lunghezza e grossezza in proporzione del corpo, per cui esso più che un *macrocephalus* sarebbe un vero *macrorhinus*.

È notevole anche nel capidoglio l'asimmetria grande delle due aperture ossee, di cui la sinistra è molto più ampia, obliqua da dietro in avanti, da basso in alto, e da destra a sinistra; i condotti ossei sono molto corti e si aprono internamente di contro l'apertura della glottide che è all'estremo di un tubo conico, il quale si adatta come un cuneo alle coane, o aperture nasali posteriori, e resta strettamente abbracciato dalla muscolatura del palato molle, il quale, prolungandosi di molto indietro, impedisce ogni comunicazione con la bocca, per cui l'animale non può respirare

con questa, nè d'altra parte l'acqua entratavi con gli alimenti, può penetrare nell'apertura della glottide.

Apparato laringo-tracheo-bronchiale. — Questo apparato (vedi fig. XII), come nei cetacei in genere, è molto breve, e ciò in rapporto col brevissimo collo. La sua figura riesce molto tozza, e la sua lunghezza si può dividere in tre parti pressochè uguali, corrispondenti alla laringe, alla trachea ed ai bronchi. Il suo diametro relativamente alla lunghezza è molto grande specialmente il trasverso, essendo appiattito nel senso dorso-ventrale. Incominciando dalla laringe, questa è di un'ampiezza tale, che quasi eguaglia la sua lunghezza. Essa è composta di cinque pezzi cartilaginei, due pari e tre impari da formare due tubi concentrici, l'uno interno l'altro esterno. Il tubo interno costituisce il così detto tubo ari-epiglottico, composto dell'epiglottide in avanti e delle due cartilagini aritenoidi in dietro. L'epiglottide cartilaginea è a forma di tegola convessa in avanti, concava in dietro, alquanto larga alla sua base inferiore e ristretta all'estremità dove finisce arrotondata e sorpassa il limite delle aritenoidi. Le aritenoidi sono impiantate sulla cricoide come una penna di acciajo a punte divise nella linea mediana in tutta la loro lunghezza, ravvicinate e combacianti superiormente, separate in basso da uno spazio ovoidale, limitato lateralmente dai loro due margini interni concavi, ed occupato da un legamento membranoso interposto; i due margini esterni sono convessi verso la loro base, che si va sempre più slargando. Tra i loro margini esterni ed i margini laterali dell'epiglottide si estende un legamento membranoso, che insieme al precedente forma il tubo ari-epiglottico, il quale finisce in alto con l'apertura della glottide, di forma triangolare, con un angolo anteriore epiglottico, e due latero-posteriori ari-epiglottici. In basso questo tubo è fasciato dalla cartilagine cricoide che è di una spessezza e solidità grandissima, e che forma il punto comune di attacco ai pezzi laringei ed a quelli della serie dei tracheo-bronchiali.

La cricoide è completa e presenta il margine inferiore piano, ed il superiore tagliato a sbieco avendo la parte posteriore mediana molto alta, quasi di rinforzo alla divisione delle aritenoidi alla loro base.

Tanto l'orlo superiore che l'inferiore presenta all'esterno un ricrescimento a cercine, e vi è uno spigolo sporgente sulla linea mediana posteriore; tra il cercine superiore e l'inferiore risulta una insenatura su cui si adatta esattamente l'estremità inferiore interna della tiroide, che la circonda anteriormente e lateralmente, lasciando scoperta la sua faccia posteriore.

La tiroide, fissata nel modo suddetto alla cricoide, si estende in alto a guisa di un semiastuccio di protezione al tubo ari-epiglottico, che ricopre nella sua faccia anteriore e nelle laterali, lasciando scoperta la faccia posteriore in corrispondenza delle aritenoidi, e l'estremità conica superiore che porta l'apertura della glottide. La tiroide presenta una faccia esterna, che anteriormente è alquanto appianata, e lateralmente molto convessa; ed una faccia interna concava, molto vicina nella metà inferiore al tubo ari-epiglottico e molto distante nella metà superiore, specialmente nei lati dove corrisponde la parete membranosa di detto tubo, che può estendersi più o meno. Nella tiroide vi esiste un orlo inferiore piano come l'orlo inferiore della cricoide; ed un orlo superiore scavato nella parte anteriore e che rimontando in alto lateralmente s'incurva ad angolo per continuarsi nei due orli posteriori

convessi superiormente, ed incavati presso la cricoide, e dove infine si osserva un ricrescimento che si adatta alla insenatura di quest'ultima. Dalla conformazione delle singole parti della laringe e dal modo di connessione delle medesime riesce facile il comprendere come il tubo ari-epiglottico possa ampliarsi nelle forti inspirazioni ed espirazioni fino al punto da toccare la faccia superiore interna della tiroide, e d'altro canto come questa, compressa fortemente dalla robusta muscolatura del palato molle, vi si serri sopra, ravvicinando fra loro gli orli posteriori; e come si chiuda l'apertura triangolare della glottide addossando l'angolo anteriore epiglottico sulla sporgenza terminale delle aritenoidi, formandosi così una specie di cuneo compatto, pel ravvicinamento delle cartilagini, che è abbracciato dalla faringe, quando l'animale tuffa.

La trachea si compone di sei anelli cartilaginei completi molto ravvicinati tra loro. Tutti gli anelli ad eccezione del primo sono alquanto regolari e simili nella loro forma, presentando una maggiore altezza da un lato, che si alterna con quella minore dell'anello seguente. Nel lato più alto gli anelli sono divisi in due, per un terzo della loro estensione orizzontale, per cui si ha una maggiore elasticità senza che ne scapiti la solidità, e tale particolarità costituisce quasi una forma intermedia tra gli anelli semplici, in genere dei cetacei, e la forma spirale delle cartilagini tracheali della rhytina, e delle bronchiali del dugong.

Dopo il quarto anello si spicca il bronco accessorio destro; dopo gli altri due anelli si trova la biforcazione del bronco primario destro e del bronco sinistro; il quale dopo sette anelli dà la sua prima biforcazione. Le dimensioni, che qui sotto riferisco, serviranno a completare la cognizione dell'apparato laringo-bronchiale.

Lunghezza tiro-bronchiale (dall'orlo superiore della tiroide alla biforcazione dei bronchi primarî)	0,81
id. dalla biforcazione bronchiale primaria alla biforcazione del bronco sinistro	0,36
id. della tiroide	0,38
id. del tratto crico-epiglottico	0,50
Circonferenza della laringe	0,86
id. del tubo ari-epiglottico	0,58
id. della trachea	0,60
id. del bronco sinistro	0,41
id. del bronco destro accessorio	0,25

Voce. — Il fatto, che il capidoglio di Porto S. Giorgio aveva emesso durante la notte alcuni muggiti, richiamò la mia attenzione, essendo in genere ammesso che i cetacei siano muti. Non essendo possibile per le condizioni del pezzo disseccato, osservare direttamente se vi siano o no le corde vocali, io credo utile in proposito di riferire alcuni fatti raccolti da osservatori degni di fede, i quali avendo avuto favorevoli occasioni di osservare cetacei viventi, sono in grado di offrire utili schiarimenti sulla quistione.

Si è osservato che i delfini arenati ed ancora viventi emettevano gridi da alcuni rassomigliati a gemiti strappati dal dolore, e da altri ad un leggiero muggito. Il D'Orbigny cita un fatto di muggiti spaventevoli, come quelli di centinaia di buoi muggenti tutti in una volta, e dovuti a centinaia di delfini del genere *Phocaena*,

arenati ad Aiguillon, borgo presso le coste della Vandea. Lemaoût parla di un arenamento di 7 maschi, 51 femmine e 12 ancora poppanti di *Globicephalus*, che emettevano dei muggiti dolorosi, producendo negli spettatori un sentimento particolare misto di tenerezza e di spavento.

Il Laurillard parla di *Globicephalus* arenati, che emettevano una specie di sospiro profondo e doloroso. I balenieri anche a distanza, dal soffio rumoroso del respiro del capidoglio, distinguono questo dalla balena. Anderson riferisce, da comunicazione fatta da un capitano baleniere, che un capidoglio, spaventato dalla vista del suo bastimento, aveva fatto prendere la fuga ad una schiera che esso precedeva, emettendo un grido per avvertirla del pericolo; grido rimbombante come suono di campane, e così violento che il bastimento ne aveva tremato durante qualche tempo. Anche i capidogli di Audierne, secondo attesta il Lecoz, emettevano dei lunghi muggiti.

Più di una volta le balenottere hanno spaventato coi loro muggiti quelli, che si sono trovati presenti nel momento in cui il mare le abbandonava sulla spiaggia. Pare che la balena franca sia muta, e come attesta lo Scoresby, che vide prenderne più di 300, essa non ha mai emesso alcun grido e secondo lui neppure ne ha la possibilità, ad onta che la laringe della stessa rassomigli a quella di altri cetacei di cui si sono intesi gridi più o meno forti.

Infine per i fatti sopra detti, anche quando siano esagerati, come quello riferito dall'Anderson, si deve ammettere nei cetacei, per la conformazione della loro laringe, la possibilità di emettere dei gridi, che possono servire ad essi come un mezzo di comunicazione. La mancanza di corde vocali ammessa nei cetacei, o dovrebbe meglio accertarsi, o potrebbe darsi che fosse sostituita da altri mezzi vibranti, come per esempio dalla formazione, per corrugamento, di pliche mucose del tubo ari-epiglottico; ovvero dalla forma a linguetta delle due aritenoidi, che potrebbero entrare in vibrazione sotto l' azione dell' aria soffiata da così enormi mantici polmonali; od infine dalla forma e costruzione del tubo ari-epiglottico, risultante di parti cartilaginee e membranose, che avendo diversa tensione, possono modificare la forma e l' ampiezza dell' apertura della glottide.

Dura madre encefalica.

Il cervello del capidoglio come anche quello delle balene non è stato studiato, e tutto ciò che nei cetacei è conosciuto, sopra questo argomento, riguarda i delfini. Veramente molte difficoltà si oppongono a questo studio nei grandi cetacei; in prima perchè questi animali capitano di rado in condizioni di freschezza, in secondo luogo perchè per estrarre il cervello è d' uopo aprire il cranio, e ciò non si fa per non togliere importanza allo scheletro, ed anche perchè vi sarebbe bisogno di speciali congegni e strumenti preparati opportunamente allo scopo e, trascurando e disfacendo altri organi, bisognerebbe andare direttamente al cervello prima che si fosse alterato per putrefazione. Infine per potere riuscire nello intento sarebbe necessario di fare tutto il lavoro in un giorno, al più in due, e tutto ciò, per molte ragioni, è difficilissimo, se non impossibile. Nel caso nostro, avendo dovuto raccogliere ed isolare tutti gli organi delle cavità, toracica ed addominale, vi s' impiegarono, come

ho già detto, dieci giorni con l'aiuto di una ventina di operai, che lavoravano indefessamente dalle ore 6 del mattino, alle 6 della sera, e quando si giunse a disarticolare il cranio, e rimuoverlo dalla sua posizione, il cervello era naturalmente ridotto allo stato di poltiglia. Allora mi venne la idea di staccare la dura madre, la sola parte rimasta inalterata nel disfacimento. Intromisi la mano pel forame occipitale guidato dal solo tatto, nulla potendo vedere; e riuscii, dopo un lavoro lungo e difficile, a potere isolare tutta la dura madre del cervelletto e soltanto la parete superiore cerebrale della stessa, non essendo stato possibile distaccarla per intero, atteso le numerose e fortissime aderenze alla base del cranio; così pure potetti seguire le guaine dei nervi encefalici posteriori.

Il preparato ottenuto, ritratto dalla figura XVII, permette di vedere i principali rapporti e le relative proporzioni delle parti più importanti dell'encefalo, e mostra parecchi caratteri distintivi rispetto a ciò che è conosciuto nei delfini.

In prima è da notare nel capidoglio rispetto al delfino la mancanza del tentorio ossificato; oltre a ciò in quest'ultimo il cervelletto è in gran parte coperto dai lobi cerebrali posteriori, mentre nel primo invece il cervello è del tutto al davanti del cervelletto. Questa speciale condizione di cose porta seco una notevole diminuzione del volume del cervello, il quale invece di essere di forma globosa, come nel delfino, per modo che i diametri, verticale, trasverso ed antero-posteriore quasi si eguagliano; resta nel capidoglio invece di molto diminuito il suo diametro verticale, e la sua superficie superiore si trova quasi allo stesso piano della superficie superiore del cervelletto. La lunghezza del cervello resta anche diminuita nella linea mediana in quanto che i due lobi posteriori si allontanano fra di loro, ed in quella specie di biforcazione che ne risulta, si adatta il margine antero-laterale del cervelletto. Per tale modificazione i lobi posteriori non sono arrotondati, ma falcati ed appuntati posteriormente, e ciò concorre anche a diminuire il volume degli emisferi, i quali per la loro piccolezza pressochè uguagliano quello del cervelletto, o altrimenti il cervelletto è molto sviluppato e quasi eguaglia gli emisferi. Da ciò ne segue che gli emisferi, che sarebbero stati enormi se avessero conservato la forma tipica del delfino, sono di una grandezza, che per molte ragioni sarei per ritenere, che non superi quella degli emisferi di un grande delfino.

Dall'assieme dei caratteri, e delle proporzioni delle masse encefaliche, pare che il grande sviluppo del cervelletto, l'organo coordinatore dei movimenti di traslocazione, sia in diretto rapporto con l'enorme sviluppo delle masse muscolari, e mentre è elevata a così alto grado la potenza muscolare, le masse cerebrali, sede della potenza intellettiva, sono state relativamente ridotte nelle loro dimensioni. Se a tanta potenza muscolare si fosse associata una proporzionata intelligenza, questi colossali organismi avrebbero turbata quella regolare armonia biologica nella lotta per l'esistenza.

Ed a tal proposito, parlando di balene, con l'usato acume il nostro Alighieri chiamò la Natura *giusta* e *discreta*.

« Chè, dove l'argomento della mente
« S'aggiugne al mal volere ed alla possa
« Nessun riparo vi può far la gente. »

Misure della dura madre.

del cervelletto		del cervello	
lunghezza	m. 0,13	lunghezza nel mezzo .	m. 0,11
larghezza	» 0,17	larghezza massima . .	» 0,22
altezza	» 0,09	altezza	» 0,10

Distanza delle guaine dei nervi encefalici posteriori	pajo IX. X. XI.	m. 0,16
	» XII.	» 0,10

Organi uro-genitali.

La grande quantità di adipe enfisemato, e lo spostamento avvenuto negli organi dall'asportazione frettolosa dell'intestino, fatta prima del mio arrivo per impedire la putrefazione, fecero smarrire i reni, gli ureteri, ed i deferenti, e solo fu possibile di raccogliere e conservare la *vescica*, il *testicolo* ed il *pene*; che perciò essi soli sono descritti, e figurati nella tav. VII.

Vescica. — Quest'organo ha la forma che generalmente si osserva anche nei delfini; il suo diametro longitudinale (0,88) supera di molto il trasverso (0,30) per cui la sua forma è di un ovoide allungato col polo maggiore verso l'apertura del collo, e col minore in alto dove finisce appuntato; però la cavità interna si arresta verso la base di quella parte appuntata, che non è cava, ma solida come un grosso cordone che rappresenta l'uraco. La sua massima circonferenza misura (0,86). Le sue pareti muscolose sono molto resistenti, come quelle di un otre, alla cui capacità si avvicina e di cui, con una concia, potrebbe sostituirne l'uso, come serbatoio di liquidi.

Il suo volume è, relativamente alla grandezza dell'animale, come si osserva anche nei delfini, piccolo, rispetto alle proporzioni di altri mammiferi. L'apertura del collo, è quasi all'estremità del polo grosso, è ristretta; nè si può dire quale era la lunghezza del collo stesso. Gli ureteri vi arrivano posteriormente e presso la detta apertura.

Testicoli. — Questi organi sono relativamente piccoli, misurano nella loro maggiore lunghezza 0,25; essi (fig. XIX) sono di forma ovoidale, molto appiattita, per adattarsi alla posizione, che hanno nell'interno dell'addome.

Pene. — Quest' organo, come si vede nella fig. I, sull'animale, e nella fig. XX, isolato, è nella sua parte esterna di forma conica, affilato in punta all'estremo libero, e con larga base d'inserzione là dove il prepuzio si continua con la pelle circostante. Da questo punto all'apice dell'organo, nel pezzo allo stato fresco, non vi era alcun restringimento, e la forma conica si conservava molto regolare in tutto quel tratto, ma invece dopo il disseccamento, pel processo di conservazione adoperato, vi è stata diminuzione nella sua lunghezza e nel suo diametro, e per la forte distensione fatta sul prepuzio, questa parte si è ristretta di meno, rispetto al glande; perciò nella fig. XX (*b*) si nota un restringimento, che segna il limite tra le due parti le quali per lunghezza quasi si eguagliano. Questo punto serve anche ad indicare l'inserzione dei *muscoli retrattori del pene* (*mm*), che s'interpongono tra il prepuzio ed i corpi cavernosi (*cc*), i quali in avanti sono in continuazione della base del glande, e posteriormente, slargandosi, si biforcano lateralmente (*ii*) per prendere attacco alle due

ossa pelviche corrispondenti. Sull'angolo di biforcazione dei corpi cavernosi si vede l'apertura (*u'*) che mette nell'uretra, la quale corre sotto l'asse dell'organo, e restringendosi gradatamente va a finire all'estremo libero nell'orifizio (*u*). Tutto lo spazio interposto tra i corpi cavernosi ed il prepuzio era riempito da lasco tessuto connettivo in cui decorrevano molti vasi e nervi.

Come si vede dalla figura i corpi cavernosi presso la loro inserzione, sono fortemente slargati e poi prendono una forma cilindrica; nel pezzo secco si notano nella linea mediana, un solco anteriore ed uno posteriore, ma ciò è prodotto dal disseccamento, e ricorda la divisione in due dei corpi cavernosi di altri mammiferi, ma che qui, come nei delfini, non esiste; neppure vi è alcun indizio dell'osso del pene che si osserva in molti mammiferi, e che manca anche nel delfino.

Il glande dalla sua base in avanti, per due terzi della sua lunghezza, è appiattito, per cui il suo diametro trasverso (0,16) supera l'antero-posteriore (0,12), ed il contrario si osserva nell'ultimo terzo specialmente verso l'apice che è compresso nel senso laterale, cosicchè il diametro trasverso (0,03) è minore dell'antero-posteriore (0,04).

Il glande ed il prepuzio erano rivestiti da una mucosa nera e molto levigata. Ad onta del grosso diametro dell'organo, pure per la sua grande mollezza ed elasticità era molto flessibile, e perciò l'animale contraendo i suoi lunghissimi e robusti muscoli retrattori poteva, ripiegandolo a doppio gomito, cioè ad S, ritirarlo completamente all'interno, dove ordinariamente si trova.

Nello stato fresco, la lunghezza totale dell'organo era di metri 2,65, e nello stato del preparato a secco è diminuita (specialmente nella parte terminale affilata) di 33 centimetri e perciò è ridotta a 2,32, e secondo questa condizione si riferiscono le seguenti misure delle sue parti.

Lunghezza del glande	0,76
id. del prepuzio	0,56
id. dei corpi cavernosi, in dietro della base del prepuzio	1,00
Circonferenza del glande all'apice	0,07
id. id. nel mezzo	0,43
id. id. alla base	0,52
id. del prepuzio, anteriormente	0,79
id. id. posteriormente	0,85
id. dei corpi cavernosi	0,30
id. degli stessi presso l'inserzione	0,47
Diametro uretrale all'apice	0,02
id. alla base	0,03

Comparazione tra il capidoglio ed il delfino.

Dopo uno studio così esteso intorno al capidoglio mi è possibile riassumere da quanto è stato precedentemente detto i caratteri più spiccati e farne la comparazione con quelli del delfino comune, *Delphinus delphis*, acciò meglio risaltino le somiglianze e le differenze esistenti fra loro, e dal grado di loro organizzazione più o meno elevata si possa determinare il loro posto relativo nella serie dei cetacei.

La forma esterna del corpo del capidoglio all'indietro delle pinne toraciche si rassomiglia al delfino, ma al davanti di esse presenta grande differenza nella parte corrispondente alla testa. La forma generale del delfino è fusiforme col massimo diametro verso la metà del corpo, cioè al davanti della pinna dorsale; la metà posteriore decresce uniformemente e finisce assottigliata presso la inserzione della pinna codale, la metà anteriore decresce insensibilmente e solo al davanti dello spiraglio si assottiglia bruscamente in modo da far distinguere una fronte da un muso appuntato, depresso. Questo muso in alcune forme di delfini può essere lunghissimo, e può anche raccorciarsi in altre e mancare affatto, ed allora la testa finisce tronca o arrotondata come nei *Globicephalus, Beluga, Monodon.* Questo è il caso anche del capidoglio, nel quale il capo finisce anteriormente tronco con diminuzione del suo diametro soltanto lateralmente, mentre le linee di contorno dorsale e ventrale si mantengono quasi parallele. Queste particolarità danno al corpo del capidoglio una conformazione molto tozza, rappresentando la sua testa un terzo della sua lunghezza, e quasi la metà del suo volume; mentre nella forma svelta del delfino la testa rappresenta circa un quinto della lunghezza totale. Alla configurazione esterna del corpo prendono parte le pinne nella loro forma e posizione. Nel delfino le pinne sono strette, lunghe, aguzze, falcate col margine convesso anteriore, e col concavo posteriore, e tutte foggiate sullo stesso tipo; nel capidoglio invece sono differenti tra loro ed anche rispetto alle corrispondenti del delfino. Infatti le toraciche sono tozze, smusse, poco incurvate; la dorsale corta col margine anteriore e posteriore rettilineo con intaccature cutanee all'indietro; la pinna codale con i due suoi lobi triangolari con margini anteriori dritti, e posteriori convessi, ed in proporzione molto sviluppata in compenso della piccolezza delle altre.

Considerando la loro posizione relativa le pinne pettorali del delfino sono più presso l'estremo anteriore, più in basso, dirette orizzontalmente con le punte in dietro; nel capidoglio sono più lontane dall'estremo anteriore, più laterali, e con l'estremità diretta in dietro ed in alto. La pinna superiore nel capidoglio più che dorsale è precodale trovandosi nel principio del terzo posteriore, e non quasi nel mezzo come nel delfino.

L'occhio del capidoglio è piccolissimo, in proporzione della grandezza del corpo, e specialmente in rapporto di quell'enorme naso, esso è quasi equidistante dall'angolo labiale e dal punto d'inserzione della pinna laterale; nel delfino è relativamente grande, presso l'angolo labiale e lontano dalla origine della pinna. La pupilla nel delfino è cordiforme; nel capidoglio allungata orizzontalmente.

Una delle parti molto caratteristiche per la sua forma, posizione, e pei suoi rapporti è lo spiraglio. Nel delfino è posto nello stesso piano trasverso delle aperture nasali ossee e degli occhi; nel capidoglio invece è lontanissimo, perchè all'estremo dell'enorme naso; nel delfino è sulla linea mediana frontale, trasverso, con una pinna anteriore come una valvola di chiusura, ed un'altra posteriore semilunare con le punte rivolte in avanti; nel capidoglio è asimmetrico perchè a sinistra, ma presso l'estremità anteriore e presso la linea mediana dorsale a forma di ʃ adagiata, cioè con un estremo anteriore ed un altro posteriore, con una pinna superiore, ed una inferiore. Nel delfino tra le aperture nasali ossee, interne ed inferiori, e lo spiraglio esterno e

superiore, vi sono interposti due sacchi membranosi, che si estendono da un lato e dall'altro, e sono al davanti della fronte ossea; detti sacchi hanno un rivestimento interno nero, che è una introflessione dello strato epidermico esterno. Nel capidoglio invece, essendo grandissimo lo spazio interposto fra le aperture nasali ossee e lo spiraglio, si trovano, lateralmente al lungo condotto nasale, i due serbatoi spermacetici i quali, quantunque contigui, non sono in comunicazione col condotto nasale, e così in luogo dell'aria vi è la materia spermacetica, che per la sua leggerezza poteva sostituirla per diminuire l'enorme peso. Sotto questo punto di vista appare la comunanza di ufficio dei sacchi membranosi e dei serbatoi spermacetici. Nel caso dei delfini la testa, essendo relativamente piccola, può trovar vantaggio sufficiente nei due sacchi membranosi nei quali si può accogliere ora aria ora acqua, diminuendo o aumentando il peso a piacere e secondo i bisogni dell'animale; mentre al contrario nel capidoglio, trattandosi di masse così enormi, vi è stato bisogno della sostituzione dello spermaceti per conciliare la leggerezza con la solidità; ed entrambe queste condizioni sarebbero da considerare come sostituzione dei seni ossei labirintici comunicanti sempre con le cavità nasali nei mammiferi aerei.

La differente ampiezza dei sacchi membranosi, rispetto ai serbatoi spermacetici, porta seco un differente sviluppo, ed una modificazione più o meno profonda nella regione fronto-mascellare. Nel delfino, in cui i sacchi membranosi sono relativamente poco estesi, vi esiste una lieve depressione in corrispondenza delle aperture nasali ossee; nel capidoglio invece, in cui i serbatoi spermacetici occupano una grandissima estensione, la parte corrispondente del cranio si conforma in una specie di bacino fronto-mascellare, da raffigurare una sessola con la parte mascellare foggiata a doccia, e con la parte frontale, escavata nel senso verticale a semicircolo, da ricordare la forma di una biga.

Oltre a ciò sono di grande importanza i caratteri forniti dalle mascelle e dai denti; e quando sono ben rilevati e precisati riescono di grande vantaggio per stabilire una spiccata differenza tra il capidoglio ed il delfino. Ad onta che il muso superi di molto la lunghezza della mandibola nel capidoglio, pure la lunghezza dei mascellari ed intermascellari, in complesso è, come nel delfino, alquanto minore della mandibola; al contrario la differenza di larghezza tra la mandibola e la volta palatina è notevolissima nei due generi. Infatti la mandibola del delfino eguaglia, anzi leggermente supera la mascella superiore; nel mentre che grandissima è la sproporzione, nel capidoglio, tra la mandibola assottigliata a rostro, e la mascella larghissima, la cui volta palatina è fortemente convessa in contrapposto dell'escavazione superiore. Nè minore differenza esiste tra le due forme di mandibole confrontate tra di loro, in quanto che nel delfino la sinfisi mascellare, come nella maggior parte dei mammiferi a muso lungo e stretto, è limitata soltanto alla estremità anteriore, e dopo breve tratto le due branche mascellari, destra e sinistra, si allontanano, e seguendo sempre divergenti, lasciano quel lungo spazio interposto in cui si alloga la lingua; nel capidoglio invece la sinfisi mascellare oltrepassa la metà anteriore della lunghezza totale della mandibola, ed offre sostegno a più dei due terzi del numero totale dei denti più grossi, e dopo le due branche fortemente divergono, e nel breve spazio interposto si alloga la lingua.

Dalla differente estensione degli spazî intermascellari nelle due forme di mandibole, ne viene di conseguenza la differenza di dimensioni e di forma nelle due lingue; infatti nel delfino è lunga, stretta, a margini convergenti in avanti, e poco alta; nel capidoglio è breve, larga, altissima, a margini paralleli ed infine è caratteristica per la presenza di un *capezzolo linguale* terminale, che manca non solo nel delfino, ma in tutti gli altri mammiferi. Entrambe le mascelle nel delfino hanno denti simili, allogati in solchi dentarî i quali, in corrispondenza di ciascun dente, si approfondano in una specie di alveolo; le serie dei denti superiori ed inferiori sono convergenti in avanti, essi tra loro si alternano addentellandosi gli uni con gli altri. Tutti i denti sono simili e solo vi è differenza, essendo gli anteriori e posteriori più piccoli rispetto agli intermedî; sono allungati pressochè fusiformi, appuntati, ed incurvati agli estremi, col foro dentale ristretto. Nel capidoglio invece i denti normali si trovano solo nella mandibola; anch'essi, meno la differenza di grandezza, essendo qui pure gli anteriori ed i posteriori più piccoli, sono simili tra loro, e sono corti, conici, con la base in basso, dove esiste una profonda cavità anch'essa conica, la cui base è ampia quanto la circonferenza della base del dente; questi denti nella prima età nei due sessi, e nelle femmine durante tutta la vita, sono aguzzi e molto incurvati; nei maschi adulti sono arrotondati in cima, e perciò meno curvi. Le due serie dentali sono vicinissime al punto, che lo spazio interposto ad esse eguaglia ad un dipresso quello fra due denti vicini dello stesso lato, ed inoltre sono anche parallele tra loro per tutta la estensione della sinfisi, all'indietro della quale sono divergenti per la ragione dell'allontanamento della parte posteriore delle due branche della mandibola.

Molto differenti e veramente eccezionali sono i denti della mascella superiore del capidoglio, e ciò perchè normalmente sono decidui, eccezionalmente persistenti; quelli che restano, variabili per numero, sono rudimentali, cioè arrestati a quel punto di sviluppo in cui si trovavano quando, insieme agli altri, avrebbero dovuto cadere, e si allogano soltanto nelle fosse gengivali mucose, mancando il solco alveolare superiore, e questa sarà forse la ragione dell'essere decidui. Le fosse gengivali siano vuote, o conservino ancora qualche dente rudimentale vacillante, possono sempre ricevere, come in un astuccio, i denti della mandibola, e ciò perchè questi non sono posti alterni alle fosse gengivali, ma nella stessa loro direzione.

Infine è da considerare, che se variabile è il carattere dei denti della mascella superiore del capidoglio, nel senso che essi sono o tutti caduti, o tutti persistenti, o solo in parte, è certo però che questi sono molto rudimentali rispetto a' denti inferiori. Oltre a ciò il carattere, il quale non è stato preso in considerazione sotto questo punto di vista, e che a me pare molto importante, per una distinzione decisiva tra il capidoglio ed il delfino, è la mancanza di solco alveolare nella mascella superiore. Tale carattere adunque, non solo può stabilire una differenza tra capidoglio e delfino, i quali essendo entrambi del gruppo degli *odontoceti* hanno molti altri caratteri comuni; ma può anche servire ad una connessione fra gli *odontoceti* ed i *misticeti*; i quali, differenti sotto molti rapporti, hanno però comune col capidoglio la mancanza di solco alveolare nella mascella superiore la cui mucosa porta i *fanoni*, ed i denti decidui in questo; cosicchè il capidoglio rappresenterebbe, per la sua conformazione mascellare priva di alveoli, una forma di transizione, intermedia tra le balene ed i delfini.

All'infuori dei citati caratteri ve ne sarebbero molti altri più minuti negli organi interni, ma li trasando per non dilungarmi di molto e mi restringo ad alcuni più importanti. Nel capidoglio in tutto l'arco dell'arteria aorta si trova una dilatazione, ed un'altra nell'origine dell'arteria polmonale fino al punto dove sorge il condotto di Botallo, comunicante per tutta la vita fra le due arterie; nel delfino mancano queste dilatazioni arteriose, e il condotto di Botallo nell'adulto non è comunicante.

Il volume dell'encefalo rispetto a quello del corpo nel capidoglio è piccolissimo, molto grande nel delfino; il cervelletto piccolo rispetto agli emisferi nel delfino, li eguaglia quasi in volume nel capidoglio; in quello pressochè tutto coperto dai lobi posteriori cerebrali, in questo totalmente scoperto, ed i lobi posteriori, conformati a semiluna, circondano in avanti e lateralmente il cervelletto; questo essendo scoperto ha il tentorio membranoso, il delfino invece ha il tentorio osseo, che impedisce la compressione dei grandi lobi posteriori cerebrali sul cervelletto.

In ultimo se da una parte vi è rassomiglianza dei capidogli alle balenottere ed alle balene per le loro colossali dimensioni, d'altra parte pel genere di vita, per gli svariati movimenti, e per le loro abitudini, essi si avvicinano più a' delfini. Anche il vivere in frotte di parecchie centinaia è comune ad entrambi; e se tanto interesse desta nei marini l'incontrarsi anche in piccole frotte di vivaci ed intelligenti delfini, quale non dovrà essere lo stupore e l'ammirazione dinnanzi allo spettacolo di uno dei più grandiosi fenomeni biologici, cioè lo sfilare di una ordinata schiera di cinque a seicento capidogli, eseguenti nel loro corso i medesimi ed uniformi movimenti, con getti di acqua contemporanei? È proprio il caso di esclamare con Cristoforo Colombo: « Non basta la penna per scrivere, nè la lingua per dire tutte le meraviglie del mare ».

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE.

Tavola I.

Fig. I. Figura intera dell'animale in riva al mare, tolta da una fotografia e raddoppiata nelle dimensioni, chiarita col rendere più manifesti alcuni particolari poco discernibili nella fotografia. L'animale è adagiato sul suo fianco destro sopra sbarre di legno, si vede specialmente la forma e le dimensioni lunghe e sottili della mascella inferiore rispetto all'enorme massa, che rappresenta la parte in corrispondenza della mascella superiore, in cui si osserva il contorno labiale, la forma della bocca e la mancanza dei denti, in luogo dei quali si vedono le fosse gengivali che accolgono i denti della mascella inferiore nella chiusura completa della bocca. Più indietro si vedono le due pinne nella loro forma, relativa piccolezza, reciproca distanza tra loro, la loro lontananza dall' estremità anteriore del muso, e la loro posizione infero-laterale. In dietro delle pinne si osserva il pene, nella sua parte inferiore corrispondente al glande appuntato, e nella base al prepuzio. In dietro di quest'organo si vede una lunga fenditura lineare sulla linea mediana del corpo, che è l'apertura anale. Il corpo continua a decrescere fino alla parte la più ristretta dove comincia la pinna codale, il cui lobo disteso in alto rappresenta il sinistro, ed il lobo poggiato sull'arena rappresenta il destro, e tra essi due si vede la leggiera intaccatura di divisione.

Tavola II.

Fig. II. Cuore destro e propriamente l'auricola e l'apparato valvolare atrio-ventricolare, aperto in corrispondenza del setto mediano. Nell'auricola è da osservare la sua forma, le sue dimensioni, i suoi diametri, antero-posteriore, verticale e trasverso, che appare nello sfondo della figura. Dell'auricola la parte anteriore (a sinistra nella figura) mostra la parete esterna muscolo-membranosa, e la parte posteriore (a destra nella figura) mostra la parete muscolo-trabecolare colle sue trabecole di tre ordini, cioè la primaria, le secondarie e le terziarie; tra le due pareti vi ha lo spazio interparietale, il quale è diviso dalle trabecole secondarie in loculi, e dalle trabecole terziarie in lacune o spazî interparietali. Oltre a ciò nella superficie esterna dell'auricola sono da notare le insenature prodotte dal contatto dell'arteria aorta e della vena cava superiore.

z. zona fibrosa, limite inferiore dell'auricola,
a. estremità anteriore o apice auricolare,
p. estremità posteriore,
s. estremità superiore,
ap. diametro antero-posteriore,
zs. diametro verticale,
c. collo auricolo-ventricolare,
c'. collo seno-auricolare in continuazione col precedente, e che separa l'auricola dal seno, come la zona separa l'auricola dal ventricolo,
i. insenatura in rapporto dell'arteria aorta,
i'. insenatura in rapporto della vena cava superiore,
lb. porzione del lobo interposto tra le due indicate insenature,
m. parete esterna, muscolo-membranosa,
l. fondo del loculo sulla parete muscolo-membranosa.

La parete muscolo-trabecolare è rappresentata dall'assieme delle seguenti trabecole:

f. fascia trabecolare, o trabecola primaria, sulla cui lamina si notano parecchi fori circolari,
f'. sezione della medesima in corrispondenza del collo seno-auricolare,
1.2.3. trabecole secondarie posteriori,
4. trabecola secondaria anteriore, verticale,
t. trabecole terziarie, o interparietali,
si. spazî interparietali.

L'apparato valvolare atrio-ventricolare (in continuazione con la zona fibrosa solamente per mezzo del secondo lembo e del secondo spazio intercuspidale che servono di sostegno a tutto il rimanente) rappresenta nella figura le seguenti parti, cioè: i tre lembi valvolari, i tre spazî intercuspidali, i tre archi dentati, i tre ventagli tendinei coi sei tendini angolari ed i sei laminari massimi, ed i tre pilastri.

Avendo dato alle parti gli stessi numeri, e per le ragioni dette a pag. (188-189), ad evitare confusione nel riscontro delle stesse parti sulla figura, ho adottati i numeri *romani* grandi e piccoli per

distinguere i lembi dalle parti che occupano gli spazî intercuspidali; parimenti ho adoperati i numeri *arabi* di diversa grandezza, per indicare, coi grandi i tendini laminari massimi, coi piccoli i tendini angolari.

I. primo lembo valvolare, o lembo settale, o lembo interno;

II. secondo lembo valvolare, o lembo parietale esterno, o esterno;

III. terzo lembo valvolare, o lembo parietale posteriore, o posteriore;

ma. margine aderente dei tre lembi in continuazione della zona fibrosa, o il loro margine superiore,

ml. margine libero dei tre lembi, o il loro margine inferiore,

md. margine dentato dei medesimi, o arco dentato intercuspidale, che si estende dall'angolo fatto dal margine libero e dal dentato di un lembo, a quello di un altro;

I. primo pilastro, o anteriore, cioè quello interposto tra il primo ed il secondo lembo;

II. secondo pilastro, o esterno, cioè quello interposto tra il secondo e terzo lembo;

III. terzo pilastro, o posteriore, cioè quello interposto tra il terzo ed il primo lembo.

Gli stessi numeri sono usati anche per indicare i tre ventagli tendinei, ed i tre archi dentati corrispondenti.

1.2.3.4.5.6. tendini laminari massimi; si noti che la numerazione comincia dal margine dentato anteriore del lembo interno, o settale, e finisce al margine dentato posteriore dello stesso lembo,

z'. zona muscolare triangolare,

1.2.3.4.5.6. tendini angolari, sugli angoli di ciascun lembo, formati dal margine libero e dentato dei medesimi; anche qui la numerazione procede allo stesso modo come nel caso precedente,

ps. parete settale del ventricolo.

Tavola III.

Fig. III. Auricola sinistra vista dalla sua faccia trabecolare. Questa auricola, non essendo in continuazione con l'apparato valvolare atrio-ventricolare del cuore sinistro, come nella precedente figura, è stata disegnata in condizioni più favorevoli per mostrare con maggiore chiarezza la parete muscolo-membranosa esterna, e la parete muscolo-trabecolare interna, fatta dalla fascia trabecolare primaria, e dalle trabecole secondarie che se ne dipartono; come anche sono qui apparenti i loculi interposti tra le trabecole secondarie, le pareti interne, ed esterne. La stessa apertura, che da una parte si continuava col collo auricolo-ventricolare, e dall'altra col collo seno-auricolare, si mostra più regolare.

Lo stesso contorno dell'auricola mostra spiccatamente tutte le particolarità proprie dei suoi margini specialmente del margine lobulato.

p. lato posteriore o aortico,

s. lato superiore o polmonale,

i. lato inferiore,

a. angolo anteriore o apice auricolare,

ps. angolo posteriore superiore,

pi. angolo posteriore inferiore;

1.2. lobi grandi, o anteriori, del margine inferiore,

3.4.6.8.10. lobi medî dello stesso,

5.7.9. lobi piccoli interposti a' medî;

m. superficie esterna della parete muscolo-membranosa, di cui la superficie interna appare nel fondo dei loculi,

c. collo auricolo-ventricolare,

c'. collo seno-auricolare

f. fascia trabecolare, o trabecola primaria rettangolare, in cui si notano quattro orifizî rotondi in avanti, ed uno ovoidale in dietro; dei lati di essa fascia l'uno, verso il margine superiore, è in continuazione col seno, e gli altri formano i margini posteriore, inferiore ed anteriore, da cui si partono le trabecole secondarie;

1. trabecola posteriore superiore,
2. » posteriore media,
3. » posteriore inferiore;
4. » anteriore inferiore,
5. » anteriore media,
6. » anteriore superiore,

t. » terziaria;

l^1 loculo posteriore superiore,

l^2 » posteriore medio,

l^3 » posteriore inferiore;

l^4 » anteriore inferiore,

l^5 » anteriore medio,

l^6 » anteriore superiore.

Fig. IV. Rappresenta l'apparato valvolare atrio-ventricolare sinistro, isolato dai suoi rapporti con la zona fibrosa, e con l'auricola. La valvola sinistra non ha la sola importanza di dimostrare questo apparato nel cuore del capidoglio, ma anche quella di mettere in evidenza la presenza di un terzo lembo rudimentale posteriore, che ristabilisce il tipo ternario in questa valvola, conformemente alla valvola destra, ed alle valvole sigmoidee. Per mettere ad evidenza il tipo ternario della valvola sinistra, è stato necessario di fare una figura speciale (fig. V), che mostra le particolarità del terzo lembo, ed i suoi rapporti con gli altri due lembi grandi. Per queste stesse ragioni, essendovi una esatta corrispondenza di numero e rapporto di parti, tra l'apparato atrio-ventricolare sinistro ed il destro, è chiaro che qui è applicabile tutto ciò che si è detto, nell'apparato atrio-ventricolare destro, riguardo alla numerazione ed al rapporto delle sue diverse parti componenti.

I. primo lembo valvolare, o lembo settale, o lembo interno;
II. secondo lembo valvolare, o lembo parietale esterno, o esterno;
III. terzo lembo valvolare rudimentale, o lembo parietale posteriore, o posteriore;
ma. margine aderente dei tre lembi che era in continuazione della zona fibrosa (*z*),
ml. margini liberi dei medesimi, o i loro margini inferiori,
md. margine dentato dei medesimi, o arco dentato intercuspidale, che si estende dall'angolo fatto dai margini, libero e dentato, di un lembo, a quello di un altro;
I. primo pilastro, o anteriore, cioè quello interposto tra il primo ed il secondo lembo;
II. secondo pilastro, o esterno, cioè quello interposto tra il secondo ed il terzo lembo rudimentale;
III. terzo pilastro, o posteriore, cioè quello interposto tra il terzo lembo posteriore rudimentale ed il primo.

Gli stessi numeri sono usati anche per indicare i tre ventagli tendinei ed i tre archi dentati corrispondenti.

1.2.3.4.5.6. tendini laminari massimi;
1.2.3.4.5.6. tendini angolari;
z' zona muscolare semilunare.

Fig. V. Rappresenta il terzo lembo rudimentale in rapporto col primo e col secondo lembo, dai quali è separato per gli archi dentati interposti. Detta figura mostra il preparato alquanto spiegato per mettere in maggior rilievo tutti i suoi minuti particolari.

III. terzo lembo rudimentale interposto tra il II ed il III pilastro muscolare, e tra i due archi dentati corrispondenti, cioè il secondo ed il terzo;
ma. suo margine aderente,
ml. suo margine libero,
md. suoi margini dentati.
4.5. i suoi due tendini laminari massimi;
4.5. i suoi due tendini angolari; il 4 comune col 3 del secondo lembo, ed il 5 proprio, ma esilissimo che, meno per la sua importanza fisiologica, ha valore principalmente come rappresentante morfologico degli altri tendini angolari, che ordinariamente lo superano di molto nelle loro dimensioni; ma tutti però sorgono dalla base dei pilastri.

Le altre lettere e numeri non ricordati sono come nella spiegazione della figura precedente.

Tavola IV.

Le figure. VI. VII. VIII. rappresentano lo stesso preparato dei tronchi aortico-polmonale, visto da tre punti diversi, cioè superiore, posteriore, ed antero-inferiore, da cui si rileva, primo, la dilatazione dei due suddetti tronchi in corrispondenza della loro origine, secondo, la persistente comunicazione fra di essi per mezzo del condotto di Botallo, terzo, le forti curvature di adattamento, risultanti non solo dal mutuo contatto, ma dal reciproco attrito per l'enorme pressione impulsiva circolatoria.

Fig. VI. Profilo dell'arco aortico visto dal lato destro e posteriormente, coi tronchi principali di origine in rapporto della biforcazione dell'arteria polmonale.

a. aorta ascendente, tagliata superiormente alle valvole sigmoidee,
ad. aorta discendente dove comincia il restringimento del suo calibro,
da. dilazione aortica;
c. tronco comune di origine a due rami, cioè;
td. arteria toracica posteriore destra, e
bd. ramo brachio-cefalico destro;
bs. tronco brachio-cefalico sinistro;
ts. arteria toracica posteriore sinistra;
pd. tronco polmonale destro,
ps. tronco polmonale sinistro.

FIG. VII. Rappresenta il condotto di Botallo in rapporto coi tronchi polmonale ed aortico.

p. arteria polmonale,
dp. dilatazione polmonale,
ps. tronco polmonale sinistro;
B. condotto di Botallo;
da. dilatazione aortica;
td. arteria toracica posteriore destra,
ts. arteria toracica posteriore sinistra;
bd. tronco brachio-cefalico destro,
bs. tronco brachio-cefalico sinistro.

FIG. VIII. Rappresenta l'arteria polmonale con la sua biforcazione in rapporto dell'arteria aorta, vista dalla sua superficie di contatto con l'orecchietta sinistra.

p. arteria polmonale,
dp. dilatazione polmonale,
pd. tronco polmonale destro,
ps. tronco polmonale sinistro;
a. aorta ascendente,
da. dilatazione aortica,
ad. aorta discendente,
td. arteria toracica posteriore destra.

FIG. IX. Apparato valvolare sigmoideo dell'arteria aorta. Questo apparato valvolare è il più regolare e simmetrico di tutti, come rappresentante del tipo ternario, e mostra pure che due sono i lembi pari, cioè; il primo ed il secondo, perchè entrambi sono in rapporto col tronco coronario destro e sinistro, a differenza del terzo lembo impari che non ha rapporto con alcun vaso.

I. primo lembo, settale, interno, o destro,
II. secondo lembo, parietale, esterno, o sinistro,
III. terzo lembo, impari, o posteriore.

l. linguette marginali delle sigmoidee in corrispondenza dei noduli di Aranzio;
a. angolo anteriore,
e. angolo posteriore esterno,
i. angolo posteriore interno;
cd. arteria coronaria destra;
cs. arteria coronaria sinistra, con tre rami
1. ramo auricolo-ventricolare sinistro posteriore
2. ramo ventricolare destro, anterior-superiore,
3. ramo interventricolare anteriore.

Tavola V.

FIG. X. Porzione anteriore del palato con le otto fosse gengivali in doppia serie; in corrispondenza della quinta coppia si vedono due denti rudimentali superstiti; nella linea mediana si vede il rafe palatino terminato da un rigonfiamento ellittico.

t. taglio di separazione dalla parte posteriore;
s. serie delle fosse gengivali;
r. rafe palatino mediano,
r'. rigonfiamento ellittico del medesimo,
a. estremità anteriore;
d. denti rudimentali superstiti nella quinta coppia di fosse gengivali in cui sono totalmente nascosti mostrando solo le punte.

FIG. XI. Lingua, vista dalla sua superficie superiore, in cui in luogo delle papille appaiono profonde solcature longitudinali nella parte anteriore ed altre trasverse nella parte posteriore; notevole pel regolare parallelismo dei suoi margini, e per la regolare curvatura dell'estremità anteriore, nel cui mezzo sporge un capezzolo di figura conica.

t. taglio di separazione in corrispondenza della base della lingua,
c. *capezzolo linguale* raccorciato in parte pel disseccamento.

FIG. XI'. Mostra la parte anteriore della lingua, vista dal suo lato destro per metterne in rilievo il margine ed il capezzolo.

m. margine,
c. capezzolo.

FIG. XI''. Mostra la parte anteriore della lingua vista di prospetto per mettere in evidenza il capezzolo, visto da sotto in sopra,

c. capezzolo.

FIG. XII. Apparato laringo-tracheo-bronchiale, le cui tre parti appaiono pressochè uguali tra di loro; la laringe col suo diametro trasverso si avvicina quasi al longitudinale; si rilevano pure i rapporti di posizione, e relativa grandezza del bronco accessorio, e dei due bronchi principali, recisi nel punto d'ingresso nel polmone.

g. apertura triangolare della glottide al principio del tubo ari-epiglottico;
e. epiglottide,
a. cartilagini aritenoidi,
m'. parte membranosa ari-epiglottica, cioè interposta tra i margini laterali dell'epiglottide, e quelli corrispondenti delle aritenoidi,
m parte membranosa interposta fra le due aritenoidi,
t. tiroide,
c. cricoide,
1.2.3.4.5.6. anelli tracheali, in ciascuno dei quali si osserva lateralmente ed alternamente una fenditura,
ba. bronco accessorio destro,
bd. bronco principale destro,
bs. bronco principale sinistro,
bi. biforcazione del bronco sinistro.

Tavola VI.

Fig. XIII. *S.* spiraglio, distaccato in forma ellittica dalla cute circostante, nel quale appare la rima in forma di $\int$ adagiata che separa la pinna superiore dalla inferiore, ed in cui confluiscono i due condotti nasali corrispondenti. Dalla figura appare chiaramente l'ingegnosa costruzione dell'apertura dello spiraglio, che adempie egualmente bene a scopi diversi ed in condizioni così differenti; cioè durante la sommersione in cui deve essere ermeticamente chiuso, e durante la respirazione, quando emerge fuori acqua, in cui deve raggiungere la massima apertura per la facile e rapida entrata ed uscita dell'aria. Pel primo caso sono di vantaggio le curvature opposte ed alterne dei margini delle due pinne, e l'incurvarsi in dentro dei margini spessi ed elastici che reciprocamente si comportano a valvole; e pel secondo caso giovano le forti intaccature agli estremi delle pinne ed il potersi arrovesciare in fuori dei loro margini sotto l'azione dei muscoli dilatatori delle pinne stesse.

a. angolo commessurale anteriore dello spiraglio con due intaccature in corrispondenza di ciascuna pinna nasale,
p. angolo commessurale posteriore dello stesso con le rispettive intaccature, che permettono l'apertura quasi circolare dello spiraglio.

Fig. XIV. *c.* forma della cicatrice parallela e sottoposta allo spiraglio,
l. taglio di figura ellittica per isolarla dalla circostante cute.

Fig. XV. Estremità anteriore del labbro superiore stretto come la mandibola cui forma cornice,
m. margine interno del contorno labiale,
t. taglio laterale di separazione dalla cute circostante,
t'. taglio posteriore di separazione dalla rimanente parte posteriore del labbro.

Fig. XVI. Sezione verticale fatta sul muso, al davanti dello spiraglio, per mostrare la forma cilindroide, compressa lateralmente, dell'estremo anteriore dell'animale e coi rapporti delle diverse sue parti.

D. dorso,
V. ventre,
D'. destro,
S. sinistro,
l. lardo,
c. mostra sezioni di connettivo, di tendini e del principio delle lacune, dietro la pelle del grugno;
n. sezione del condotto nasale primario compresso,
n'. sezione del condotto nasale inferiore, che va in dietro ad aprirsi nella narice inferiore (corrispondente alla narice sinistra),
n''. sezione del condotto nasale superiore che va indietro ad aprirsi nella narice superiore (corrispondente alla narice destra);
s. setto nasale nel suo punto di attacco anteriore sulla pelle del grugno (corrispondente all'attacco del setto sul lobulo nasale). Esso alquanto indietro si rende libero e separa le due narici superiore ed inferiore, e poi col suo attacco posteriore (corrispondente all'attacco labiale) si fissa al connettivo sottocutaneo;
p. linee punteggiate che rappresentano il decorso dei due condotti nasali, confluenti nell'unico spiraglio, indietro della sezione praticata nel punto di attacco anteriore del setto sulla pelle del grugno.

Fig. XVII. Dura madre encefalica vista dalla sua parte superiore.
e. parte in corrispondenza degli emisferi cerebrali,
c. parte in corrispondenza del cervelletto,
f. sezione della dura madre spinale in corrispondenza del forame occipitale cranico;
g. guaine della dura madre corrispondenti al gruppo dei nervi cranici IX. X. XI.
g'. guaina dell'ultimo nervo cerebrale XII, o ipoglosso.

Tavola VII.

Fig. XVIII. Vescica urinaria di forma ovoidale allungata, col polo ristretto ed appuntato in alto in corrispondenza dell'uraco, e col polo opposto più grosso in corrispondenza dell'apertura del collo della vescica,

a. apertura del collo della vescica,
u. uraco.

Fig. XIX. Testicolo di forma ovoidale e depressa.

e. punto di separazione dall'epididimo.

Fig. XX. Pene,

u. apertura uretrale terminale,
b. base del glande,
p. base del prepuzio, che si estende da *p* a *b*;
m. muscoli retrattori che si estendono dal loro attacco sul glande in *b.* fino alla inserzione delle ossa pelviche,
c. rigonfiamento dei corpi cavernosi,
i. inserzione dei corpi cavernosi alle ossa pelviche,
u'. apertura uretrale in corrispondenza del collo della vescica.

Fig. XXI. Figura totale dell'animale visto di profilo dal suo lato sinistro. In essa si nota la grande differenza della mascella inferiore fornita di denti, esile e breve rispetto alla mascella superiore, sfornita di denti ed enormemente sviluppata, tanto nel senso della sua altezza, quanto in quello della sua lunghezza. Si nota la forma della estremità del grugno, alla cui parte superiore si osserva una intaccatura in corrispondenza dello spiraglio, posto presso la linea superiore di contorno, pressochè parallelo alla stessa, con un estremo anteriore ed uno posteriore. L'occhio piccolissimo si trova molto in basso, in corrispondenza della linea mediana della pinna, e per distanza, intermedio tra la base della pinna e l'angolo labiale. Poco al davanti dell'occhio incominciano le cavità spermacetiche e la parte nasale. La pinna toracica appare nella sua brevità, e nella sua direzione in alto, inferiormente sul terzo posteriore appare il pene, e superiormente in corrispondenza si osserva la pinna dorsale, seguita da quattro leggiere intaccature e rilievi, ed in fine la parte ristretta da cui comincia la pinna codale.

Rappresentando la figura $^1/_{100}$ del vero, per la sua piccolezza, non mostra altro che i contorni principali coi rapporti di forma e di distanza delle singole parti, senza quei piccoli particolari che si possono notare nella figura I. dell'animale, che appare perciò molto più naturale nei suoi contorni.

INDICE

II

1/3

Adolfo Apolloni dis

Lit Bruno e Salomone Roma

de Sanctis diresse

II

Adolfo Apollony dis

Lit Bruno e Salomone Roma

de Sanctis diresse

IV
ma
z
ma
md
I
ml
III
II
I
1/3

III
II
ma
z
ml
pi
i
z'
p
ps
m
s
a

IV
V
III
1/3
1/2
1/3

1/6
bd
bs
ts
da
c
pd
ps
ad
a
VI
td
1/6
bd
bs
ts
da
ps
dp
P
B
VII

IX

VIII

i 6
bs
bd
ts
da
td
pd
ps
ad
a

VI

td
i 6
bd
bs
ts
da
p
dp
p
B

VII

i 4
i
III
cd
ts
I
II
a

IX

td
i 6
pd
ad
a
da
p
ps
dp

VIII

XII.

XI.
t
c
t
1/6
XI'.
m
c
XI''.
c
X.
t
d
s
r
a
s
t
d
1/6

XI.

t
c
t
1/6

XI'.

m
c

XI''.

c

X.

t
d
s
r
r'
a
s
t
d
1/6

Adolfo Apollony dis.

Lit. Bruno e Salomone R...

XIII

1/4

m

t

t

t'

t'

XV

1/4

t

c

t

XIV

[illegible] Apollani dis

LIT. E

1/16

XVI

1/3

XVII

XIII

VI

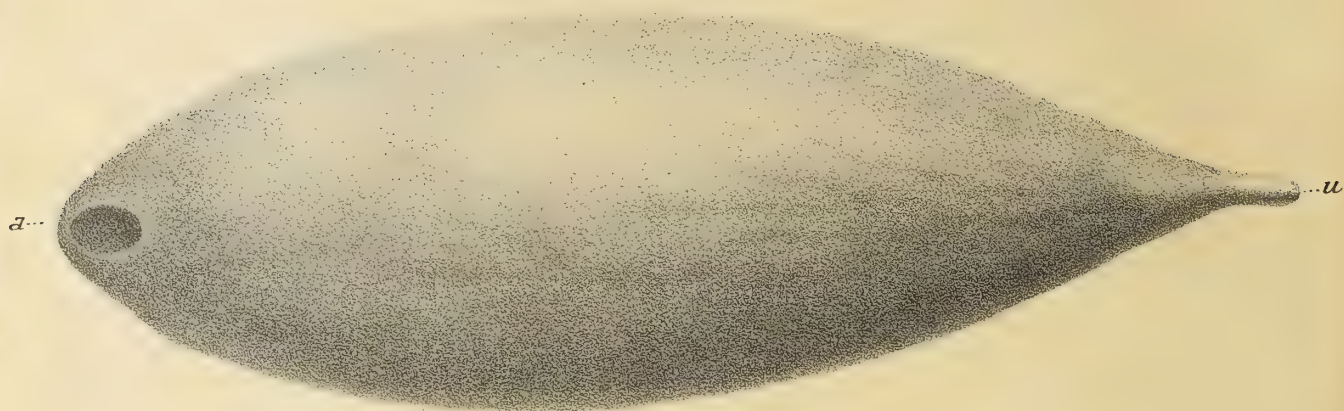
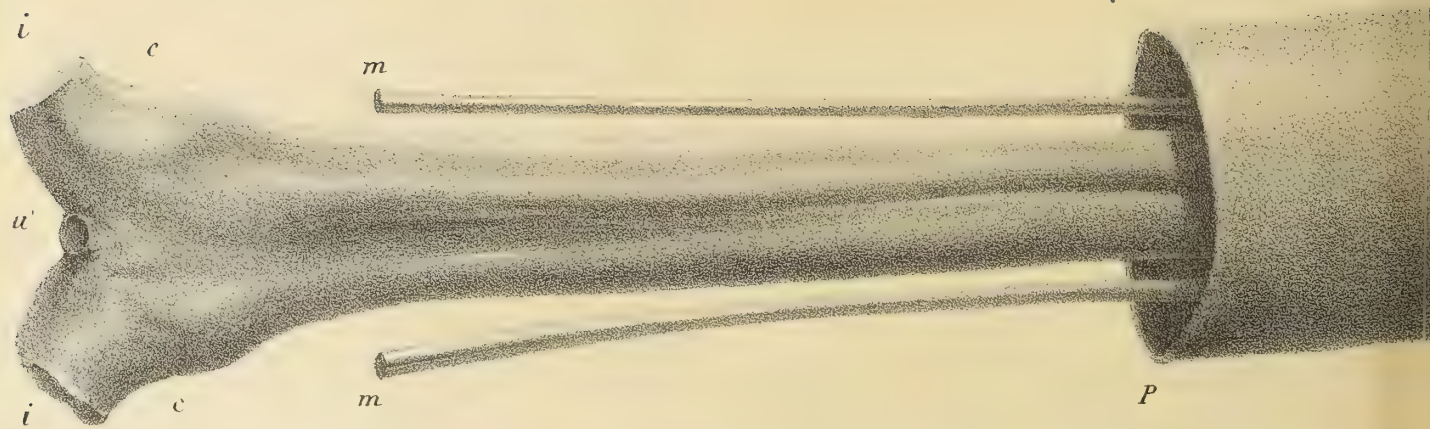
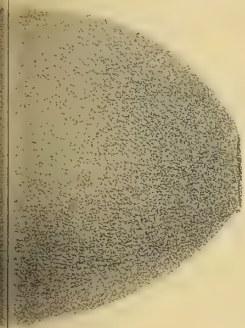
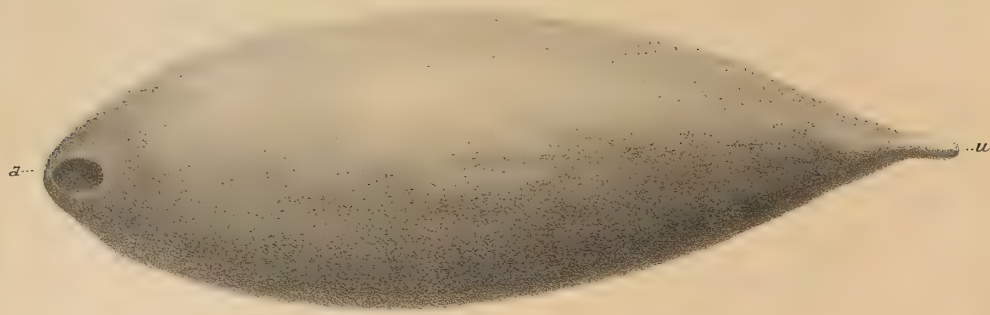
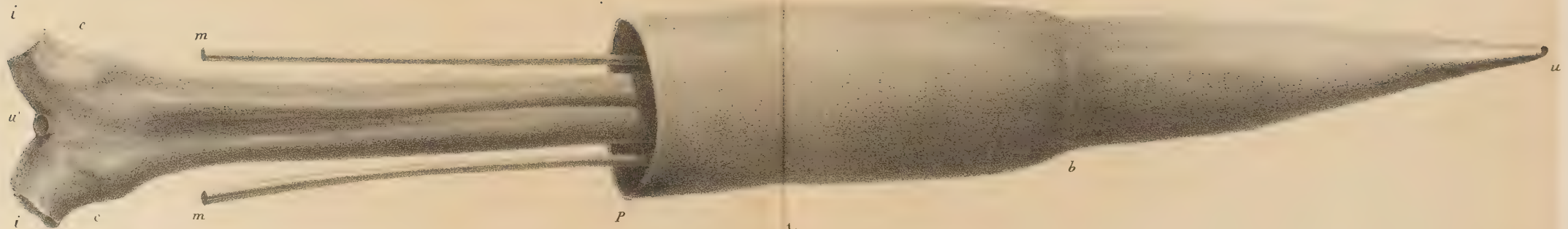
XIV

XVI

XVII

LIT. BRUNO E SALOMONE, ROMA

XVIII

XXI
1/100
e
b
u

XVIII
a
u
XXI
1/100
XIX
e
XX
i
c
m
u'
i
c
m
P
b
u
1/6

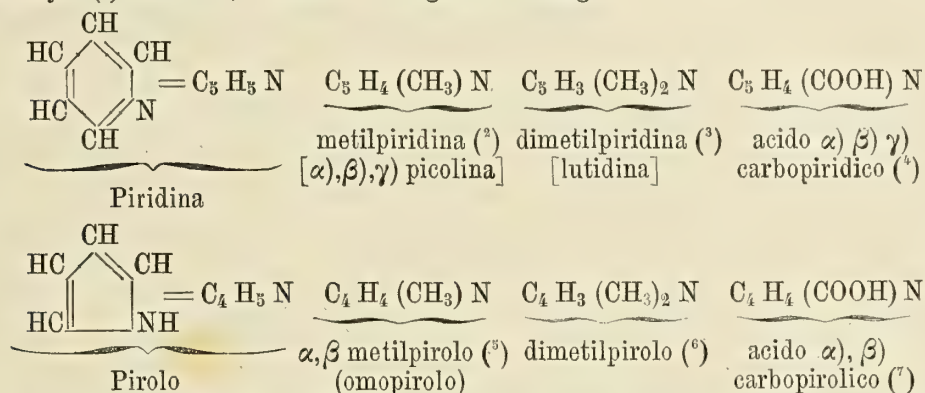
Sull'azione del cloroformio sul composto potassico del Pirolo.

Memoria di G. L. CIAMICIAN e M. DENNSTEDT

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 1 maggio 1881.

Comparando le formole del pirolo e della piridina e le serie di composti derivanti da queste due sostanze risalta vivamente l'analogia che esiste fra questi due nuclei azotati; analogia che tutti due hanno poi comune col benzolo.

Ammettendo per la piridina la formola di Koerner e pel pirolo quella proposta da Baeyer (1) nel 1870, si hanno le seguenti analogie:

CH HC⁄ ⁀ ⁀ \CH HC\ ⁄N CH $= C_5 H_5 N$ Piridina	$C_5 H_4 (CH_3) N$ metilpiridina (2) [α),β),γ) picolina]	$C_5 H_3 (CH_3)_2 N$ dimetilpiridina (3) [lutidina]	$C_5 H_4 (COOH) N$ acido α) β) γ) carbopiridico (4)
CH HC⁄ \CH HC NH $= C_4 H_5 N$ Pirolo	$C_4 H_4 (CH_3) N$ α,β metilpirolo (5) (omopirolo)	$C_4 H_3 (CH_3)_2 N$ dimetilpirolo (6)	$C_4 H_4 (COOH) N$ acido α), β) carbopirolico (7)

Il pirolo e la piridina danno ambidue origine ad una serie di derivati che risultano per la sostituzione di radicali alcolici od acidi ai singoli atomi d'idrogeno. Ogni sostituzione produce tanto nel gruppo piridico che nel gruppo pirolico una serie di composti isomeri simili affatto a quelli che si riscontra nei derivati del benzolo.

Come si rileva da questo specchietto esistono due metilpiroli (omopiroli) corrispondenti alle tre metilpiridine (picoline), e due acidi carbopirolici isomeri che si possono paragonare ai tre acidi carbopiridici.

Il pirolo [$C_4 H_5 N$] apparisce dunque come un gruppo piridico [$C_5 H_5 N$] incompleto (8), che deve avere perciò tendenza di assimilare un quinto atomo di carbonio per trasformarsi in piridina.

(1) Berl. Ber. III, 517.
(2) Weidel, Berl. Ber. XII, 1989-2012.
(3) W. Ramsay. *Phil. Mag.* 1876, 1877, 1878; Weidel e Herzig, Wiener Monats-Hefte I Bd. 1-47.
(4) Weidel, Berl. Ber. XII, 1989-2012; Skraup, Berl. Ber. XII, 2331.
(5) Weidel e Ciamician, Berl. Ber. XIII, 77; Ciamician, Transunti dell'Acc. dei Lincei, V, 3ª serie.
(6) Weidel e Ciamician, Berl. Ber. XIII, 78.
(7) Ciamician, Wiener Monats-Hefte I, 494, Transunti dell'Acc. dei Lincei, V, 3ª serie.
(8) Ciò spiega forse la poca stabilità del pirolo e dei suoi derivati.

Abbenchè già molte volte s' abbia ottenuto il pirolo da sostanze appartenenti alla serie piridica ([1]) pure finora non è stato ancora mai osservata la trasformazione del pirolo in piridina, e noi abbiamo poco tempo fa comunicato in una Nota preliminare delle sperienze che indicano una via per raggiungere lo scopo.

Per azione del cloroformio sul composto potassico del pirolo si ottiene una base, che ha la formola d'una *cloropiridina* [$C_5 H_4 Cl N$].

Questa nuova base fu da noi ottenuta nel modo seguente:

Il pirolo venne estratto dall'olio animale per mezzo dello stesso composto potassico. La frazione che contiene il pirolo, distilla fra 110° e 135° e venne da prima liberata perfettamente dai nitrili degli acidi grassi ed indi sottoposta ad un' accurata distillazione frazionata per separare tutto ciò che passa al disopra di 135°. Il composto potassico fu ottenuto facendo cadere le pallottole del potassio ad una, ad una nell'olio riscaldato a circa 100° in un pallone munito d'un apparecchio a ricadere. Ogni pezzetto di potassio produce un forte sviluppo d'idrogeno trasformandosi in una massa azzurra fusa, che dopo pochi secondi prende l'aspetto bianco e cristallino del composto pirolpotassico.

Quando il potassio non agisce che debolmente si lascia raffreddare, si separa, filtrando coll'aiuto di una tromba ad acqua, il composto solido dall'olio rimasto inalterato (idrocarburi) e si lava con etere anidro per levare le ultime traccie d'olio rimaste aderenti. Il composto pirolpotassico ottenuto in tal modo era bianco e cristallino.

Il cloroformio agisce molto violentemente sul composto potassico del pirolo, il liquido si riscalda fino all'ebollizione, mentre la parte del composto si trasforma in rosso di pirolo. Per diminuire la resinificazione bisogna diluire il cloroformio coll'etere anidro.

Noi abbiamo seguita la seguente via nella preparazione della nuova base: 50 gr. di composto potassico vengono introdotti in un grande pallone munito di un apparecchio a ricadere e trattati con 60 gr. di cloroformio (un po' più della quantità calcolata) diluito con 500-600 gr. d' etere anidro. Il miscuglio si riscalda da se fino all'ebollizione colorandosi in bruno oscuro. Dopo circa mezz'ora la reazione incomincia a scemare e bisogna riscaldare il pallone a b. m. per mantenere il liquido in ebollizione per ancora due ore, tempo necessario alla totale scomposizione del composto pirolpotassico. Fatto questo, si distilla l'etere che può servire ad una seconda preparazione e si ottiene una massa bruno-scura semisolida, che ha l'odore penetrante della nuova base e che contiene, oltre a questa, del pirolo inalterato, rosso di pirolo, cloroformio e cloruro potassico.

È molto difficile di liberare perfettamente il nuovo corpo dal pirolo, ed il metodo che noi descriviamo è quello che dopo molti vani tentativi ci è sembrato il migliore.

Il residuo della distillazione a b. m. viene trattato con acqua ed acido cloridrico in eccesso e fatto bollire in una grande capsula di porcellana per resinificare il pirolo. Dopo circa un' ora di ebollizione si lascia raffreddare e si versa il contenuto della capsula in un grande pallone. Il liquido, reso alcalino con un eccesso di potassa caustica, viene poi distillato con vapor acqueo. Passa un olio pesante che ha un odore caratteristico e si scioglie in parte nell'acqua, che si va raccogliendo nel distillato. Per separare l' olio si distilla aggiungendo sempre un poco di potassa solida ancor

([1]) Vedi R. Laiblin, Ann. Chem. Pharm. 196, 129 e Jahresber. f. 1879, 789.

una o due volte, si separa l'olio non disciolto con un imbuto a chiavetta, e si estrae i distillati acquosi con etere.

S'ottiene così un liquido incoloro che però contiene ancora delle traccie di pirolo le quali si manifestano sciogliendo la base nell'acido cloridrico e riscaldando la soluzione. Per levare queste ultime traccie, si scioglie tutto il liquido in un eccesso d'acido cloridrico concentratissimo e si riscalda la soluzione in un bagno ad olio a 120° per due ore in un apparecchio a ricadere, munito d'una colonna di mercurio per effettuare una differenza di pressione di circa un' atmosfera e mezza.

Il contenuto del pallone viene quindi trattato con un eccesso di potassa, distillato di nuovo con vapor acqueo e l'olio ottenuto separato dall'acqua nel modo descritto, seccato con potassa caustica fusa e distillato.

Passa quasi completamente a 148° ad una pressione di 743,5 mm.

La nuova base è un liquido clorurato, oleoso, abbastanza mobile, più denso dell'acqua nella quale è notevolmente solubile. È molto rifrangente. Ha un odore penetrante e caratteristico che ricorda oltremodo quello della piridina. La sua reazione è fortemente alcalina e si combina cogli acidi formando dei sali deliquescenti.

Questo corpo non ha più nulla affatto di comune col pirolo ed i suoi derivati. È stabilissimo, non si altera punto se è perfettamente puro nè all'aria nè alla luce mantenendosi perfettamente incoloro. Può venir bollito con acido cloridrico o nitrico senza subire alcuna alterazione. Sciolto in acido solforico concentrato e bollita la soluzione si colora lievemente in bruno, però neutralizzando il liquido si riottiene la maggior parte della base inalterata. Questi caratteri servono eminentemente a distinguere la nuova base dai derivati del pirolo, i quali tutti più o meno facilmente si scompongono per azione degli acidi bollenti trasformandosi in rosso di pirolo.

Le analisi e la determinazione della densità di vapore diedero i n.[i] che seguono:

I. 0,2696 gr. di sostanza diedero 0,5220 gr. di CO_2 e 0,0915 di OH_2.

II. 0,2647 gr. di sostanza diedero 28,5 CC d'azoto a 20° e 748 mm.

III. 0,2548 gr. di sostanza diedero 0,3210 gr. di Ag Cl.

	trovato in 100 parti			calcolato per C_5H_4ClN
	I.	II.	III.	
C	52,80	—	—	52,86
H	3,76	—	—	3,52
Cl	—	—	31,17	31,28
N	—	12,11	—	12,33
		99,84		99,99

Densità di vapore ([1]).

Sostanza impiegata	0,0843 gr.
Peso del mercurio impiegato	1154 gr.
Peso del mercurio spostato	364,5 gr.
Temperatura incipiente	23°
Temperatura finale [corretta]	183°
Differenza di pressione nell' apparecchio .	84 mm.
Barometro	747 mm.

	trovato	calcolato
Densità	57,0	57,75

([1]) Determinato coll'apparecchio di Goldschmiedt e Ciamician Berl. Ber. X, 641.

Cloridrato [$C_5 H_4 Cl N . H Cl$].

Svaporando la soluzione della base nell'acido cloridrico nel vuoto, s'ottiene una massa incolora formata di grossi cristalli di lucentezza vitrea.

Il cloridrato è oltremodo deliquescente. Bollendo la soluzione acquosa, il sale si dissocia parzialmente rimettendo la base in libertà. È noto che similmente si comporta anche il cloridrato della mono-e bibromopiridina, descritte recentemente da Hofmann [1].

Cloroplatinato [$(C_5 H_4 Cl N . HCl)_2 . Pt Cl_4 + H_2 O$].

Se si tratta una soluzione della base in acido cloridrico concentrato col cloruro di platino, s'ottiene dopo poco tempo un precipitato di finissimi aghi debolmente colorati. Questi cristalli sono il cloroplatinato senz'acqua di cristallizzazione. Se la soluzione è più diluita si depongono, per svaporamento nel vuoto sull'acido solforico, dei prismi d'una lunghezza di parecchi millimetri, d'un colore giallo ranciato. Questi cristalli contengono una molecola d'acqua, che incominciano a perdere spontaneamente stando esposti all'aria, per cui i cristalli perdono la loro lucentezza e prendono un colore più chiaro. Ciò avviene più presto e completamente seccando il cloroplatinato nel vuoto sopra l'acido solforico.

Le analisi diedero i seguenti numeri:

0,4295 gr. di cloroplatinato seccato fra carta perdettero nel vuoto sull' acido solforico 0,0109 gr. d'acqua.

In 100 parti.

	trovato	calcolato per $(C_5 H_4 Cl N H Cl)_2 Pt Cl_4 + OH_2$
$H_2 O$	2,54	2,74

I. 0,3525 gr. di cloroplatinato seccato nel vuoto diedero 0,2415 gr. CO_2 e 0,0543 gr. di OH_2.

II. 0,2670 gr. di cloroplatinato seccato nel vuoto diedero 0,4666 gr. di Ag Cl.

III. 0,2275 gr. di cloroplatinato seccato nel vuoto diedero 0,4080 gr. di Ag Cl.

IV. 0,1071 gr. di cloroplatinato seccato nel vuoto diedero per calcinazione 0,0330 gr. di platino.

V. 0,4693 gr. di cloroplatinato seccato nel vuoto diedero per calcinazione 0,1440 gr. di platino.

	trovato in 100 parti					calcolato per $(C_5 H_4 Cl N . H Cl)_2 Pt Cl_4$
	I.	II.	III.	IV.	V.	
C	18,68	—	—	—	—	18,78
H	1,71	—	—	—	—	1,56
Cl	—	43,21	44,41	—	—	44,41
Pt	—	—	—	30.81	30,67	30,87

Lo studio cristallografico di questo sale è stato eseguito nel Museo di mineralogia del prof. Strüver dal sig. ing. G. La Valle, il quale ebbe la gentilezza di comunicarci quanto segue:

« Sistema cristallino: « Monoclino »

« Costanti: « a:b:c: = 1,1966 : 1 : 1,1718 ».

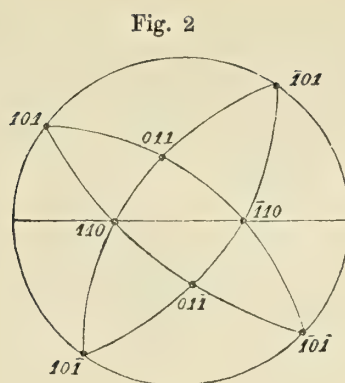
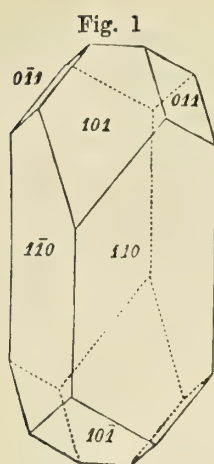
« $\eta = + X : + Z = 109° 48'$

« Forme osservate: (110), (101), ($\bar{1}$01), (011).

« Combinazioni: idem.

[1] Berl. Ber. XII, 988.

Fig. 1

Fig. 2

Angoli	Misurati	Calcolati
110:1̄10	83°. 13′. 30″	*
110:101	57°. 17′	*
1̄10:1̄01	68°. 03′	*
101:1̄01	88°. 43′	88°. 43′. 30″
110:011	45°. 06′	45°. 10′. 50″
011:1̄01	66°. 29′	66°. 46′. 10″
1̄10:011	65°. 56′	66°. 15′
011:101	56°. 34′	56°. 28′

« Sfaldatura perfetta (110), in traccie (1̄01).

« Proprietà ottiche : Sulla faccia 110 un piano di massima estinzione è quasi « parallelo allo spigolo [110 : 1̄10].

« I cristalli generalmente si presentano col prisma 110 molto allungato e quasi « tutti hanno le faccie come in figura ».

Il cloroplatinato è poco solubile nell'acqua, pochissimo nell'alcool e punto nell'etere.

Bollendolo coll'acqua si scompone in modo analogo alla scomposizione del cloroplatinato di piridina, osservato e descritto da Anderson [1].

Trattando il cloroplatinato, seccato sull'acido solforico nel vuoto, coll'acqua si osserva da prima che al colore pallido del sale privo d'acqua, succede il giallo carico del composto idratato. Riscaldando non avviene soluzione, ma bensì si vede il cloroplatinato mutare nuovamente colore trasformandosi in una polvere del colore dello zolfo, affatto insolubile nell'acqua, negli acidi e nell'alcool. Per rendere completa la trasformazione bisogna far bollire il cloroplatinato per più ore. Se si interrompe l'ebollizione troppo presto, si ottiene filtrando un liquido che deposita pel raffreddamento delle pagliuzze d'un colore giallo d'oro o di lucentezza metallica.

Anche il cloroplatinato di piridina subisce per l' ebollizione con acqua, secondo Anderson, una simile scomposizione e si forma per eliminazione di acido cloridrico la *platinopiridina* « $(C_5 H_5 N . Cl)_2 . Pt Cl_2$ ».

[1] Ann. Chem. Pharm. 96, 200.

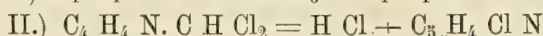
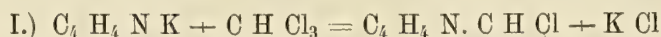
Nel nostro caso era da prevedersi la formazione d'un corpo della formola: « $(C_5 H_4 Cl. N. Cl)_2. Pt Cl_2$, » e l'esperienza venne a confermare la supposizione.

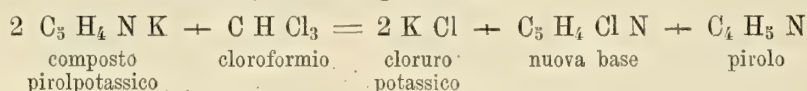
La valutazione del platino nel prodotto ottenuto per ebollizione del cloroplatinato della nuova base coll'acqua diede i seguenti numeri: 0,2573 gr. di sostanza diedero 0,0890 gr. di platino.

In 100 parti

	trovato	calcolato per $(C_5 H_4 Cl N. Cl)_2 Pt Cl_2$.
Pt	34,59	34,84

Dalle sperienze or descritte risulta che il composto potassico del pirolo si trasforma per azione del cloroformio in una nuova base della formola « $C_5 H_4 Cl N$ ». Questa trasformazione deve avvenire secondo le seguenti equazioni:

$$\text{I.)} \quad C_4 H_4 N K + C H Cl_3 = C_4 H_4 N. C H Cl + K Cl$$
$$\text{II.)} \quad C_4 H_4 N. C H Cl_2 = H Cl + C_5 H_4 Cl N$$

L'acido cloridrico agisce poi probabilmente sopra un altra molecola del composto pirolpotassico scomponendolo in pirolo e cloruropotassico, in modo che si può riassumere tutta la reazione nell'equazione seguente:

$$\underset{\text{composto pirolpotassico}}{2\ C_5 H_4 N K} + \underset{\text{cloroformio}}{C H Cl_3} = \underset{\text{cloruro potassico}}{2\ K Cl} + \underset{\text{nuova base}}{C_5 H_4 Cl N} + \underset{\text{pirolo}}{C_4 H_5 N}$$

Il rendimento è cattivo e non ascende che a circa al 10 % della quantità teorica.

La causa n'è che il cloroformio resinifica in gran parte il composto pirolpotassico e massime se il cloroformio non è abbastanza diluito.

La reazione è come si vede un po' simile a quella del cloroformio sulle amine, ma non può dirsi generale perchè gli altri imidocomposti, come per es. il carbazolo, non si comportano come il pirolo. La combinazione potassica del carbazolo riscaldata in tubi chiusi col cloroformio si trasforma di nuovo in carbazolo.

Sembra essere un carattere speciale del radicale del pirolo « $C_4 H_4 N$ » quello di addizionare il gruppo « C Cl ».

Azione dell' idrogeno nascente. — Il cloro è sì fortemente legato al carbonio nella base che abbiamo descritto da resistere all'azione dei più violenti mezzi di riduzione.

Noi non abbiamo potuto in nessun modo levare il cloro della base ottenuta dal pirolo. È un caso che ricorda il comportamento dei composti clorurati della serie aromatica.

Noi abbiamo tentato invano l'azione dell'acido jodidrico in soluzione acquosa, d'una soluzione satura d' acido jodidrico nell' acido acetico glaciale, dell' acido jodidrico e fosforo e dell' acido jodidrico in presenza di joduro potassico. La polvere di zinco e l' idruro di sodio [1] pure non valsero a raggiungere lo scopo.

L'amalgama di sodio in soluzione alcalina od acida e lo zinco ed acido cloridrico danno un prodotto di addizione d'idrogeno senza sostituire il cloro.

La reazione produce inoltre una considerevole quantità d' ammoniaca in modo che il rendimento della base idrurata è molto cattivo. Questo comportamento ricorda

[1] Annales de Chimie et de Physique [V], 2, 273.

l'azione dell'idrogeno nascente sugli acidi carbopiridici [1], che pure si scompongono in ammoniaca e sostanze non azotate.

La quantità della base ottenuta, che è solubilissima nell'acqua, non era tale da permettere di determinare il punto d'ebollizione e di analizzarla allo stato libero e però ci siamo serviti del cloroplatinato.

Trattando la soluzione della base nell'acido cloridrico col cloruro di platino si ha da prima un precipitato di pagliuzze d'un colore giallo d'oro che sono il sale privo d'acqua. Per lento svaporamento si depongono poi dei grossi cristalli d'un colore giallo ranciato, che sono il cloroplatinato con una molecola d'acqua di cristallizzazione. I cristalli perdono l'acqua stando esposti all'aria e meglio ancora e completamente nel vuoto.

È molto difficile di separare l'alcaloide dall'ammoniaca che si forma nella reazione e noi abbiamo raggiunto lo scopo nel modo seguente. La soluzione acquosa della base ottenuta distillando col vapor acqueo il liquido reso alcalino nel quale erasi operata la riduzione, venne estratto con etere e il residuo dello svaporamento della soluzione eterea sciolto in acido cloridrico e precipitato parzialmente col cloruro di platino. Le ultime frazioni non contengono più ammoniaca.

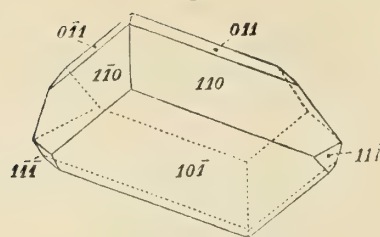
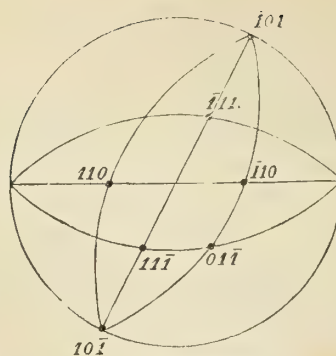
Le analisi fatte con saggi seccati nel vuoto sull'acido solforico diedero numeri che rendono probabile la formola « $[C_5 H_{10} Cl N. H Cl]_2 Pt Cl_4$ » che corrisponderebbe alla base $C_5 H_4 Cl N$ con 6 atomi d'idrogeno addizionati: « $C_5 H_{10} Cl N$ ».

I) 0,2755 gr. di sostanza diedero 0,1945 di CO_2 e 0,1011 gr. di OH_2.
II) 0,3963 gr. di sostanza diedero 0,2661 gr. di CO_2 e 0,1312 gr. di OH_2.
III) 0,2424 gr. di sostanza diedero 0,4207 gr. di Ag Cl.
IV) 0,3223 gr. di sostanza diedero 0,0970 gr. di Pt.

	trovato				calcolato per $(C_5 H_{10} Cl N. H Cl)_2 Pt Cl_4$
	I.	II.	III.	IV.	
C	18,57	18,31	—	—	18,42
H	3,93	3,67	—	—	3,38
Cl	—	—	43,02	—	43,60
Pt	—	—	—	30,09	30,30

La determinazione cristallografica di questo sale è stata pure fatta dal signor ingegnere G. La Valle, che volle comunicarci quanto segue:

« Sistema cristallino: « Monoclino ».
« Costanti: $a:b:c = 1,2093:1:1,0938$.
« $\eta = +X : +Z = 113° 55' 20''$.
« Forme osservate: (110), $(\bar{1}01)$, (011), $(\bar{1}11)$.
« Combinazione: idem.

[1] Vedi Weidel Berl. Ber. XII, 201.

Angoli	Misurati	Calcolati
110 : $\bar{1}$10	84°. 16′	*
$\bar{1}$01 : $\bar{1}$10	71°. 15′	*
011 : 110	44°. 13′	*
$\bar{1}$01 : $\bar{1}$11	43°. 52′	43°. 50′

« Sfaldatura mediocre ($\bar{1}$01), in traccie (110).

« Proprietà ottiche: Un piano di massima estinzione fa, sulla faccia 110 un « angolo di 53° circa con lo spigolo [110 : $\bar{1}$10].

« I cristalli si presentano tutti con la forma $\bar{1}$01 molto sviluppata ed hanno « costantemente la faccia $\bar{1}$11 ».

Abbenchè noi non siamo riusciti di sostituire nella base descritta l'idrogeno al cloro e di ottenere così realmente la piridina, pure i caratteri ed il comportamento della base ottenuta dal pirolo sono tali da quasi escludere ogni altra possibilità sulla costituzione della medesima.

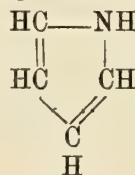
Non pertanto dovendo dare un nome alla nuova sostanza e non avendo noi potuto dimostrare che essa sia realmente una delle tre cloropiridine, non essendo finora conosciuto nessuno di questi corpi, noi la chiameremo per ora *Isocloropiridina* per tener conto della possibilità, abbenchè poco probabile, che il corpo da noi scoverto possa essere un derivato clorurato d'un isomero della piridina.

Per ultimo, non ci sembra inopportuno di sottoporre ad una discussione le formole del pirolo, che sono ora comunemente usate e di vedere in che relazioni stia colle medesime la formola del nuovo alcaloide.

Il primo a proporre una formola schematica pel pirolo è stato Limpricht (1) che lo riguardò come un'amina del nucleo ipotetico « tetrolo ».

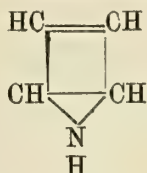
Ben presto però le ricerche fatte sul pirolo da Baeyer, Lubavin, R. Schiff ed altri dimostrarono erronea questa veduta e venne stabilito essere il pirolo una base secondaria od imidica col gruppo NH invece di NH_2.

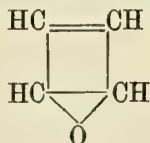
Nel 1870 Baeyer (2) propose pel pirolo la formola:

```
HC——NH
||   |
HC   CH
  \ //
   C
   H
```

(1) Berl. Ber. 2, 211.

(2) Berl. Ber. 3, 517 (Baeyer e Emmerling).

la quale serve a spiegare benissimo quasi tutte le reazioni ed il comportamento di questo corpo. Però tenendo conto delle relazioni che esistono fra il pirolo e l'acido piromucico sembra più probabile la formola adoperata da R. Schiff [1] nel 1877,

HC═══CH
CH──CH
N
H

che sta in stretta relazione colla formola dell'acido piromucico e del furfurano:

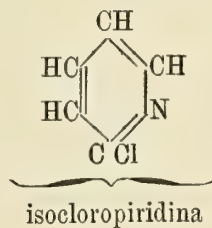
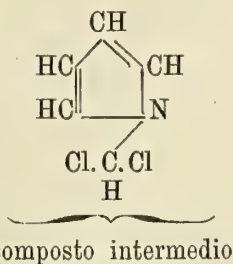
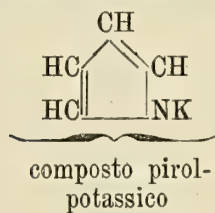
HC═══CH
HC──CH
O

le quali spiegano come dimostrò il Baeyer [2] nello stesso anno, soddisfacentemente la formazione dell'acido fumarico e dell'acido furonico e pimelico.

Partendo da queste due diverse formole del pirolo si giunge a due differenti formole per l'Isocloropiridina.

Dalla prima risulterebbe:

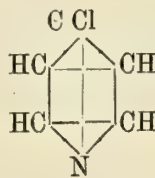
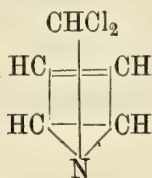
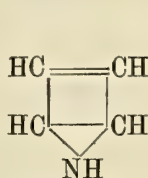
CH / HC CH / HC NK — composto pirol-potassico

CH / HC CH / HC N / Cl. C. Cl / H — composto intermedio

CH / HC CH / HC N / C Cl — isocloropiridina

per la nuova base una formola con 3 legami semplici e 3 legami doppî. Dalla seconda che è la più probabile risulterebbe invece:

HC═══CH / HC──CH / NH

$CHCl_2$ / HC══CH / HC──CH / N

C Cl / HC CH / HC CH / N

per l'isocloropiridina una formola con 9 legami semplici, ovvero una formola corrispondente alla formola prismatica del benzolo.

Il fatto che il nucleo del pirolo $C_4 H_4 N$ si addiziona al gruppo trivalente CCl rende a nostro avviso molto probabile l' ipotesi che il radicale del pirolo sia anche trivalente, cioè che il pirolo contenga una sola lacuna.

Secondo le vedute svolte recentemente da diversi autori e tenendo conto della grande stabilità del nuovo composto, sembra anche da questo lato più probabile la formola prismatica.

(1) Berl. Ber. 10, 1193, 1500.
(2) Berl. Ber. 10, 355, 695, 1360.

Se la base ottenuta dal pirolo è realmente, come tutto lo accenna, una cloropiridina, la piridina sarebbe meglio espressa da una formola prismatica che da quella ora comunemente usata.

Azione del cloroformio sul composto potassico dell'omopirolo (metilpirolo). — Il cloroformio agisce anche sul composto potassico del primo omologo del pirolo, dell'omopirolo, dando origine ad una base omologa alla isocloropiridina.

Però siccome l'omopirolo ricavato dall'olio animale è, come ha dimostrato recentemente uno di noi, un miscuglio di due isomeri ([1]), apparisce molto probabile che anche l'alcaloide risultante dall'azione del cloroformio sia una mescolanza di due sostanze differenti soltanto per la posizione relativa del gruppo metilico in rispetto all'azoto.

Noi per ora non abbiamo fatto che delle ricerche preliminari e le pubblichiamo quale appendice alla descrizione dell'isocloropiridina per dimostrare che la reazione del cloroformio è generale per gli omologhi del pirolo.

Il cloroformio agisce già a temperatura ordinaria sul composto potassico dell'omopirolo, abbenchè un po' meno energicamente che sul composto del pirolo.

L'operazione viene eseguita in modo identico a quello già descritto, bisogna solamente per liberare la nuova base delle ultime traccie di omopirolo riscaldarla con acido a 180° in tubi chiusi, perchè l'omopirolo resiste più del pirolo all'azione degli acidi.

Si ottiene un liquido incoloro più denso dell'acqua e un poco meno solubile nella medesima dell'isocloropiridina, d'un odore quasi identico a questa sostanza. Bolle fra 160° e 170°, il che dimostra essere realmente un miscuglio di più corpi.

Ha reazione fortemente alcalina e si scioglie negli acidi formando sali. Il cloridrato si scompone bollendo la sua soluzione acquosa. Col cloruro di platino s'ottiene un cloroplatinato in forma di cristalli giallo-aranciati che diedero risultati analitici corrispondenti alla formola $[C_5 H_3 (C H_3) Cl N. H Cl]_2. Pt Cl_4$.

Le analisi sono state fatte con saggi seccati nel vuoto sull'acido solforico.

I) 0,2662 gr. di sostanza diedero 0,2081 gr. di CO_2 e 0,0514 gr. di OH_2.

II) 0,2331 gr. di sostanza diedero 0,4032 gr. di Ag Cl.

III) 0,1996 gr. di sostanza diedero 0,0596 gr. di platino.

In 100 parti:

	numeri trovati			calcolato per la formola $(C_6 H_6 Cl N. H Cl)_2. Pt Cl_4$.
	I.	II.	III.	
C	21,32	—	—	21,58
H	2,15	—	—	2,09
Cl	—	42,76	—	42,56
Pt	—	—	29,35	29,57

Da quest'analisi risulta essere realmente la sostanza ottenuta dall'omopirolo un miscuglio di corpi della formola: « $C_5 H_3 (C H_3) Cl N$ » e probabilmente un miscuglio di due *Cloropicoline*.

([1]) G. L. Ciamician, Transunti vol. V, serie 3ª (marzo).

Studî sul potere rotatorio.

Memoria del dott. RAFFAELE NASINI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 aprile 1881.

In un esteso lavoro pubblicato dal prof. Carnelutti e da me sul potere rotatorio molecolare di molti derivati della santonina, facemmo rilevare l'enorme potere rotatorio specifico di un isomero della santonina, la parasantonide, ed accennammo anche alle variazioni che subisce in diverse condizioni [1].

Ho creduto non privo d'interesse uno studio ottico accurato di questa sostanza, la più attiva di quante se ne conoscano, specialmente allo scopo d'indagare quale influenza abbia la temperatura, il solvente, e per uno stesso solvente, la concentrazione delle soluzioni sul suo potere rotatorio specifico.

È noto che il potere rotatorio specifico di una sostanza attiva in soluzione, varia ordinariamente col variare delle tre condizioni che sopra ho rammentate. Quanto alla temperatura il caso più frequente è che il potere rotatorio specifico diminuisca al crescere di essa; così è per la chinina, conchinina, cinconina, cinconidina, bisolfati di chinina e di conchinina, santoninato sodico, ed altri molti composti. Al contrario per l'acido tartarico si nota un aumento. Nè mancano esempî in cui la temperatura fa cangiare il senso del potere rotatorio. Per lo zucchero invertito sciolto in una mescolanza d'acqua, acido acetico e alcool etilico [2] si ha mancanza assoluta di potere rotatorio a circa 38°, mentre a 60° esso ha un potere rotatorio uguale, ma di segno contrario a quello che possiede a 20°. Finalmente dalle soluzioni acquose di zucchero di canna, si ricava sempre lo stesso valore per il potere rotatorio specifico, qualunque sia la temperatura alla quale si opera. Per quel che riguarda la diversità del solvente si può dire che è ben raro il caso che una sostanza conservi lo stesso potere rotatorio specifico nei vari liquidi che si adoperano a scioglierla: unico esempio in cui tale costanza si mantenga è lo zucchero di canna, che sciolto nell'acqua, alcool metilico, etilico, propilico e acetone, dà sensibilmente gli stessi valori per il potere rotatorio specifico [3]. In generale però il potere rotatorio specifico di una sostanza varia molto col variare del solvente: il tartrato di etile sciolto nell'alcool ha un potere rotatorio che

[1] *Studî sul potere rotatorio dei derivati della santonina* di G. Carnelutti e R. Nasini. Gazzetta chimica italiana. T. X, p. 256.

[2] Landolt. *Ueber die Umkehrung der Rotationsrichtung optisch activen Substanzen.* Berichte der deutschen Chemischen Gesellschaft. XIII, pag. 2329.

[3] Tollens, *Ueber die specifische Drehung des Rohrzuchers in verschiedenen Lösungsmitteln.* Berichte etc. XIII, 2297.

è circa la metà di quello che possiede quando è sciolto nell'acqua; e relazioni analoghe passano fra il potere rotatorio specifico della cinconidina in soluzione alcoolica, e di questa medesima in soluzione cloroformica. Talvolta anche il segno del potere rotatorio di una sostanza può variare col variare del solvente. Secondo le ultime ricerche di A. Becker l'asparagina e l'acido aspartico mentre sono levogiri in acido acetico diluito, divengono inattivi per una data concentrazione dell'acido, e passano poi a destrogiri quando la concentrazione è abbastanza forte. Analoghe differenze nel potere rotatorio specifico di una sostanza, cioè differenze nella intensità e nella direzione, si verificano per uno stesso solvente secondochè varia il rapporto fra la sostanza attiva ed il liquido che si adopera a scioglierla. Questo fatto interessante già era stato osservato da Biot fino dal 1838 studiando l'acido tartarico, il cui potere rotatorio specifico cresceva a misura che le soluzioni erano più diluite ed in modo che gli accrescimenti erano proporzionali alla quantità di acido tartarico contenuta in 100 parti di soluzione. Biot cercò di dare una spiegazione del fenomeno, ammettendo che si formassero delle combinazioni fra il solvente e la sostanza attiva, combinazioni molecolari debolissime, le quali avevano un potere rotatorio diverso da quello della sostanza adoprata; quindi le variazioni venivano ad avere la loro naturale spiegazione. Egli distinse varî casi a seconda che il liquido è o no sufficiente per formare quelle date combinazioni colla sostanza attiva, e a seconda dei casi arguì o che il potere rotatorio non varia coi solventi, o varia coi solventi rimanendo costante per il medesimo solvente, o varia colla concentrazione seguendo una legge che poteva esprimersi mediante una curva, o finalmente varia senzachè a priori si possa prevedere alcuna regolarità nelle variazioni (1).

Per lungo tempo si considerarono quali eccezioni queste variazioni del potere rotatorio specifico dell'acido tartarico, quando Biot nel 1852 studiando l'olio di trementina, la canfora ed altre sostanze, trovò che si comportano del tutto analogamente. Anzi osservò che non solo la concentrazione può far variare d'intensità il potere rotatorio, ma anche di segno come egli stesso esperimentò pel tartrato d'allumina, e come Pasteur poco prima aveva trovato per l'acido malico (2). È a notarsi come in questi ultimi tempi (luglio 1880) G. H. Schneider ha studiato accuratamente l'acido malico e il malato ammonico in soluzioni acquose ed ha ottenuto l'invertimento di segno nel potere rotatorio soltanto variando la concentrazione (3). Sembra che Schneider non conoscesse affatto i lavori di Biot e di Pasteur, giacchè dà come nuova una proprietà che già da trent'anni era nota. Malgrado tali ricerche, malgrado che Biot nel 1860 (4) in una sua Memoria che è il riassunto di tutti i suoi lavori, insistesse nell'affermare che il caso più generale è che il potere rotatorio specifico varii col solvente e colla concentrazione, pure si seguitò ad ammettere che vi sia proporzionalità assoluta fra la quantità di sostanza attiva e la deviazione che imprime al piano della luce polarizzata: quindi i saccarimetri basati appunto su questo principio, quindi molte e molte determinazioni

(1) Annales de Chimie et de Physique. 3e X, 385.

(2) Annales de Chimie et de Physique. 3e XXXVI, 257.

(3) G. H. Schneider, *Ueber die Umkehrung der Rotationsichtung der gewohnlichen Aepfelsaure durch blosse Aenderung der Concentration.* Berichte etc. XIII, 620.

(4) Annales de Chimie etc. 3e LIX, pag. 206.

date senza nemmeno accennare alla temperatura alla quale furono eseguite ed al solvente che fu impiegato. Gli studî di Oudemans, che in una lunga serie di esperienze trovò sempre variabile il potere rotatorio specifico a seconda del solvente e della concentrazione [1], le numerose osservazioni di Hesse [2] che di cinquanta sostanze non ne trovò pure una che nei diversi solventi conservasse lo stesso potere rotatorio, e pochissime che lo conservassero per diverse concentrazioni anche di poco differenti (1 a 10 gr. in 100 c. c.) e finalmente gli studî di Landolt contribuirono a fare sparire dalla scienza l'idea della proporzionalità assoluta. Si è cercato di dare una spiegazione di questo fenomeno, e di trovare delle relazioni fra la solubilità di una sostanza attiva e le variazioni del potere rotatorio. Oudemans jun. suppose che una sostanza si mostrasse più energicamente attiva in quel solvente in cui era più solubile: le numerose esperienze che egli fece confermavano tale sua ipotesi, che si trovò del resto subito contradetta dai lavori di Hoorweg sulla stricnina e l'acetato di morfina [3]. Il prof. Cannizzaro nei suoi studî sopra l'acido santonico e metasantonico giunse alle medesime conclusioni di Oudemans [4]. Al contrario per la parasantonide, se è vero che abbia il suo maggior potere rotatorio nel cloroformio in cui è solubilissima, è pur vero che si mostra più attiva nell'alcool che nell'anidride acetica, solvente senza confronto più energico. Quanto alla spiegazione del fenomeno, bene inteso nei casi in cui il liquido non abbia veruna azione chimica propriamente detta, già ho parlato della ipotesi di Biot. Biot ammetteva che si formassero delle combinazioni molecolari, le quali a somiglianza in questo delle combinazioni chimiche vere e proprie, avevano un potere rotatorio diverso da quello della sostanza primitiva. E questa ipotesi trovava conferma per l'acido tartarico nel fatto che le densità delle soluzioni variano in modo da mostrare come « l'acido contrae la massa d'acqua messa in presenza con una potenza di cui l'effetto diviene sempre meno sensibile a misura che l'acqua diviene relativamente più abbondante » [5]. Da altri si sono fatte altre ipotesi, cioè che il solvente inattivo non faccia che disturbare l'equilibrio della molecola attiva, facendo variare o la posizione relativa o la distanza o le oscillazioni degli atomi componenti: quindi viene modificata la dissimmetria nella densità dell'etere, dalla quale si ammette derivi il potere rotatorio. Le variazioni naturalmente saranno maggiori a misura che aumenta il liquido inattivo [6].

Si è andati anche più oltre: è noto come per le sostanze che possiedono il potere rotatorio quando sono cristallizzate, si è ammesso che le molecole sieno disposte ad elica nel cristallo, ed è ancor noto come le esperienze di Reusch [7] e di Sohncke [8] rendano tale ipotesi molto probabile. Per analogia Landolt ha supposto in questi ultimi tempi, che nelle molecole attive gli atomi siano disposti ad elica: e spiega

[1] Liebig's Annalen, 166, 65.
[2] Liebig's Annalen, 176, 89.
[3] Liebig's, Annalen, 166, 76.
[4] Cannizzaro, Gazz. chim. ital. T. V, pag. 347.
[5] Annales de Chimie et de Physique 3° LIX, p. 228.
[6] Landolt, *Das optische Drehungsvermögen* etc.
[7] Reusch, Pogg. Ann. 138, 628.
[8] Sohncke, Pogg. Ann. Erg. Bd. 8, 76.

poi l'influenza del solvente ammettendo che questo non faccia che disturbare l'elica, producendo l'inattività, quando ha ridotti tutti gli atomi in un piano, e facendo variare il senso del potere rotatorio quando ha svolto l'elica in senso inverso ([1]). Tali ipotesi, per quanto ingegnose, sono di quelle che non possono comprovarsi coll'esperienza, mentre quella di Biot si può sempre sottoporre ad un controllo, sia indagando se vi è stata contrazione nel liquido, sia, e meglio ancora, osservando i fenomeni termici che accompagnano la soluzione. In molti casi è certo che azione chimica vi è: così in uno degli esempi più spiccati della influenza che esercita la concentrazione nel caso della nicotina, si sa che in soluzione acquosa, ove le deviazioni specialmente si avvertono (da $[\alpha]_D = -133{,}85$ a $[\alpha]_D = -75{,}53$) la mescolanza di 24 gr. di nicotina con 6 gr. d'acqua fa salire la temperatura da 20° a 35° ([2]). Evidentemente qui formasi un idrato. Analoghe osservazioni sono a farsi per l'acido tartarico, per quel che sopra abbiamo riferito; e finalmente per molti acidi organici quando si sciolgono nei varî alcool, per molti eteri quando si sciolgono nell'acqua, nei quali casi è ovvio che un principio di reazione chimica possa stabilirsi. Del resto sono ancora troppo poco numerose le osservazioni su questo soggetto per poter venire a conclusioni certe.

Materiale delle osservazioni.

La parasantonide $C_{15} H_{18} O_3$, isomero della santonina, è una sostanza bianca, fusibile a 110° che cristallizza in bellissimi cristalli appartenenti al sistema trimetrico. Le forme di questi cristalli e le loro proprietà ottiche sono state completamente studiate dal prof. Struever ([3]). Si prepara trattando l'acido santonico coll'acido acetico glaciale, distillando quest'ultimo, e spingendo il riscaldamento sino a 260°. Mediante il carbonato sodico si separa l'acido santonico rimasto inalterato, e per ripetute cristallizzazioni, dall'etere si purifica la parasantonide ([4]). È notevole la grande stabilità del gruppo attivo dei composti santonici: spesso avviene che una temperatura elevata faccia sparire il potere rotatorio nelle sostanze organiche; invece, in questo caso, malgrado l'elevata temperatura, il potere rotatorio cresce enormemente, giacchè la parasantonide ha un potere rotatorio molecolare circa 12 volte maggiore di quello dell'acido santonico da cui deriva ([5]). La parasantonide è una sostanza perfettamente neutra: non sembra contrarre combinazione alcuna coi solventi ordinarî, quali il cloroformio, l'alcool, l'acido acetico. Si scioglie sopra tutto nel cloroformio, bene anche nell'anidride acetica e nell'etere, meno assai nell'alcool: pochissimo nell'acqua. Della purezza della sostanza che dovevo adoprare per le determinazioni, mi sono sempre assicurato, non servendomi che di quella di cui aveva preventivamente determinato il punto di fusione. La densità della parasantonide è stata da me determinata a 20° rispetto all'acqua a 4°: ho usato il metodo di Stolba, cioè mi sono servito di una soluzione acquosa di parasantonide satura pure a 20°, soluzione, della quale ho

([1]) Landolt, Berichte etc. XIII, 2329.

([2]) Landolt, *Das optische Drehungsvermögen* etc. pag. 71.

([3]) Atti della R. Acc. dei Lincei Vol. II, serie 3.ª

([4]) Cannizzaro e Valente. Atti della R. Acc. dei Lincei Vol. II, serie 3.ª

([5]) Carnelutti e Nasini, l. cit.

determinato previamente la densità. La sostanza era in piccolissimi cristalli. Per il calcolo della densità, riduzione al vuoto e a 4° ho adottato la formola:

$$d^t_4 = \frac{F}{W}(Q - \delta) + \delta$$

dove F = peso della sostanza a t;

W = peso dell'acqua a t;

Q = densità dell'acqua a t;

δ = densità media dell'aria = 0,00119.

Densità della soluzione satura a 20°.

	I.	II.	
F =	10,0006	10,0006	
W =	10,0002	10,0002	
d^{20}_4 =	0,9983	0,9983	media 0,9983

Densità della parasantonide a 20°.

	I.	II.	
F =	0,3501	0,4545	
W =	0,2908	0,3776	
d^{20}_4 =	1,2016	1,2013	media 1,2015.

Cloroformio. — Ho depurato del buon cloroformio del commercio agitandolo più volte con acido solforico concentrato, scaldandolo a reflusso sopra di esso acido, e distillando quindi. L'ho poi agitato con soluzione acquosa di carbonato sodico, lavato e rettificato più volte su cloruro di calce. La sua densità l'ho determinata nel modo descritto sopra.

F = 74,8354 W = 50,0868 d^{20}_4 = 1,49089.

Alcool. — Ho distillato sopra l'ossido di bario dell'alcool a 99,5 di Kahlbaun. Per la sua densità ho trovato:

F = 39,7216; W = 50,0868; d^{20}_4 = 0,79192.

Anidride acetica. — Ho distillato sopra acetato sodico fuso di recente dell'anidride acetica purissima. Per la sua densità ho trovato:

F = 54,1265; W = 50,0868; d^{20}_4 = 1,07868.

Modo di esperimentare.

Per queste ricerche mi sono servito di un apparecchio a penombre di Cornu fabbricato da Duboscq, col quale si possono fare letture coll'approssimazione di 0,05. Per sorgente luminosa ho adoperato ordinariamente la luce monocromatica gialla ottenuta mediante una energica lampada di Bunsen, che arroventava una rete di filo di platino, con sopra cloruro di sodio fuso. Per assorbire i raggi verdi, bleu, e violetti, interponeva tra la sorgente luminosa e il polarizzatore, una lastra tagliata da un cristallo di dicromato potassico. Per la luce rossa ho adoprato il cloruro di litio, interponendo in questo caso un vetro tinto con ossido di rame. Non ho potuto fare le osservazioni che in un solo quadrante, giacchè nell'istrumento un solo mezzo cerchio è graduato. A questa inesattezza ho cercato di supplire moltiplicando le osservazioni

e adoprando tubi di diversa lunghezza per ciascuna osservazione. I numeri che esprimono le deviazioni, sono la media di 40 letture, 20 per la determinazione dello zero, 20 per la determinazione delle deviazioni. Le osservàzioni furono sempre fatte alla temperatura di 20° che manteneva costante nei tubi mediante dell'acqua che vi faceva circolare attorno. Un termometro immerso nel liquido misurava la temperatura. La densità delle soluzioni le determinava mediante picnometri di diversa grandezza. Il più spesso mediante un picnometro della capacità di c. c. 50,228 il quale mi serviva nel tempo stesso per determinare il peso di sostanza attiva in 100 parti di soluzione. Per il calcolo della densità ho fatto uso della formula rammentata più sopra. Per la determinazione del p °/₀ di sostanza attiva ho ridotto al vuoto le pesate servendomi della formula [1]:

$$P = p + p.0012\left(\frac{1}{d} - 0,12\right)$$

dove P = peso della sostanza nel vuoto;
p = peso della sostanza nell'aria;
d = densità della sostanza;
0,0012 = densità media dell'aria;
0,12 = 1. diviso per il peso specifico dell'ottone.

Per il calcolo del potere rotatorio specifico mi sono servito delle formole:

$$[\alpha] = \frac{\alpha . 10^3}{l\,pd} \quad \text{o} \quad [\alpha] = \frac{\alpha . 10^3}{c\,l}$$

dove α = deviazione corrispondente al peso di sostanza impiegata;
l. = lunghezza del tubo in millimetri;
p = peso di sostanza attiva in 100 parti di soluzione;
d = densità della soluzione;
c = pd = peso di sostanza attiva contenuta in 100 c. c.

Ho preferito la prima formula ogniqualvolta mi proponeva di studiare l'influenza della concentrazione, giacchè nei casi in cui le variazioni si debbono esprimere per curve, essa si presta molto meglio dell'altre [2].

Trattandosi di una sostanza così energicamente attiva, che ha un potere rotatorio specifico non inferiore a quello di molte sostanze attive cristallizzate, mi sono permesso di prendere come unità il centimetro anzichè il decimetro, come si usa ordinariamente per i corpi attivi in soluzione.

Soluzioni cloroformiche. — La tavola I rappresenta le determinazioni fatte colle soluzioni cloroformiche: come si vede, le differenze del potere rotatorio specifico sono piccole, non offrono nessuna regolarità, e possono benissimo trovare la loro spiegazione negli inevitabili errori di osservazione.

La tavola IV mostra quale influenza abbiano i vari errori di osservazione sul potere rotatorio specifico di soluzioni diversamente concentrate. Questa tavola è stata fatta prendendo per modello quelle che si trovano nel trattato di Landolt. Nella tavola V accanto alla densità delle soluzioni determinate direttamente si trovano le

(1) Kohlrausch, *Leitfaden der praktischen Physik*. 3. Aufl. S. 29.
(2) Landolt, *Das optische* etc. pag. 55.

densità calcolate, prendendo per base le densità note della parasantonide, e del solvente. Come si vede, i valori calcolati sono assai vicini a quelli trovati, e starebbero a dimostrare come la soluzione si faccia senza che avvenga contrazione. Carnelutti ed io trovammo (loco citato) per $[\alpha]_D$ un valore pochissimo diverso: la piccola differenza è forse da attribuirsi alla non identità del cloroformio adoprato. In quel lavoro accennavamo già alla nessuna influenza della concentrazione nel potere rotatorio specifico de' molti derivati santonici in soluzione cloroformica; le mie ricerche dimostrano ciò all'evidenza e danno un grande appoggio alle conclusioni che noi traemmo.

Soluzioni alcooliche. — Le determinazioni sono riportate nella tavola II. Le differenze sono abbastanza forti e tali da non potersi attribuire ad errori di osservazione, come risulta dalla tavola IV. Si vede come per concentrazioni molto deboli si hanno valori che si avvicinano assai a quelli ricavati dalle soluzioni cloroformiche. Col crescere della concentrazione le variazioni nel potere rotatorio specifico si vanno facendo sempre più piccole. La poca solubilità della parasantonide nell'alcool mi ha impedito di fare soluzioni più concentrate, come sarebbe stato utile affine di poter costruire la curva.

Soluzioni nell'anidride acetica. — Già era stato osservato dal prof. Carnelutti, che la parasantonide in soluzione nell'anidride acetica ha un potere rotatorio minore, che in soluzione cloroformica. Le tavole III e V dimostrano come per le soluzioni dell'anidride acetica avvenga all'incirca lo stesso di quello che avviene per le soluzioni cloroformiche. Però non si può concludere nulla di decisivo, variando la concentrazione in limiti troppo ristretti.

Esperienze colla luce rossa. — Le esperienze con la luce rossa del litio sono difficilissime a farsi perchè, a cagione del suo debole potere illuminante non permette di fare letture esatte. Come media di molte osservazioni fatte con soluzioni cloroformiche, dò il numero:

$$[\alpha]_{Li} = 62,59.$$

Il potere dispersivo della parasantonide in soluzione cloroformica sarebbe quindi:

$$\frac{[\alpha]_D}{[\alpha]_{Li}} = 1,4221$$

numero assai vicino a quelli che si ricavano pel quarzo e per lo zucchero di canna.

Azione della temperatura. — 1 grammo di parasantonide sciolto a 0° in cloroformio nel picnometro della capacità di c. c. 50,228 dava una deviazione + di 39,02 nel tubo lungo mm. 219,65 tenuto pure a 0°. Ripetuta l'esperienza a 40° adoprando pure un grammo di sostanza, ho avuto una deviazione di + 39,00. Si può dunque dire che la temperatura in questi limiti abbastanza estesi, non ha nessuna influenza. È notevole come un fatto analogo si verifichi appunto per lo zucchero di canna, il cui potere rotatorio specifico, come quello della parasantonide varia pochissimo col variare dei solventi e della concentrazione.

Azione dell'acido borico. — 1 grammo di parasantonide sciolta in alcool nel solito picnometro, dava a 20° una deviazione di + 36,64. Una eguale deviazione si aveva sciogliendo con alcool nello stesso volume e alla stessa temperatura, una mescolanza di 1 grammo di parasantonide con 1 grammo di acido borico.

CONCIUSIONI

Da quanto sopra ho esposto, e dalla ispezione delle tavole resulta:

1. Che il potere rotatorio specifico della parasantonide sciolta nel cloroformio, è indipendente affatto dalla concentrazione; — 2. Che la concentrazione fa variare il potere rotatorio specifico della parasantonide in soluzione alcoolica: per concentrazioni debolissime si hanno per $[\alpha]_D$ valori molto prossimi a quelli ricavati dalle soluzioni cloroformiche; — 3. Che la parasantonide in soluzione nell'anidride acetica, ha un potere rotatorio specifico minore che nelle soluzioni cloroformica e alcoolica, e indipendente, nei limiti considerati, dalla concentrazione; — 4. Che il potere dispersivo della parasantonide in soluzione cloroformica (luce gialla del sodio, luce rossa del litio) è circa 1,4221; — 5. Che fra 0° e 40° il potere rotatorio specifico della parasantonide in soluzione cloroformica rimane costante; — 6. Che l'acido borico non altera affatto il potere rotatorio specifico della parasantonide in soluzione alcoolica.

Richiamo l'attenzione sopra il fatto che la soluzione cloroformica nei limiti estesi che ho considerato, non offre per il potere rotatorio specifico variazioni apprezzabili; al contrario l'alcoolica in limiti molto più ristretti offre variazioni sensibilissime e tali da non potersi attribuire ad errori di osservazione. La cosa è così interessante, che non credo inutile di spiegare quali importanti questioni vi si connettano. È noto che si son fatti molte volte dei tentativi per indagare se esistano relazioni fra i poteri rotatori molecolari delle sostanze isomere e dei derivati di una medesima sostanza. Per potere rotatorio molecolare si designa il prodotto del potere rotatorio specifico per il peso molecolare diviso per 100. Più volte si è creduto d'avere scoperto delle leggi [1] e tra queste specialmente sono note le così dette leggi di Krecke, ma Oudemans jun. per il primo fece notare che i poteri rotatori specifici, e per conseguenza i molecolari, sono valori troppo dipendenti dal solvente, dalla concentrazione e dalla temperatura per poter essere paragonati tra di loro. Come espediente migliore per avvicinarsi al vero, Oudemans proponeva che si comparassero i poteri rotatori molecolari che si ricavavano da soluzioni infinitamente diluite, quasichè in questo caso l'influenza del solvente si venisse ad eliminare [2]. Tali poteri rotatori potevano dedursi facilmente quando essendosi costruite delle curve in cui le ordinate rappresentassero i poteri rotatori specifici e le ascisse il per cento di sostanza attiva (p) si poneva $p=o$. Landolt, studiando l'olio di trementina, il tartrato di etile, la nicotina e la canfora, specialmente tenendo dietro alle variazioni che subisce il potere rotatorio delle mescolanze, trovò che esprimendo per mezzo delle ordinate al solito il potere rotatorio specifico e per mezzo delle ascisse la quantità di solvente inattivo contenuto in 100 parti di soluzione (q) si avevano delle curve le quali partivano tutte da uno stesso punto, o in altri termini nella equazione della curva:

$$[\alpha] = A + Bq + Cq^2 + \text{ecc.} \ldots$$

il valore di A resultava presso a poco costante per qualsiasi solvente, e per qualsiasi concentrazione, e corrispondeva al potere rotatorio specifico della sostanza direttamente determinato. Da queste esperienze Landolt dedusse che il potere rotatorio specifico

(1) Per tutto quel che riguarda la storia di questo argomento V. Carnelutti e Nasini, *Studî* etc.

(2) Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft. VI, pag. 144.

d'una sostanza in soluzione non varia mai a salti ma regolarmente, e disse di più che per fare uno studio comparato dei poteri rotatori molecolari non vi era altro mezzo che determinare per ciascuna sostanza il valore esatto di A. Il quale valore non può con certezza stabilirsi che per sostanze facilmente solubili in diversi solventi, solo in questi casi essendo possibile di segnare molti punti della curva. Ora il fatto da me notato non sembra accordarsi con queste vedute. Il potere rotatorio specifico della parasantonide non varia affatto in soluzione cloroformica; quindi per quel che dice lo stesso Landolt è a ritenersi come il potere rotatorio vero della sostanza. Invece per le soluzioni alcooliche ho delle variazioni, ma tali che per $q = o$ non potrò mai avere il valore che ricavo dalle soluzioni cloroformiche, perchè tal valore l'ottengo approssimativamente quando pongo $q = 100$. È notevole che appunto in questi ultimi tempi. Th. Thomsen ha pubblicato diverse Memorie cercando di dimostrare che solo per concentrazioni debolissime per $c = o$ si verifica la così detta legge dei multipli di Krecke: ciò indicherebbe che i poteri rotatori specifici veri sono quelli che si deducono dalle soluzioni più diluite come aveva sospettato Oudemans (1). I lavori di Thomsen sono stati oggetto di una critica severa per parte di Landolt. Pur troppo però i fatti sono ancor troppo poco numerosi per poter decidere se la teoria di Landolt sia o no generalmente applicabile. Lo studio che mi propongo di fare sotto questo punto di vista delle santonine isomere darà, spero, un piccolo contributo per dilucidare questa importante questione. Certo è, che ove non si voglia ammettere che per concentrazioni debolissime si possa avere in qualche caso il potere rotatorio specifico vero di una sostanza, bisogna ammettere, o che le curve che rappresentano le variazioni del potere rotatorio specifico raggiungano un massimo (2) e per $q = o$ e $q = 100$ abbiano la stessa ordinata, oppure che una sostanza sciolta in un liquido ha un potere rotatorio specifico costante indipendente dalla concentrazione, ma che pure è diverso dal vero e da quello che affetta in un altro solvente. Il qual caso veramente era stato già previsto da Biot. Noterò infine come l'illustre prof. Landolt nella sua critica ai lavori di Thomsen sembra che inclini a credere che forse i corpi difficilmente solubili in un dato solvente siano pochissimo influenzati dal liquido inattivo nel quale conserverebbero così il loro vero potere rotatorio. Landolt prosegue dicendo che bisogna però istituire apposite esperienze, specialmente sciogliendo le sostanze attive in diversi solventi, in alcuni dei quali siano solubilissimi e in altri poco solubili, per notare le differenze (3).

Le esperienze da me fatte non confermano tali vedute: la parasantonide è pochissimo solubile nell'alcool, il quale nondimeno ha una decisa azione sul suo potere rotatorio specifico: al contrario il cloroformio in cui è solubilissima, è sotto questo riguardo del tutto inattivo.

(1) Th. Thomsen, *Ueber multipla in dem optischen Drehungsvermögen der Kohleydrate.* Berichte etc. XIII, pag. 2168 etc.

(2) Le variazioni del potere rotatorio specifico di alcuni alcaloidi sciolti in mescolanze di due liquidi sembra realmente che debbano esprimersi per mezzo di curve che presentano un massimo. Oudemans Liebig's Ann. 182. 51. 166. 70.

(3) H. Landolt, *Bemerkungen zu den Abhandlungendes Hern*; Thomsen, *Ueber multipla in dem optischen Drehungsvermögen organischer Verbindungen.* Berichte etc. XIV, pag. 296.

I. *Determinazione del potere rotatorio specifico della parasantonide in soluzione cloroformica rispetto alla luce del sodio alla temperatura di 20.°*

N.°	p peso di sostanza attiva in 100 p di soluzione	q peso di solvente in 100 p di soluzione	d_4^{20} densità della soluzione a 20° rispetto all'acqua a 4°	$c=pd$ peso di sostanza attiva in 100 cc	Deviazione osservata direttamente col tubo lungo mm. 219,69.	α per il tubo lungo 219,65	Deviazione osservata direttamente col tubo lungo mm. 100,53	α per il tubo lungo mm. 100,53	$[\alpha]_D$
1	0,1396	99,8604	1,4907	0,2085	+ 4,1	+ 4,1	—	—	+89,65
2	0,1416	99,8584	1,4906	0,211	+ 4,15	+ 4,15	—	—	+89,54
3	0,2452	99,7548	1,4905	0,3655	+ 7,1	+ 7,1	—	—	+88,43
4	0,6439	99,3561	1.4888	0,9586	+18,77	+18,77	—	—	+89,13
5	1,3033	98,6967	1,4861	1,9368	+37,95	+37,95	—	—	+89,21
6	2,5183	97,4817	1,4831	3,7349	+72,85	+72.85	—	—	+88,79
7	4,4354	95,5646	1,4758	6,5457	—52,02	+127,98	+58,62	+58,62	+89.01
8	5.1324	94.8676	1,4735	7,5627	—31,49	+148,51	+67.96	+67.96	+89,39
9	8,7664	91,2336	1,4619	12,8154	+70,30	+250,30	—65,43	+114,57	+88.92
10	20,3503	79,6497	1,4227	28,9527	+26,87	+566,87	+79,45	+259,45	+89,14
11	22,8125	77,1875	1,4134	32,2432	—89,75	+630,25	—71,57	+288,43	+88,99
12	31,0759	68,9241	1,3873	43,1106	—56,00	+844,00	+26,10	+386,10	+89,13
13	47,9809	52,0191	1,3291	63,7724	—15,51	+1244,49	+29,60	+569,60	+88,85

II. *Determinazione del potere rotatorio specifico della parasantonide in soluzione alcoolica rispetto alla luce del sodio alla temperatura di 20.°*

N.°	p peso di sostanza attiva in 100 p di soluzione	q peso di solvente in 100 p di soluzione	d_4^{20} densità della soluzione a 20° rispetto all'acqua a 4°	$c=pd$ peso di sostanza attiva in 100 cc	Deviazione osservata direttamente col tubo lungo mm. 219,65	α per il tubo lungo 219,65	Deviazione osservata direttamente col tubo lungo mm. 100.53	α per il tubo lungo mm. 100,53	$[\alpha]_D$
1	0.2586	99.7413	0,7929	0,2051	+ 4	+ 4	—	—	+88,80
2	0,2737	99,7263	0,7930	0,2170	+ 4,2	+ 4,2	—	—	+88,13
3	0,678	99,3220	0,7937	0,5382	+10,22	+10,22	—	—	+86,16
4	0,7016	99,2984	0,7941	0,5571	+10,43	+10.43	—	—	+85,23
5	1,534	98,466	0,7964	1,2216	+22,50	+22,50	—	—	+83,70
6	3,0115	96,9885	0,8008	2,4114	+45,12	+45,12	—	—	+83,29
7	3,2849	96,7151	0,8014	2,6324	+48,42	+48.42	—	—	+83,74
8	8,2743	91,7257	0,8155	6,7477	—56,30	+123,70	+56,57	+56,57	+83,45
9	8,4929	91,5071	0,8158	6,9289	—53,08	+126,92	+58,10	+58,10	+83,39

III. *Determinazione del potere rotatorio specifico della parasantonide in soluzione nell'anidride acetica rispetto alla luce del sodio alla temperatura di 20.°*

N.°	p peso di sostanza attiva in 100 p di soluzione	q peso di solvente in 100 p di soluzione	d_4^{20} densità della soluzione a 20° rispetto all'acqua a 4°	$c = p\,d$ peso di sostanza attiva in 100 cc	Deviazione osservata direttamente col tubo lungo mm. 219,65	α per il tubo lungo 219,65	Deviazione osservata direttamente col tubo lungo mm. 100,53	α per il tubo lungo mm. 100,53	$[\alpha]_D$
1	0,3559	99,6441	1,0791	0,3841	+ 7	+ 7	—	—	+82,98
2	3,0008	96,9992	1,0818	3,2463	+58,53	+58,53	—	—	+82,08
3	19,0893	80,9157	1,0968	20,9317	+22,65	+582,65	—4,85	+175,15	+83,23

IV. *Influenza dei diversi errori di osservazione sul potere rotatorio specifico della parasantonide.*

Errori	Soluzioni cloroformiche						Soluzioni alcooliche						Soluzioni nell'anidride acetica					
	Concentrazione = 0,2085			Concentrazione = 63,7724 (¹)			Concentrazione = 0,2051			Concentrazione = 6,9289			Concentrazione = 0,3841			Concentrazione = 20,9317		
	α	c	$[\alpha]_D$	α	c	$[\alpha]_D$	α	c	$[\alpha]_D$	α	c	$[\alpha]_D$	α	c	$[\alpha]_D$	α	c	$[\alpha]_D$
	+4,1	0,2085	89,65	+ 1244,49	63,7724	88,85	+4	0,2051	88,80	+126,92	6,9289	83,39	+7	0,3841	82,98	+582,65	20,9317	83,23
$\alpha = 0{,}05$	4,15	0,2085	90,74	+ 7224,54	63,7724	88,86	+4,05	0,2051	89,90	+126,97	6,9289	83,72	+7,05	0,3841	83,55	+582,70	20,9317	83,24
$c = 0{,}005$	+4,1	0,2133	87,52	+ 1244,49	63,7774	88,83	+4	0,2100	86,69	+126,92	6,9339	83,22	+7	0,3891	81,90	+582,65	20,9367	83,20

(¹) Per concentrazioni forti l'errore per α è maggiore di 0,05 a cagione dei fenomeni di dispersione, che adoprando la luce del sodio, inevitabilmente si presentano.

V.

N.°	Soluzioni eloroformiche Densità		Soluzioni alcooliche Densità		Soluz. nell'anidride acetica Densità	
	Trovato	Calcolato	Trovato	Calcolato	Trovato	Calcolato
1	1,4907	1,4906	0,7929	0,7929	1,0791	1,0791
2	1,4906	1,4905	0,7930	0,7930	1,0818	1,0824
3	1,4905	1,4902	0,7937	0,7946	1,0968	1,1022
4	1,4888	1,4890	0,7941	0,7948		
5	1,4861	1,4871	0,7964	0,7981		
6	1,4831	1,4836	0,8008	0,8043		
7	4,4758	1,4781	0,8014	0,8053		
8	1,4735	1,4760	0,8155	0,8248		
9	1,4619	1,4655	0,8158	0,8258		
10	1,4227	1,4320				
11	1,4134	1,4249				
12	1,3873	1,4009				
13	1,3291	1.3521				

Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie.

Memorie due di G. VERONESE

approvate per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 febbraio 1881.

MEMORIA I.

In questa Memoria dimostro e completo i teoremi della mia prima Nota, pubblicata nei Transunti della r. Accademia dei Lincei, nel mese di aprile, testè passato. Se di un punto P si trova il piano polare π rispetto ad una superficie di 2° grado S_1 e di questo il polo P_1 rispetto ad un'altra superficie di 2° grado S_2, di questo il piano polare π_1 rispetto alla S_1 e così di seguito, si ottengono due gruppi projettivi l'uno di punti e l'altro di piani (¹), che non si chiudono; vale a dire nessun punto o piano, così ottenuto coincide col punto o piano di partenza. La condizione affinchè l'ennesimo punto del gruppo debba cadere in P, richiede che le due superficie S_1 S_2 abbiano una posizione speciale; data infatti la S_1 ci sono altre $n^3—1$ superficie di 2° grado, che formano con essa un *ciclo* di n^3 superficie; per due qualunque delle quali l'ennesimo punto del gruppo cade in P. Se si dispongono le n^3 superficie in un dato ordine e di un punto P si trova il piano polare rispetto alla 1ª, di questo il polo rispetto alla 2ª, di questo il piano polare rispetto alla terza e così via, si ottengono due cicli uno di n^3 punti ed uno di n^3 piani, indipendenti dall'ordine delle n^3 superficie e che perciò sono polari reciproci rispetto a ciascuna di esse. Nel piano si ottiene con analoghe considerazioni un ciclo di n^2 coniche. In questa Iª Memoria studio le proprietà generali dei gruppi projettivi in relazione con questi cicli di superficie di 2° grado e di coniche, di punti e di piani ecc.

Considero i casi speciali in cui $n=2$ ed $n=3$ e ne faccio un'applicazione alla curva del 3° ordine piana. Nella IIª Memoria sviluppo invece il caso $n=2$ nello spazio (²).

PARTE I.

1. Teorema I. S e s i c o n s i d e r a n o d u e c o n i c h e C_1 C_2 q u a l u n q u e e d i u n p u n t o P_1 s i d e t e r m i n a l a p o l a r e r i s p e t t o a l l a C_1, d i q u e s t a i l p o l o r i s p e t t o a l l a C_2, d i q u e s t o l a p o l a r e r i s p e t t o a l l a C_1 e così

(¹) Dei gruppi projettivi aperti e chiusi di punti si sono occupati, per quanto so, Battaglini nelle sue tre Memorie: *Sulle involuzioni dei diversi ordini*; r. Acc. di Napoli, vol. I, II, VII; Clebsch e Gordan nei Math. Annalen, vol. I, *Ueber biter. Formen* e Lüroth nei Math. Annalen, vol. XI e XIII.

(²) Vedi Indice p. 343.

di seguito, si ottiene un gruppo projettivo di punti $P_1 P_2 ... \equiv (P)$ e un gruppo projettivo di polari $p_1 p_2 ... \equiv (p)$, che non si chiudono qualunque sia il numero di volte, che si ripete l' operazione. Essi sono polari reciproci, rispetto alle due coniche.

Chiamo questa operazione trasformazione polare del punto P_1 rispetto alle due coniche, disposte nell' ordine $C_1 C_2$; se si tratta di più coniche, le trasformazioni di un punto P_1 sono tante quante le permutazioni, che si ottengono dal numero delle coniche.

Siano infatti due coniche C_1 C_2 riferite entrambe al triangolo conjugato comune cioè:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad C_1$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 \quad C_2 .$$

In questo caso sono due le trasformazioni polari cioè $C_1 C_2$ e $C_2 C_1$. Consideriamo la $C_1 C_2$. Del punto P_1 adunque faccio l'operazione indicata nel teorema, ottengo così un gruppo di punti $P_1 P_2 P_3 \ldots P_{n+1} \ldots$ che hanno le coordinate della forma:

$$y_i, \ \frac{1}{a_i} y_i, \ \ldots, \ \frac{1}{a_i^n y_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

e un gruppo di rette $p_1 p_2 ... p_{n+1}$ di coordinate:

$$y_i, \ \frac{1}{a_i} y_i, \ \ldots, \ \frac{1}{a_i^n} y_i .$$

L' altra trasformazione polare, cioè $C_2 C_1$, ci dà invece un gruppo di punti $P_1 P_{-1} P_{-2} .... P_{-n-1}$, di coordinate:

$$y_i \quad a_i y_i \ \ldots \ a_i^n y_i$$

e un gruppo di rette $p_{-1} p_{-2} \ldots p_{-n}$, di coordinate

$$a_i y_i \quad a_i^2 y_i \ \ldots \ a_{in} y_i$$

Nell'una o nell'altra trasformazione non è possibile, che P_{n+1} o P_{n-1} coincida con P_1, almeno che non siano soddisfatte le condizioni $a_i^n = 1$; caso che considereremo in seguito. I punti $P_1 P_2 P_3 ... P_{n+1} ...$ si chiamano i consecutivi del punto P_1 nella 1ª trasformazione e $P_{-1} P_{-2} ...$ i consecutivi nella 2ª. I punti P_2 nella 1ª e P_{-1} nella 2ª si chiamano i punti immediatamente consecutivi di P_1. Analogamente per le rette. Osservo però che, mentre i punti $P_1 P_2 P_3 ... P_n ...$ sono consecutivi nella 1ª trasformazione $C_1 C_2$, le rette $p_1 p_2 p_3 .... p_n$ sono consecutive nella 2ª. Le due trasformazioni $C_1 C_2$, $C_2 C_1$ sono rappresentate dalle seguenti equazioni

$$\mu x_i = a_i^n y_i \tag{1}$$

ove n è un numero intero (+) o (—).

Tutti i punti P formano un gruppo (P) e tutte le rette p un gruppo (p). È chiaro che questi due gruppi sono polari reciproci rispetto alle due coniche $C_1 C_2$. I punti del gruppo P, formano una serie di punti corrispondenti di due piani punteggiati projettivi, tale cioè che se di un punto di (P) si costruisce il corrispondente nel 2° piano, di questo considerato come appartenente al 1° piano si determina il corrispondente nel 2° e così via, si ottiene lo stesso gruppo (P). Il triangolo conjugato delle due coniche $C_1 C_2$ è il triangolo dei punti uniti dei due piani projettivi. Analogamente per le rette del gruppo (p). Se il punto P_1 è situato su uno

dei lati del triangolo fondamentale, evidentemente tutti i punti del gruppo (P) sono situati su quel lato, e se la retta p passa per uno dei vertici del triangolo fondamentale, tutte le rette di (p) passano per quel vertice.

Quello che si è fatto per un punto P_1 e per una retta p_1, si può naturalmente fare per una curva L qualunque del piano; ad essa corrisponde un gruppo projettivo di curve (L), che vengono descritte dai punti consecutivi di L.

Il gruppo (P) è determinato completamente da un suo punto qualunque. È chiaro che se una retta q o curva L passa per uno o più punti del gruppo (P), le rette del gruppo (q) o curva del gruppo (L) passano rispettivamente per altrettanti punti del gruppo (P). In una retta qualunque q, ci sono sempre due punti immediatamente consecutivi di un dato gruppo di punti, infatti basta trovare di q i poli rispetto alle C_1 e C_2 e della loro retta congiungente p_1 i poli P_1 e P_2 rispetto a C_1 e C_2. Questi sono due punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P) situati sulla q. Dunque

Teorema II. Un gruppo (P) è determinato da uno qualunque dei suoi punti.

Teorema III. Se una retta q o curva L passa per uno o più punti di un gruppo (P), le rette del gruppo (q) o le curve del gruppo (L) passano per altrettanti punti di (P).

Teorema IV. Se un punto del gruppo (P) è situato su uno dei lati del triangolo conjugato comune alle due coniche C_1, C_2, tutti i punti del gruppo cadono sul medesimo lato. Le rette del gruppo (p) polare reciproco di (P) rispetto a C_1 e C_2, passano tutte pel vertice opposto.

Teorema V. In una retta qualunque ci sono sempre due punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P).

Come ad una curva L qualunque, corrisponde un gruppo (L), così alle due coniche fondamentali $C_1 C_2$ corrispondono pure due gruppi projettivi di coniche (R_1) e (R_2). La polare reciproca della C_2 rispetto a C_1 è $\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 0 \equiv C_3$.

La polare del punto P_1 $(y_1\, y_2\, y_3)$ rispetto a C_1 è p_1, di questa il polo rispetto a C_3 è P_{-1}, di questo la polare rispetto a C_1 è p_{-1}, di questa il polo rispetto a C_3 è P_{-2} ecc., onde i punti consecutivi di P_1 nella trasformazione $C_1 C_3$ sono $P_{-1} P_{-2} \ldots P_{-n} \ldots$ La polare invece di P_1 rispetto a C_3, è p_2, di questa il polo rispetto a C_1 è P_2 ecc. onde i consecutivi di P_1 nella trasformazione polare $C_3 C_1$ sono $P_2 P_3 \ldots P_n \ldots$, dunque i due gruppi (P) e (p) sono anche polari reciproci rispetto a C_3. La polare reciproca di $C_3 C_1$ rispetto a C_2 è

$$a_1^3 x_1^2 + a_2^3 x_2^2 + a_3^3 x_3^2 = 0$$

di questa la polare reciproca C_5 rispetto a C_1 è

$$\frac{1}{a_1^3} x_1^2 + \frac{1}{a_2^3} x_2^2 + \frac{1}{a_3^3} x_3^2 = 0 .$$

Le curve $C_3 C_5$ ecc. sono le consecutive di C_2 nella trasformazione $C_1 C_2$, e le consecutive di essa nella trasformazione $C_2 C_1$ sono precisamente $C_2 C_4 C_6$ ecc. Il

gruppo (L) corrispondente ad una curva L non contiene alcuna delle polari reciproche delle curve di esso rispetto ad una qualunque delle coniche fondamentali $C_1 C_2$; infatti se ne contenesse una le conterrebbe tutte, proprietà che ha luogo solamente quando L coincide con una delle coniche $C_1 C_2$. Mentre le coniche del gruppo (R_2), corrispondente a C_2, si mettono sotto la forma:

$$a_1^{2m+1} x_1^2 + a_2^{2m+1} x_2^2 + a_3^{2m+1} x_3^2 = 0 \qquad (1)$$

ove m è un numero intero (+) o (—), quelle del gruppo (R_1) corrispondente a C_1 sono rappresentate dall'equazione:

$$a_1^{2m} x_1^2 + a_2^{2m} x_2^2 + a_3^{2m} x_3^2 = 0 \qquad (2)$$

Da queste equazioni risulta facilmente che la polare reciproca di una conica per es. di (R_1) rispetto ad una conica di (R_1) è una conica dello stesso gruppo, e rispetto ad una conica di (R_2) è pure una conica di (R_1).

Consideriamo due coniche per es. di (R_2) cioè

$$a_1^{2m+1} x_1^2 + a_2^{2m+1} x_2^2 + a_3^{2m+1} x_3^2 = 0 \qquad (3)$$

$$a_1^{2s+1} x_1^2 + \ldots = 0 \qquad (4)$$

la polare di P_1 $(y_1 y_2 y_3)$ rispetto alla (3) ha le coordinate della forma $a_i^{2m+1} y_i$, le coordinate del polo di essa rispetto alla (4) sono $a_i^{2(m-s)} y_i$, le coordinate della polare di questo rispetto alla (3) sono $a_i^{2(2m-s)+1} y_i$, mentre quelle del suo polo rispetto alla (4) sono $a_i^{4(m-s)} y_i$. Da ciò si vede, che i consecutivi di P_1 nella trasformazione (3) (4) sono:

$$P_{2(m-s)}, \quad P_{4(m-s)}, \quad P_{6(m-s)} \text{ ecc.}$$

nella trasformazione (4) (3) sono invece

$$P_{2(s-m)}, \quad P_{4(s-m)}, \quad P_{6(s-m)} \text{ ecc.}$$

Questi sono punti del gruppo (P) che corrisponde a P rispetto a $C_1 C_2$. La differenza degli indici di due punti consecutivi è costante, cioè $2(m-s)$.

Si abbiano ora due coniche una appartenente ad (R_1) e l'altra ad (R_2) per se.

$$a_1^{2m+1} x_2^2 + \ldots\ldots = 0 \qquad (5)$$

$$a_1^{2s} \; x_1^2 + \ldots\ldots = 0 \qquad (6)$$

La polare di P_1 rispetto alla 2ª ha per coordinate $a_i^{2m+1} y_i$, quelle del polo di essa rispetto alla 2ª sono $a_i^{2(m-s)+1} y_i$, quelle della polare di questo rispetto alla 1ª sono $a_i^{2(2m-s)+1} y_i$ ecc., onde i consecutivi di P_1 nella trasformazione (5) (6) sono:

$$P_{2(m-s)+1}, \quad P_{4(m-s)+2}, \quad P_{6(m-3)+3} \text{ ecc.}$$

e quelle nella trasformazione (6) (5) sono

$$P_{2(s-m)-1}, \quad P_{4(s-m)-2}, \quad P_{6(m-3)+3} \text{ ecc.}$$

Questi sono pure punti dello stesso gruppo (P) e gli indici dei punti consecutivi, immediati, dànno invece una differenza dispari costante.

Però non sono due sole le coniche rispetto alle quali questi punti formano un gruppo projettivo, perchè basta avere

$$m - s = \text{cost.}$$

e dato un valore intero qualunque ad m possiamo ricavare subito s. Dunque:

Teorema VI. Se di una delle coniche fondamentali C_1 C_2 per es. C_2 si trova la polare reciproca C_3 rispetto a C_1; i punti immediatamente consecutivi di P_1 nelle trasformazioni $C_1 C_2$ e $C_1 C_3$ sono gli stessi.

Teorema VII. Come una curva L dà luogo ad un gruppo projettivo di curve (L) rispetto alle due coniche C_1 C_2, così C_1 C_2 dànno luogo a due gruppi di coniche (R_1) ed (R_2). — Essi sono reciproci di sè stessi rispetto a C_1 e C_2.

La polare reciproca di una conica di (R_1) rispetto ad una conica di (R_1) è un'altra conica di esso, la polare reciproca invece rispetto ad una conica di (R_2) è pure una conica di (R_1).

Teorema VIII. Una serie di punti del gruppo (P), ove gli indici di due punti consecutivi (i quali indicano il loro posto in (P)) dànno una differenza pari costante, dà un nuovo gruppo projettivo rispetto ad infiniti gruppi di due coniche di (R_1) e di (R_2). Se invece gli indici dànno una differenza dispari costante, i punti della serie formano un gruppo projettivo di punti rispetto ad infiniti gruppi di due coniche, l'una appartenente ad (R_1) e l'altra ad (R_2).

2. Ritorniamo al gruppo (P), che corrisponde ad un punto P_1 rispetto alle due coniche C_1 C_2. Se il punto P_1 cade per es. in C_1, allora la polare di P_1 rispetto ad essa, ossia p_1, è tangente a C_1; di p_1 il polo rispetto a C_2, è il punto P_2, e di P_1 la polare rispetto a C_2, è p_{-1}; p_{-1} passa dunque per P_2, onde $P_1 P_2$ sono conjugati rispetto a C_2. Di P_2 la polare rispetto alla C_1 è p_2, e il polo di p_{-1} è P_{-1}, dunque $P_{-1} P_2$ sono conjugati rispetto a C_1. Il polo di p_2 e la polare di P_{-1} rispetto a C_2 sono P_3 e p_{-2}, onde $P_{-1} P_3$ sono conjugati rispetto a C_1 e così seguitando si trovano le seguenti coppie di punti e rette conjugate

rispetto a	C_1	$P_1 P_1$,	$P_2 P_{-1}$,	$P_3 P_{-2}$ ...	$P_m P_{-m+1}$
		$p_1 p_1$,	$p_2 p_{-1}$,	$p_3 p_{-2}$ ...	$p_m p_{-m+1}$
»	C_2	$P_1 P_2$,	$P_{-1} P_3$,	$P_{-2} P_4$ ...	$P_{-m+1} P_{m+1}$
		$p_1 p_{-1}$,	$p_2 p_{-2}$,	$p_3 p_{-3}$ ...	$p_m p_{-m}$

Se P_1 è situato invece su C_2 allora p_{-1} è tangente a C_2, il polo di p_{-1} rispetto a C_1 ossia P_{-1} è situato in p_1, perciò P_1 e P_{-1} sono conjugati rispetto a C_1, così anche p_1 e p_{-1}. Il polo di p_1 e la polare di P_{-1} rispetto a C_2, sono P_2 e p_{-2}, onde P_2 e P_{-1} sono conjugati rispetto a C_2 e così p_1 e p_{-2}. Così continuando si vede, che sono conjugati

rispetto a	C_1	$P_1 P_{-1}$,	$P_2 P_{-2}$ ...	$P_m P_{-m}$
		$p_1 p_{-1}$,	$p_2 p_{-2}$ ...	$p_m p_{-m}$
»	C_2	$P_1 P_1$,	$P_2 P_{-1}$ ...	$P_m P_{-m+1}$
		$p_4 p_{-2}$,	$p_2 p_{-3}$ ...	$p_m p_{-m-1}$

Tanto in un caso che nell'altro i punti del gruppo (P) sono due a due conjugati sia rispetto a C_1 come a C_2. Ma se P_1 cade in C_1 i punti consecutivi di esso in (P) sono situati rispettivamente sulle coniche di (R_1), e perciò i punti del gruppo (P) sono due a due conjugati rispetto alle coniche di (R_1) e di (R_2) (Vedi Teor. VI, VII, VIII).

Supponiamo ora il caso che in un dato gruppo (P) il punto P_1 sia conjugato di P_m per es. rispetto a C_2. Allora la polare di P_m rispetto a C_2, ossia p_{m-1} deve contenere P_1 e la polare di P_1 rispetto a C_2, ossia p_{-1}, deve passare per P_m. La p_{m-1} ha

per polo rispetto a C_1 il punto P_{m-1} e P_1 ha per polare la retta p_1; dunque P_1 e P_{m-1} sono conjugati rispetto a C_1; così la polare di P_{m-1} rispetto a C_2 è p_{m-2} e il polo di p_1 è P_2, dunque P_2 P_{m-1} sono conjugati rispetto a C_2; seguitando così si trova che sono conjugati

rispetto a C_2 $\quad P_1 P_m, \quad P_2 P_{m-1}, \quad P_3 P_{m-2} \ldots P_r P_{m-r+1}$

» $\quad C_1$ $\quad P_1 P_{m-1}, P_2 P_{m-2}, \quad P_3 P_{m-3} \ldots P_r P_{m-r}$

Ora possono aver luogo due casi o $r = m - r + 1$ da cui $r = \frac{m+1}{2}$, se m è dispari; in questo caso otteniamo una coppia di punti conjugati rispetto a C_2, che coincidono, ossia sono situati su C_2; oppure se m è pari si ha:

$$r = m - r \quad \text{o} \quad r = \frac{m}{2}.$$

In questo caso un punto del gruppo cade in C_1. Tacitamente abbiamo supposto m (+). Se fosse (—) succederebbe una cosa analoga. Dunque:

Teorema IX. *Se due punti qualunque P_1 P_m di un gruppo projettivo (P) sono conjugati rispetto ad una delle due coniche fondamentali C_1 C_2 per es. C_2, uno dei punti del gruppo cade in C_1 o C_2 secondo che m è pari o dispari. Allora i punti del gruppo (P) sono due a due conjugati rispetto alle coniche dei gruppi (R_1) ed (R_2). Tutti i punti del gruppo (P) cadono rispettivamente nelle coniche del gruppo (R_2) o (R_1).*

Supponiamo finalmente che il punto P_1 sia uno dei punti d'incontro delle due coniche C_1 C_2, allora le polari di P_1 rispetto a C_1 e C_2 ossia p_1 e p_{-1} sono tangenti alle medesime in P_1. Il polo di p_1 rispetto a C_2, ossia P_2, è situato in p_{-1}, la polare p_2 di P_2 rispetto a C_1 passa pel polo di p_{-1} rispetto a C_1, ossia P_{-1}, che è situato su p_1, dunque P_{-1} P_2 sono conjugati rispetto a C_1 e C_2. Il polo P_3 di p_2 rispetto a C_2 è situato sulla polare di P_{-1} rispetto a C_2, ossia p_{-2}, la polare p_3 di P_3 rispetto a C_1 passa pel polo di p_{-2} ossia P_{-2}; dunque P_{-2} P_3 sono conjugati rispetto a tutte e due le coniche C_1 e C_2; seguitando così si trovano le seguenti coppie di punti e rette conjugate rispetto alle coniche C_1 C_2:

$$P_1 P_1, \quad P_2 P_{-1}, \ldots P_m P_{-m+1}$$

$$p_1 p_{-1}, \quad p_2 p_{-2}, \ldots p_m p_{-m}$$

Le rette del gruppo (p) passano rispettivamente per due punti immediatamente consecutivi del gruppo (P) e formano perciò i lati di un poligono aperto, che ha per vertici i punti di (P). Esso è dunque polare reciproco di sè stesso rispetto alle coniche (R_1) e (R_2).

Sia data ora una tangente p_1 comune di C_1 C_2, i punti di contatto sono P_1 e P_2. La polare p—1 di P_1 rispetto a C_1 passa per P_2 e contiene P_3, perchè p_2 passa per P_1, onde si vede, che rispetto a C_1 C_2 sono conjugati gli elementi delle coppie

$$P_1 P_2, \quad P_3 P_{-2}, \quad P_4 P_{-3} \ldots P_m P_{-m+1}$$

$$p_1 p_1 \quad p_2 p_{-1} \quad p_3 p_{-2} \ldots p_m p_{-m+1}.$$

Anche in questo caso abbiamo un poligono reciproco di sè stesso rispetto alle due coniche C_1 C_2. È facile di vedere pel teorema IX, che un tale poligono non può esser dato che da un punto d'incontro di C_1 C_2 oppure da una delle loro tangenti comuni.

Teorema X. Se il punto P_1 è uno dei punti d'incontro, oppure uno dei punti di contatto di una tangente comune a due delle coniche C_1 C_2 dei gruppi (R_1) e (R_2), i punti del gruppo (P) formano un poligono aperto polare reciproco di sè stesso rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2). E se in un gruppo projettivo (P) i due punti $P_1 P_m$ sono conjugati rispetto alle due coniche $C_1 C_2$, uno dei punti del gruppo cade in uno dei punti d'incontro di esse, se m è dispari; invece è un punto di contatto di una delle loro tangenti se m è pari.

Per l'ultima parte del teorema basta osservare che per m pari sono conjugati rispetto a C_1 C_2 gli elementi delle coppie

$$P_1 P_m\,,\quad P_2 P_{m-1}\ .\ .\ .\ P_r P_{m-r+1}$$

$$p_1 p_{m-1}\,,\ p_2 p_{m-2}\ .\ .\ .\ p_r p_{m-r}$$

3. Abbiamo visto al n. 1, che le coordinate dei punti consecutivi di P_1 si mettono sotto la forma:

$$\mu x_i = a_i^m y_i \tag{1}$$

ove m è intero qualunque. I punti del gruppo (P) sono situati in una curva trascendente W, che si ottiene eliminando μ ed n dalle 3 equazioni (1). La sua equazione è

$$\log\frac{x_1}{y_1}\log\frac{a_2}{a_3}+\log\frac{x_2}{y_2}\log\frac{a_3}{a_1}+\log\frac{x_3}{y_3}\log\frac{a_1}{a_2}=0 \tag{2}$$

ove

$$\log\frac{a_2}{a_3}+\log\frac{a_3}{a_1}+\log\frac{a_1}{a_2}=0 \tag{3}$$

La (2) si pone anche sotto la forma:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_1}}\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}}=1. \tag{2^a}$$

È evidente però che i coefficenti $a_1\, a_2\, a_3$ devono essere (+), perchè altrimenti i punti del gruppo (P) sarebbero situati in due curve W. *Supporremo sempre* $a_1\, a_2\, a_3$ *positivi.* La (2) può essere anche algebrica basta che

$$\log\frac{a_2}{a_3} : \log\frac{a_3}{a_1} : \log\frac{a_1}{a_2} = n_1 : n_2 : n_3$$

ove $n_1\, n_2\, n_3$ sono dei numeri razionali qualunque.

Queste curve trascendenti sono state accennate da Battaglini e da Clebsch e Gordan nei loro lavori [1], però furono elegantemente e distesamente studiate da Klein e Lie [2], senza però metterle in relazione coi gruppi di coniche, che stiamo qui studiando. La curva W di un gruppo (P), ha la medesima polare reciproca non solamente rispetto alle curve C_1 C_2, ma anche rispetto a tutte le coniche di (R_1) ed (R_2), come risulta dai teoremi I e VIII. Risulta dall'equazione della W, che ogni suo punto dà luogo ad un gruppo inscritto in essa, ciò che risulta pure dall'avere la W una sola

[1] l. c.

[2] Math. Ann. vol. IV *Ueber djenigen Ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich viele vertauschbaren Transformationen in sich übergehen.*

polare reciproca rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2). Ogni sua tangente dà pure luogo ad un gruppo circoscritto ad essa, onde le curve W in coordinate di rette si mettono pure sotto la stessa forma (2) o (2^a).

Per un punto d'incontro di W con una delle coniche di (R_1) (R_2) si ottiene un gruppo di punti situati sulla W e conjugati rispettivamente due a due rispetto a quelle coniche (Teor. XI), proprietà che ha luogo anche per ogni tangente comune di W e una di quelle coniche. È chiaro, che due W non possono incontrarsi in nessun punto, nè avere nessuna tangente comune all' infuori dei vertici e dei lati del triangolo fondamentale. Una curva W passa per due determinati vertici del triangolo fondamentale e ivi tocca due lati di esso, tranne quello nel quale sono situati i due vertici. Infatti in generale sarà (—) uno dei log. dei rapporti degli a per es. $\log. \frac{a_1}{a_2}$ e, allora la W si pone sotto la forma:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_2}{a_1}} = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}+\log\frac{a_3}{a_1}} \tag{2^b}$$

Ciò fa vedere, che la curva passa pei vertici $x_1 = x_3 = 0$ $x_2 = x_3 = 0$ e ivi tocca i lati $x_1 = 0$ $x_2 = 0$.

Se una curva W tocca una delle coniche di (R_1) ed (R_2) per es. C_1, la tangente comune nel punto di contatto dovendo toccare la polare reciproca di W, le due curve coincidono e perciò la W è polare reciproca di sè stessa rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2).

Ponendo per maggior semplicità $x_3 = y_3 = a_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x'$ $y_2 = y'$ l'equazione della W diventa

$$\left(\frac{x}{x'}\right)^{\log a_2} = \left(\frac{y}{y'}\right)^{\log a_1} \tag{2^c}$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,\frac{\log a_2}{\log a_1}. \tag{3}$$

Se ora consideriamo la trasformazione infinitesima

$$\begin{aligned} x &= x' + x' . \log\ a_1 . dm \\ y &= y' + y' . \log\ a_2 . dm \end{aligned} \tag{4}$$

mediante la quale dal punto x' y' si passa al punto $x' + dx'$ $y' + dy'$, differenziando la (4) si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a_2}{\log a_1}\,\frac{y}{x}$$

che è precisamente l'equazione differenziale delle curve W; dunque le curve W si trasformano in sè stesse per la trasformazione infinitesima (4) [1]. Dunque da un punto della W si puo passare ad un altro punto qualunque di W, e ripetendo più volte la trasformazione infinitesima (4) si ottiene una trasformazione finita del sistema

$$\begin{aligned} x &= a_1{}^m\, x' \\ y &= a_2{}^m\, y' \end{aligned} \tag{5}$$

[1] Klein e Lie, l. c.

In queste diverse trasformazioni finite del sistema (5) variando a_1 e a_2, varieranno anche i sistemi di coniche (R_1) ed (R_2); ossia stabiliti due punti P_1 P_2 qualunque di W come punti immediatamente consecutivi, essi determinano le coniche di (R_1) ed (R_2).

Consideriamo una di queste coppie di gruppi (R_1) ed (R_2). Abbiamo visto che se un punto P_1 è situato in W tutti i punti del gruppo (P) sono situati su di essa. Sappiamo anche che i lati e i vertici del triangolo fondamentale (Teor. IV) sono altrettante curve W; da cui si deduce, che le coniche delle infinite coppie di gruppi (R_1) ed (R_2) hanno lo stesso triangolo fondamentale come conjugato.

Una retta qualunque p_1 taglia le curve W in un certo numero di punti $A_1 B_1 C_1 \ldots$ e le rette consecutive di essa, taglieranno le stesse curve W, nei punti

$A_2 B_2 C_2 \ldots$, $A_3 B_3 C_3 \ldots$, $A_m B_m C_m \ldots$, e si avrà

$$(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge (A_2 B_2 C_2 \ldots) \barwedge (A_3\ B_3\ C_3 \ldots) \barwedge (A_m B_m C_m \ldots)$$

Analogamente si conducano da un punto P_1 le tangenti alle curve W (compresi i vertici del triangolo fondamentale) $a_1 b_1 c_1 \ldots$, e si faccia la stessa cosa pei punti consecutivi di P_1 si avrà:

$$(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge (a_2 b_2 c_2 \ldots) \barwedge (a_3 b_3 c_2 \ldots) \barwedge \ldots \barwedge (a_m b_m c_m \ldots)$$

Se per retta p_1 si sceglie una tangente ad una curva W, il cui punto di contatto sia Q_1 e siano $A_1 B_1 C_1$ i punti d'incontro di p_1 con i tre lati del triangolo fondamentale, essendo le rette consecutive di p_1 pure tangenti a W nei punti consecutivi di Q_1, tagliano i lati del triangolo fondamentale nei punti consecutivi di $A_1 B_1 C_1$, onde si avrà:

$$(Q_1 A_1 B_1 C_1) = (Q_2 A_2 B_2 C_2) = \ldots = (Q_m A_m B_m C_m) \qquad (6)$$

Analogamente se dal punto $Q_1, Q_2 \ldots Q_m$ projettiamo i vertici del triangolo fondamentale mediante le rette $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2 \ldots a_m b_m c_m$ si avrà;

$$(p_1 a_1 b_1 c_1) = (p_2 a_2 b_2 c_2) = \ldots = (p_m a_m b_m c_m) \qquad (7)$$

Ma abbiamo visto, che due punti qualunque di W possono essere considerati come punti immediatamente consecutivi di un gruppo projettivo rispetto ad una coppia di gruppi di coniche (R_1) ed (R_2), dunque le relazioni (6) e (7) sussistono ancora quando $Q_1 Q_m$ sono due punti qualunque di W.

Se la curva W è algebrica, si può mettere sotto la forma

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{n_1} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{n_2} = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{n_1+n_2} \qquad (2^d)$$

supposto n_1 ed n_2 (+). I punti di questa curva si possono esprimere in funzione di due parametri λ e μ nella seguente maniera

$$\rho x_1 = \mu^{n_1+n_2} \quad \rho x_2 = \lambda^{n_1+n_2} \quad \rho x_3 = \mu^{n_1} \lambda^{n_2}$$

I punti d'incontro di una retta $u_x = 0$ con la curva sono dati dall'equazione:

$$u_1 \mu^{n_1+n_2} + u_2 \lambda^{n_1+n_2} + u_3 \mu^{n_1} \lambda^{n_2} = 0$$

Differenziando rispetto a μ e a λ si trova la curva in coordinate di rette, che è precisamente della forma (2^d) cioè della classe $n_1 + n_2$. Ora riassumendo si ha:

Teorema XI. I punti di un gruppo (P) sono situati su una curva trascendente W, che ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le coniche dei gruppi (R_1) ed (R_2) individuate da C_1 e C_2. Un suo punto qualunque P o una sua tangente q dà luogo ad un gruppo (P)

inscritto in essa o un gruppo (q) circoscritto ad essa. Essa passa per due dei vertici del triangolo fondamentale e vi tocca i due lati di esso, che non contengono tutti e due i vertici. In essi ha la curva W tutte le sue singolarità, di punti nei due vertici, di tangenti nei due lati.

Teorema XII. Ci sono infinite coppie di gruppi di coniche (R_1) ed (R_2) rispetto alle quali una curva W, ha le stesse proprietà. Due punti qualunque o due tangenti qualunque di W possono essere risguardate come elementi immediatamente consecutivi rispetto ad una coppia (R_1) ed (R_2). Le coniche di tutte le coppie (R_1) ed (R_2) hanno lo stesso triangolo conjugato fondamentale.

Teorema XIII. Per un punto comune di una curva W con una conica di una coppia (R_1) (R_2), si ottiene un gruppo projettivo di punti inscritto in W, i cui punti sono due a due rispettivamente conjugati rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2).

Teorema XIV. I lati ed i vertici del triangolo conjugato fondamentale sono altrettante curve W.

Teorema XV. Se la curva W tocca una conica di (R_1) e (R_2) essa è reciproca di sè stessa rispetto alle coniche di (R_1) ed (R_2).

Teorema XVI. Due curve qualunque W non possono incontrarsi in nessun punto all'infuori dei due vertici del triangolo fondamentale e non possono avere altre tangenti comuni all'infuori dei lati di esso.

Teorema XVII. Il punto di contatto Q_1 di una tangente qualunque di una curva W e i tre punti d'incontro $A_1 B_1 C_1$ coi tre lati del triangolo fondamentale formano un rapporto anarmonico costante. Le rette $a_1 b_1 c_1$ che congiungono il punto Q_1 con i vertici del triangolo fondamentale e la tangente p_1 in Q_1, formano un rapporto anarmonico costante, qualunque sia Q_1.

Teorema XVIII. Alle curve W appartengono quelle curve algebriche d'ordine n, che hanno in un vertice del triangolo fondamentale un punto $(n-1)^{plo}$ con $(n-1)$ tangente coincidenti e nell'altro vertice la singolarità correlativa. A queste curve appartiene la curva del 3° ordine con una cuspide. Ordine e classe di queste curve sono eguali.

Osservo che non più di $\frac{n(n+3)}{2}$ punti immediatamente consecutivi di un gruppo projettivo (P) possono essere situati sopra una curva algebrica d'ordine n; infatti se la curva ne avesse uno di più conterrebbe tutti i punti del gruppo. Però si possono studiare le posizioni speciali delle due coniche C_1 C_2 affinchè $\frac{n(n+3)}{2}+1$ punti non immediatamente consecutivi del gruppo appartengano ad una curva d'ordine n [1].

[1] Vedi Clebsch e Gordan l. c.

Nel caso che la W sia algebrica ponendo $a_3 = 1$ $\log a_1 = -n_2$ $\log a_2 = n_1$ la conica C_2 si mette sotto la seguente forma:

$$e^{-n_2} x_1^2 + e^{n_1} x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (1)$$

4. Data la C_1 vogliamo ora determinare la C_2, in modo che il punto P_n di (P) cada in P. Si avrà

$$a_1^n y_i = y_i \qquad a_2^n y_i = y^i \; a_3 = 1$$

ossia

$$a_1 = \sqrt[n]{1} \qquad a_2 = \sqrt[n]{1}$$

I due coefficenti arbitrarî della C_2 cercata, sono adunque due radici n^{eme} dell'unità. Allora è chiaro che non solamente P_n ma anche P_{-n}, cade in P, perchè si ha pure:

$$a_1^{-n} = 1 \qquad a_2^{-n} = 1$$

oltre a ciò si vede, che questo ha luogo per qualunque punto del piano e per qualunque retta.

L'equazione della C_2 sarà della forma:

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

ove r è una radice n^{ema} primitiva dell'unità. Oppure:

$$e^{\frac{2\mu_1\pi}{n} i} x_1^2 + e^{\frac{2\mu_2\pi}{n} i} x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (\mu = 0, 1 \ldots n-1) \qquad (1^a)$$

Le coniche C_2, che si ottengono in tal maniera sono n^2.

Tra queste n^2 coniche è compresa anche la C_1, infatti basta porre $a_1 = a_2 = 1$. Queste n^2 coniche formano un *ciclo* S_n^2.

Date due coniche del ciclo S_n^2 per es.

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (2)$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_1} x^2 + x_3^2 = 0 \qquad (3)$$

e operando le due trasformazioni polari rispetto ad un punto qualunque P, si vede, per le proprietà delle radici dell'unità, che il punto P_n cade in P. In tal caso i punti del gruppo $(P)^n$ (¹) formano un *ciclo* projettivo.

Se n non è primo cioè $= a . b . c . \ldots m$, ove $a, b, c, \ldots m$ sono primi, allora nel ciclo S_n^2 sono compresi quelli corrispondenti ad $a, b, c, \ldots m$, e scelto a per es. tutte le coniche di S_n^2 si separano in $b . c . \ldots m$ sistemi di cicli S_a^2. Noi discuteremo solamente il caso in cui n è primo, potendosi ricavare da esso il caso in cui n non è primo.

Teorema XIX. Se è data una conica C_1 ce n'è altre n^2-1, le quali due a due sono situate in tale posizione, che se di un punto P si trova il gruppo corrispondente (P) rispetto ad esse, esso si compone di n soli punti, che formano un ciclo projettivo $(P)^n$. A questo ciclo corrisponde un ciclo projettivo di n rette $(p)^n$, che è polare reciproco del primo rispetto alle due coniche.

(¹) n indica il numero dei punti contenuti in (P).

Queste n^2 coniche formano un ciclo S_n^2 ed hanno lo stesso triangolo conjugato comune.

Teorema XX. Se $n=a.b.c...m$ ove $a, b, c...m$ sono primi il ciclo S_n^2 si scompone per es. in $b. c... m$ cicli S_a^2.

5. Dall'equazioni delle n^2 coniche del ciclo S_n^2 si scorge che esse tagliano un lato qualunque del triangolo fondamentale in n sole coppie di punti.

Teorema XXI. Le n^2 coniche di un ciclo S_n^2, tagliano uno qualunque dei lati del triangolo fondamentale in n coppie di punti; in una di esse si toccano n coniche del ciclo. Queste n coniche formano un'ennupla di 1ª specie. — Di queste ce n'è $3n$ in tutto il ciclo S_n^2.

Due coniche del ciclo S_n^2 o si toccano in una coppia di punti di uno dei lati del triangolo fondamentale, oppure tagliano i lati di esso in coppie di punti differenti. Tali sono nel 1° caso le due coniche:

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (1)$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (2)$$

e nel 2° caso

$$r^s x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (3)$$

$$r^{s+s_1} x_1^2 + r^{p+p_1} x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (4)$$

Consideriamo le due coniche (1) e (2)

Il ciclo $(P)^n$ corrispondente ad un punto $P(y_1 y_2 y_3)$ è situato sopra una retta passante pel punto $x_2=x_3=0$. Così data una retta p, tutte le sue consecutive, che formano il ciclo $(p)^n$, s'incontrano nel lato $x_1=0$. Le coniche (1) (2) si toccano in due punti del lato $x_1=0$, esse determinano adunque un'ennupla di 1ª specie. Se della (2) troviamo la polare reciproca rispetto alla (1) otteniamo la conica

$$r^{2s-s_1} x_1^2 + r^p x_2^2 + x_3^2 = 0$$

ossia una conica del ciclo S_n^2 e della stessa ennupla, quindi i gruppi (R_1) ed (R_2) del Teorema VII coincidono con l'ennupla stessa.

Teorema XXII. La polare reciproca di una conica di un'ennupla di 1ª specie rispetto ad un'altra conica dell'ennupla appartiene all'ennupla stessa. I gruppi (R_1) ed (R_2) del Teorema VII, generati da due coniche dell'ennupla, coincidono con essa stessa.

Teorema XXIII. Il ciclo $(P)^n$ corrispondente ad un punto P rispetto a due coniche qualunque di un'ennupla di 1ª specie è situato in una retta, passante per il vertice opposto al lato del triangolo fondamentale, ove si toccano le coniche dell'ennupla.— Esso ha lo stesso ciclo $(p)^n$ polare reciproco rispetto a tutte le n coniche dell'ennupla.

6. Supponiamo ora date le due coniche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (1)$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_1} x_2^2 + x_3^2 = 0$$

le quali incontrano i lati del triangolo fondamentale in punti differenti. La polare reciproca di (1) rispetto a (2) cioè

$$r^{s_2} x_1^2 + r^{p_2} x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (3)$$

appartiene al ciclo S_n^2 e taglia i lati del triangolo fondamentale in punti differenti da quelli, in cui sono tagliati da (1) e (2). Continuando a trovare le polari reciproche d'una qualunque delle coniche (1) (2) (3) rispetto alle altre e alle nuove ottenute, è chiaro che si ottengono n coniche, che tagliano i lati del triangolo fondamentale in coppie di punti differenti e che costituiscono un ciclo o *ennupla di* 2ª *specie.* I gruppi (R_1) (R_2) generati da (1) (2) coincidono con l'ennupla stessa. Data una conica per es. la (1), per ottenere da essa un'ennupla di 2ª specie basta moltiplicare rispettivamente x_1^2 e x_2^2 per due radici n^{me} dell'unità per es. r^{s_1} e r^{p_1}. Dalla nuova conica (2) si passa alla (3), o moltiplicando x_1^2 x_2^2 di (1) per i quadrati di r^{s_1} e r^{p_1}, oppure moltiplicando x_1^2 e x_2^2 di (2) per r^{s_1}, r^{p_1}. Così le n^2 coniche del ciclo S_n^2, formano un sistema di n ennuple di 2ª specie, $(A)^n(B)^n(C)^n \ldots\ldots (N)^n$. Ma cambiando r^{s_1} ed r^{p_1} cambia pure il sistema. Infatti prendendo per es. come moltiplicatori r^{s_1} ed r^{p_2} da (1), si deduce la conica

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_2} x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{4}$$

la quale apparteneva nel precedente sistema $(A)^n \ldots\ldots (N)^n$ ad un'ennupla diversa da quella a cui apparteneva la conica (1). Due coniche qualunque, che non appartengono ad un'ennupla di 1ª specie, ossia che non si toccano, dànno luogo ad un'ennupla di 2ª specie; per es. (1) e (2) determinano un'ennupla di 2ª specie. I moltiplicatori r^{s_1} ed r^{p_1} si ottengono dividendo rispettivamente i coefficenti di x_1^2 e x_2^2. Una conica qualunque per es. (1) appartiene a 3 ennuple di 1ª specie e perciò con le 3 $(n-1)$ coniche di esse non può generare delle ennuple di 2ª specie.

Dunque la (1) con le $n^2-1-3\ (n-1)=(n-1)\ (n-2)$ coniche rimanenti, determina $(n-2)$ ennuple di 2ª specie. Dunque:

Teorema XXIV. Le n^2 coniche del ciclo S_n^2 si dispongono in $(n-2)$ sistemi di ennuple di 2ª specie $(A)^n(B)^n \ldots (N)^n$, che non hanno nessuna conica comune. Le coniche di una di queste ennuple incontrano i lati del triangolo fondamentale in n coppie di punti distinti. La polare reciproca di una conica di un'ennupla di 2ª specie rispetto ad una conica della medesima è pure una conica dell'ennupla. I gruppi (R_1) e (R_2) generati da due coniche di un'ennupla di 2ª specie coincidono con l'ennupla stessa.

7. Siano date due coniche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{1}$$

$$r^{s_1} x_1^2 + r^{p_1} x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{2}$$

che determinano un'ennupla di 2ª specie.

Il ciclo projettivo $(P)^n$ di un punto P $(y_1 y_2 y_3)$ rispetto alle due coniche ha lo stesso ciclo polare reciproco $(p)^n$ rispetto alle n coniche dell' ennupla. I punti del ciclo $(P)^n$ sono situati sopra una curva W algebrica. Infatti la (2) si può mettere anche sotto la forma

$$e^{\frac{-2\mu_1\pi}{n}i} x_1^2 + e^{\frac{2\mu_2\pi}{n}i} x_2^2 + x_3^2 = 0$$

quindi la curva W descritta dal punto P si mette sotto la forma

$$(3) \qquad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\mu_2}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\mu_1}=\left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\mu_2+\mu_1} \qquad (\text{N.}^o\ 3\ (2^d))$$

Ora ponendo $\mu_1=-\mu_2$ la W diventa una retta, che passa per il punto $x_1=x_2=0$ come già si sa. Se

$$\mu_1=\mu_2$$

la W è allora una conica [1]. Se $\mu_1=1$ $\mu_2=2$ allora si ha una curva del 3° ordine con una cuspide ecc. Se consideriamo la curva algebrica (3), essa viene generata tanto da gruppi projettivi aperti, come anche da cicli projettivi di n punti. Nel primo caso basta considerare le due coniche

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

$$e^{-\mu_1}x_1^2+e^{\mu_2}x_2^2+x_3^2=0.$$

Se del punto $y_1y_2y_3$ costruiamo il gruppo (P) corrispondente rispetto a queste due coniche, esso è inscritto nella (3). Nel secondo caso basta considerare le due coniche

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \quad , \quad e^{\frac{-2\pi\mu_1}{n}i}x_1^2+e^{\frac{2\pi\mu_2}{n}i}x_2^2+x_3^2=0$$

ove $n>\mu_1$ e $>\mu_2$.

Teorema XXV. Il ciclo projettivo $(P)^n$ corrispondente ad un punto P rispetto ad un' ennupla di 2ª specie è situato sopra una curva algebrica W. — Il ciclo $(P)^n$ ha lo stesso ciclo projettivo $(p)^n$ polare reciproco rispetto a tutte le coniche dell'ennupla. La curva W ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le coniche dell'ennupla. — Essa può essere anche una conica.

Teorema XXVI. In una curva qualunque W algebrica sono inscritti e circoscritti dei gruppi projettivi di punti e di rette aperti e chiusi. Per esempio in una curva del 3° ordine con una cuspide si può inscrivere dei cicli projettivi da 4 ad n punti.

Se per un certo numero di cicli $(P)^n(Q)^n$ ecc. projettivi di punti rispetto ad una ennupla di 1ª o 2ª specie si può far passare una sola curva d'ordine m è chiaro che ogni punto di questa curva dà luogo ad un ciclo projettivo descritto in essa, perchè essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle coniche dell'ennupla. Dunque:

Teorema XXVII. Se per un certo numero di cicli projettivi rispetto ad un'ennupla di 1ª o 2ª specie passa una sola curva d'ordine n, essa ha la medesima polare reciproca rispetto a tutte le n coniche dell'ennupla ed ogni suo punto od ogni sua tangente dà luogo ad un ciclo inscritto in essa o circo scritto ad essa.

8. Supponiamo ora che le n^2 coniche di $S_n{}^2$ siano disposte in un dato ordine e di un punto $P(y_1y_2y_3)$ si costruisca la polare rispetto alla 1ª, di questa il polo rispetto alla 2ª, di questo la polare rispetto alla 3ª e così di seguito; si ottengono due

[1] Il prof. Lüroth asserisce nel vol. XIII Math. Annalen che i punti di un ciclo projettivo reale sono sempre in una conica, mentre per i cicli projettivi imaginari, come qui si vede, si ottengono delle curve W algebriche

cicli, uno di n^2 punti $(P)^{n^2}$ ed uno di n^2 rette $(p)^{n^2}$, le cui coordinate sono della forma

$$r^s y_1, \quad r^p y_2 \quad y_3$$

Questi due cicli sono indipendenti, come si vede, dall'ordine delle n^2 coniche, Dunque:

Teorema XXVIII. Se di un punto P si costruisce la polare rispetto alla 1ª delle n^2 coniche di S_n^2, disposte in un dato ordine, di questa il polo rispetto alla 2ª, di questo la polare rispetto alla 3ª e così via si ottengono due cicli, uno di n^2 punti $(P)^{n^2}$ e l'altro di n^2 rette $(p)^{n^2}$, che sono polari reciproci rispetto alle n^2 coniche del ciclo S_n^2.

Teorema XXIX. Se si considera un numero $2r+1$ di coniche del ciclo S_n^2 e di un punto P si trova la polare reciproca rispetto alla 1ª di esse, disposte in un dato ordine, di questa il polo rispetto alla 2ª e così via, si ottengono due cicli, uno di $2r+1$ punti e l'altro di $2r+1$ rette, i quali però mutano col mutare l'ordine delle $2r+1$ coniche.

9. Consideriamo le n ennuple di 1ª specie formate con le n^2 coniche del ciclo S_n^2, le cui coniche si toccano in n coppie di punti di uno dei lati del triangolo fondamentale. Gli n^2 punti del ciclo $(P)^{n^2}$ si separano in n cicli projettivi $(P)^n$ rispetto ad una qualunque di quelle ennuple, i quali sono situati sopra n rette passanti per il vertice opposto a quel lato. Il ciclo polare reciproco $(p)^{n^2}$ si scompone ancora esso in n cicli, le cui rette s'incontrano in un punto di quel lato. Ciascuno degli n cicli di $(P)^{n^2}$ evidentemente ha per polari reciproci rispetto alle n ennuple di 1ª specie considerate gli n cicli di $(p)^{n^2}$. (Teorema XXIII). Dunque:

Teorema XXX. Gli n^2 punti di un ciclo $(P)^{n^2}$ sono situati n ad n in n rette passanti per uno qualunque dei vertici del triangolo fondamentale. Gli n punti sopra una tale retta formano un ciclo projettivo. Gli n^2 punti sono l'intersezione completa di due curve dell'ordine n.

Consideriamo ora un sistema di n ennuple di 2ª specie $(A)^n(B)^n(C)^n \ldots (N)^n$; il ciclo di n^2 punti $(P)^{n^2}$ si scompone in n cicli projettivi $(P_a)^n(P_b)^n \ldots (P_n)^n$ rispetto ad una qualunque delle n ennuple, che sono situati rispettivamente sopra altrettante curve W algebriche. A questi corrispondono i cicli polari projettivi $(p_a)^n (p_b)^n \ldots (p_n)^n$, che risultano dal ciclo $(p)^{n^2}$. È chiaro che uno qualunque dei cicli di punti per es. $(P_a)^n$ ha rispetto alle n ennuple del sistema come polari reciproci rispettivamente $(p_a)^n (p_b)^n \ldots (p_n)^n$; quindi le curve W, determinate da $(P_a)^n, (P_b)^n \ldots (P_n)^n$ sono dello stesso ordine e della stessa classe. Dunque:

Teorema XXXI. Il ciclo di n^2 punti $(P)^{n^2}$ si scompone in n cicli projettivi $(P_a)^n (P_b)^n \ldots (P_n)^n$ rispetto alle n ennuple di 2ª specie $(A)^n (B)^n \ldots (N)^n$ di un dato sistema del ciclo S_n^2 (Teor. XXIV), i quali sono situati sopra altrettante curve W algebriche del medesimo ordine e medesima classe. A questi cicli corrispondono per polari reciproci, i cicli projettivi $(p_a)^n (p_b)^n \ldots (p_n)^n$ formati

con le rette di $(p)^{n^2}$. Un ciclo per es: $(P_a)^n$ ha per polari reciproci rispetto alle n ennuple del sistema i cicli $(p_a)^n, (p_b)^n, \ldots (p_n)^n$.

Teorema XXXII. Ogni punto od ogni tangente delle curve A, le cui equazioni rispetto al triangolo fondamentale di S_n^2 non contengono che le n^{me} o multipli delle n^{me} potenze delle variabili dà luogo ad un ciclo di n^2 punti inscritto in esse o di n^2 rette circoscritto ad esse. Una curva A ha la stessa polare reciproca rispetto alle coniche del ciclo S_n^2. E viceversa data una curva A, vengono ad essa coordinati infiniti cicli di n^2 coniche S_n^2, che hanno lo stesso triangolo conjugato, e rispetto alle quali la A, ha la stessa polare reciproca.

Per dimostrare l' ultima parte del teorema consideriamo un ciclo di n^2 punti $(P)^{n^2}$, le cui coordinate sono della forma $r^s y_1, r^p y_2, y_3$. Essi formano non solo un ciclo di n^2 punti rispetto al ciclo S_n^2 dato dalla conica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, che abbiamo sin qui considerato, ma anche rispetto a quelli determinati da qualunque conica della forma:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 .$$

Se tiriamo una retta p qualunque, essa incontrerà una o più curve A, in un certo numero di punti (XY Z...) le n^2-1 rette del ciclo $(p)^{n^2}$ taglieranno le stesse curve A nei punti $X_1\ Y_1\ Z_1 \ldots$, $X_2\ Y_2\ Z_2 \ldots$ ecc. che formano coi primi i cicli $(X)^{n^2}\ (Y)^{n^2}\ (Z)^{n^2}$ ecc. Ora si ha:

$$(X\,Y\,Z \ldots) \barwedge (X_1\,Y_1\,Z_1 \ldots) \barwedge \ldots \barwedge (X_{n^2}\,Y_{n^2}\,Z_{n^2} \ldots)$$

Infatti due rette qualunque del ciclo $(p)^{n^2}$ appartengono sempre ad un ciclo projettivo $(p)^n$ o rispetto ad un'ennupla di 1ª specie o rispetto ad un'ennupla di 2ª specie. Alla retta p rispetto alle $3n$ ennuple di 1ª specie corrispondono $3n$ cicli projettivi, ove entrano oltre la p, $3(n-1)$ rette del ciclo $(p)^{n^2}$. — Rispetto agli $(n-2)$ sistemi di n ennuple di 2ª specie, corrispondono alla p $(n-2)$ cicli projettivi, e siccome in ogni ciclo oltre la p entrano $n-1$ rette del ciclo $(p)^{n^2}$, così la p in tutti questi cicli è unita con $(n-1)(n-2)$ rette di $(p)^{n^2}$ e in tutto con

$$3(n-1)\,(n-1)\,(n-2) = n^2-1 \quad \text{rette}$$

di $(p)^{n^2}$. c. c. b. d.

Per retta p possiamo pigliare una tangente di una curva A, il cui punto di contatto sia Q, e i cui punti d'incontro coi lati del triangolo fondamentale siano R, S, T. Allora si ha, per quello che si è detto precedentemente,

$$(QRST) = (Q_1R_1S_1T_1) = \ldots\ldots = (Q_{n^2}R_{n^2}S_{n^2}T_{n^2})$$

Analogamente projettando dai punti $Q\ Q_1 \ldots Q_{n^2}$ di A i vertici del triangolo fondamentale, mediante le rette $a\ b\ c$, $a_1\ b_1\ c_1$, $a_2\ b_2\ c_2$ ecc. si ha:

$$(a\ b\ c\ p)\ \ (a_1\ b_1\ c_1\ p_1) = \ldots\ldots = (a_{n^2}\ b_{n^2}\ c_{n^2}\ p_{n^2})$$

Teorema XXXII. Il ciclo $(t)^{n^2}$ corrispondente ad una tangente t, di una curva A è circoscritto ad A. Il punto di contatto e i tre punti d'incontro con i lati del triangolo fondamentale formano in ciascuna di queste tangenti un rapporto anarmonico costante. Vale anche la proprietà correlativa.

Teorema XXXIV. Se abbiamo una curva A la cui equazione è della forma

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0$$

A questa è coordinato un ciclo di n^2-1 curve A, che si mettono sotto la forma

$$r^s x^n + r^p x^n + x_3^n = 0$$

Se di un punto P $(y_1 y_2 y_3)$ troviamo le rette polari rispetto a queste n^2 curve A, esse formano un ciclo $(p)^{n^2}$ di rette rispetto alle n^2 coniche di S_n^2. — Queste rette sono poi anche le polari dei punti di $(P)^{n^2}$ rispetto alle stesse curve A. Ciò non ha luogo solamente per le rette polari dei punti del ciclo $(P)^{n^2}$, ma bensì anche per le polari di un ordine qualunque. Lo studio delle curve A si collega intimamente con quello delle configurazioni da noi finora studiate.

Le trasformazioni lineari che trasformano le curve A in sè stesse, dànno precisamente luogo a queste configurazioni e a quelle che si ottengono scambiando le coordinate $x_1\, x_2\, x_3$ fra loro.

Teorema XXXV. Dato un punto P $(y_1 y_2 y_3)$ scambiando $y_1\, y_2\, y_3$ fra loro si ottengono altri 5 punti, che col primo determinano una conica e formano due triangoli omologici i tre maniere differenti per i centri di coordinate $(0\ 1 -1)$, $(1\ 0 -1)$, $(1 -1\ 0)$.

Casi speciali.

11. Se $n=2$ il ciclo S_n^2 contiene 4 coniche; l'equazioni di esse sono:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Con esse si possono formare $3n = 6$ coppie di coniche, che si toccano in due punti di un lato del triangolo fondamentale. In tal caso non vi sono ennuple o coppie di 2ª specie, perchè $n-2=0$ (Teor. XXIV). Pel Teorema XXII ciascuna delle 4 coniche è polare reciproca di sè stessa rispetto alle altre tre. — Esse tagliano il lato $x_3=0$ nei punti $\frac{x_1}{x_2} = \pm 1$ e $\frac{x_1}{x_2} = \pm\sqrt{-1}$, queste coppie di punti, dividono armonicamente i vertici del lato $x_3=0$ e si dividono armonicamente fra loro. Ad un punto $P(y_1\, y_2\, y_3)$ corrisponde un ciclo di 4 punti cioè:

$$y_1, y_2, y_3; \quad -y_1, y_2, y_3; \quad y_1, -y_2, y_3; \quad y_1, y_2, -y_3.$$

Dal Teorema XXXII si vede pure che facendo passare una conica per 4 punti di un ciclo (P), essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle 4 coniche di S_2^2. Ogni suo punto dà luogo ad un ciclo $(P)^2$ inscritto in essa, e così ogni sua tangente ad un ciclo ad essa circoscritto. Date due coniche qualunque $S_1\, S_2$ e si vuol trovare la conica rispetto alla quale esse sono polari reciproche, si trovano quattro coniche di un ciclo S_2^2, rispetto alle quali $S_1\, S_2$ sono due curve A polari reciproche. Sotto questo punto di vista fu primo Steiner a considerare le 4 coniche di un ciclo S_2^2 nel vol. 32 di Crelle.

Le proprietà di queste coniche si trovano diffusamente studiate nelle stesse lezioni di Steiner pubblicate dallo Schröter [1]. Altri pure se ne sono occupati; le proprietà principali però sono riassunte nelle poche righe antecedenti, oltre che qui consideriamo le proprietà dei cicli di punti $(P)^4$.

12. Il caso in cui $n=3$ presenta molto più interesse del precedente, specialmente per la relazione che esso ha con la curva del 3° ordine. Il ciclo di 9 coniche, che risulta, credo non sia stato studiato ancora da alcuno. Se facciamo $n=3$ il ciclo S_n^2 si riduce ad un ciclo di 9 coniche. Abbiamo $3n=9$ terne di 1ª specie e $n-2=1$ sistema di 3 terne di 2ª specie $(A)^3 (B)^3 (C)^3$.

Teorema XXXVI. *Pel caso $n=3$ il ciclo S_3^2 contiene 9 coniche. Con esse si formano 12 terne, 9 di 1ª specie e 3 di 2ª. Se di una conica di una terna si trova la polare reciproca rispetto ad un'altra della terna, si ottiene la terza conica di essa* (Teor. XIX, XXII, XXIV).

Le coniche del ciclo S_3^2, disposte secondo le tre terne di seconda specie sono

$(A)^3$	$(B)^3$	$(C)^3$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$r^2 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
$r\, x_1^2 + r^2 x_2^2 + x_3^2 = 0$	$r\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x_1^2 + r^2 x_2^2 + x_3^2 = 0$
$r^2 x_1^2 + r\, x_2^2 + x_3^2 = 0$	$r^2 x_1^2 + r^2 x_2^2 + x_3^2 = 0$	$r\, x_1^2 + r\, x_2^2 + x_3^2 = 0$

Si annullano i due invarianti A_{122}, A_{112} simultanei di due delle coniche di una terna, invarianti che per due forme qualunque ternarie $a_x^2=0$ $u^2_{\alpha'}=0$ si mettono sotto la forma:

$$a_{\alpha'}=0 \qquad a'_{\alpha}=0 \qquad \text{ove} \qquad \alpha'_i=(a'b')_i, \ \alpha_i=(ab)_i$$

tenendo conto che:

$$1 + r + r^2 = 0$$

Dunque:

Teorema XXXVII. *Ci sono infiniti triangoli inscritti e circoscritti ad una qualunque delle tre coniche di una qualunque delle tre terne di 2ª specie, che sono conjugati rispettivamente alle altre due coniche della terna.*

Ad un punto P $(y_1 y_2 y_3)$ corrisponde un ciclo di 9 punti $(P)^9$ che ha lo stesso ciclo polare reciproco $(p)^9$ rispetto alle 9 coniche del ciclo S_3^2. Rispetto alle 9 terne di 1ª specie il ciclo $(P)^9$ si scompone in 9 cicli projettivi di 3 punti, situati rispettivamente in 9 rette, passanti tre a tre per ciascun vertice del triangolo fondamentale. Rispetto alle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ si separa invece il ciclo $(P)^9$ in tre cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$. Essi sono:

$(P_a)^3$	$(P_b)^3$	$(P_c)^3$
$y_1 \quad y_2 \quad y_3$	$ry_1 \quad y_2 \quad y_3$	$r^2y_1 \quad y_2 \quad y_3$
$ry_1 \quad r^2y_2 \quad y_3$	$y_1 \quad ry_2 \quad y_3$	$y_1 \quad r^2y_2 \quad y_3$
$r^2y_1 \quad ry_2 \quad y_3$	$r^2y_1 \quad r^2y_2 \quad y_3$	$ry_1 \quad ry_2 \quad y_3$

le rette dei cicli $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ $(p_c)^3$ hanno le stesse coordinate. Il ciclo $(P_a)^3$ ha rispetto alle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ per polari reciproci $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ $(p_c)^3$; $(P_b)^3$ invece

[1] Steiner'sche Vorlesungen, *Ueber harmonische Kegelshnitte.*

ha per polari reciproci rispetto alle medesime terne ordinatamente $(p_b)^3$ $(p_c)^3$ $(p_a)^3$ e $(P_c)^3$, $(p_c)^3$ $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ (Teorema XXXI). Dalla forma stessa delle coordinate dei punti di una delle terne $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ ed anche dal Teorema XXXI, si vede che i punti di una di esse sono situati su tre coniche, che toccano ordinatamente due lati del triangolo fondamentale nei due vertici del terzo. Dunque:

Teorema XXXVIII. Il ciclo di 9 punti corrispondenti ad un punto 1 sia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Esso ha lo stesso ciclo polare reciproco rispetto alle 9 coniche del ciclo S_3^2. Esso si scompone in 9 cicli projettivi di 3 punti rispetto alle 9 terne di 1ª specie, situati sopra 9 rette 123, 456, 789; 369, 147, 258; 348, 267, 159; le quali passano rispettivamente tre a tre per i vertici del triangolo fondamentale. Il ciclo $(P)^9$ si scompone pure in tre cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ rispetto alle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$, cioè 168, 249, 357. Uno qualunque di questi cicli è situato in tre coniche, che toccano rispettivamente due dei lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo.

Abbiamo visto che per un' ennupla di 1ª o 2ª specie i gruppi (R_1) ed (R_2) generati da due coniche C_1 C_2 dell' ennupla coincidono con l' ennupla stessa. Abbiamo visto pure, che scegliendo un punto d'incontro delle due coniche C_1 C_2, il gruppo (P) corrispondente è reciproco di sè stesso rispetto alle due coniche C_1 C_2 (Teor. X); per due coniche qualunque di un' ennupla di 2ª specie si ha invece un poligono di n lati ed n vertici che è polare reciproco di sè stesso rispetto alle coniche dell'ennupla; nel caso $n=3$ si ha:

Teorema XXXIX. Se un punto del ciclo $(P_a)^3$ per es. è uno dei punti d'incontro di due delle coniche di una delle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$, oppure uno dei punti di contatto di una delle tangenti di esse, esso forma un triangolo reciproco di sè medesimo rispetto alle coniche della terna.

Se il punto P è in uno dei lati del triangolo fondamentale il ciclo di 9 punti si riduce a un ciclo di tre punti, che formano un ciclo projettivo, ossia che formano con uno dei vertici di quel lato un rapporto equianarmonico. Il ciclo così ridotto ha un solo ciclo $(p)^3$ polare reciproco rispetto a tutte le 9 coniche del ciclo S_3^2, dunque:

Teorema XL. Se il punto P è situato in uno dei lati del triangolo fondamentale, il suo ciclo corrispondente $(P)^9$ si riduce a un ciclo projettivo di tre punti $(P)^3$, che formano un rapporto equianarmonico con ciascuno dei vertici del triangolo in quel lato.

Esso ha un ciclo di tre rette $(p)^3$ polare reciproco rispetto a tutte le 9 coniche di S_3^2.

13. Consideriamo i due cicli per es. $(P_a)^3$ e il suo ciclo polare reciproco per es. rispetto alla terna $(A)^3$. Le coordinate dei tre punti del ciclo sono:

$$\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ r\,y_1 & r^2 y_2 & y_3 \\ r^2 y_1 & r y_2 & y_3 \end{matrix}$$

e queste sono anche le coordinate delle tre rette del ciclo $(p_a)^3$; ebbene si vede

che questi triangoli sono prospettivi in tre maniere differenti e che i tre centri di prospettiva (come anche le tre rette di omologia) formano un ciclo $(Q_a)^3$ projettivo rispetto ad una delle terne di 2ª specie. Ciò si dimostra facilmente anche per via sintetica. Infatti supponiamo che la polare di P_1 rispetto ad una delle coniche di $(A)^3$ sia p_1, di questa il polo rispetto ad una delle altre due sia P_2, di questo la polare rispetto alla 1ª sia p_2, di questa il polo rispetto alla 2ª sia P_3, di questo la polare rispetto alla 1ª sia p_3, di questa il polo rispetto alla 2ª sarà P_1. Chiamo i vertici del triangolo $p_1 p_2 p_3$ con $Q_1 Q_2 Q_3$. È chiaro che i punti consecutivi di P_1 sono in un dato senso $P_2 P_3$, nel senso opposto $P_3 P_2$. Invece Q_1 nel primo senso ha per consecutivi $Q_3 Q_2$ e nel secondo $Q_1 Q_3$. Siccome i due triangoli $P_1 P_2 P_3$, $p_1 p_2 p_3$ sono polari reciproci, così le rette $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ passano per un punto O_1. Queste ultime tre rette non sono però consecutive, per quel che si è detto, dunque chiamandole a_1 b_1 c_1 le rette consecutive di esse cioè $a_2 a_3$, $b_2 b_3$, $c_2 c_3$, congiungono due a due i vertici dei due triangoli $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$, e le rette $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ s'incontrano perciò in due punti O_2 e O_3. I punti $O_1 O_2 O_3$ evidentemente formano un ciclo $(O_a)^3$ rispetto alle coniche della terna $(A)^3$ e perciò anche a quelle delle altre due $(B)^3$ e $(C)^3$.

Teorema XLI. *Uno dei cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ e uno qualunque dei cicli $(p_a)^3$ $(p_b)^3$ $(p_c)^3$ formano due triangoli omologici in tre maniere differenti e i tre centri di omologia formano un ciclo di tre punti $(O_a)^3$. Analogamente per le tre rette di omologia.*

14. Due cicli qualunque $(P_a)^3$, $(Q_a)^3$, non individuano una conica, perchè essa dovrebbe toccare due dei lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo, ed allora $(Q_a)^3$ per es. non sarebbe più arbitrario. Un ciclo $(R)^3$ situato sopra uno dei lati fondamentali, e i due cicli $(P_a)^3$ $(Q_a)^3$ determinano una sola curva del 3° ordine. Ogni punto M di questa curva pel Teorema XXVIII, dà un ciclo $(M_a)^3$ inscritto in essa; analogamente per ogni sua tangente. La sua equazione dunque rispetto al triangolo fondamentale è della forma:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,k\,x_1 x_2 x_3 = 0$$

da cui risulta che essa ha nei punti di $(R)^3$ tre punti d'inflessione.

Teorema XLII. *Un ciclo $(R)^3$ situato in un lato del triangolo fondamentale e due cicli qualunque $(P_a)^3$ $(Q_a)^3$ sono situati in una curva del 3° ordine, che ha nei punti $(R)^3$ tre dei suoi flessi.*

Applicazione del caso $n=3$ alla curva del 3° ordine.

15. Sia data una curva C_3 generale del 3° ordine nella forma canonica cioè:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,k\,x_1 x_2 x_3 = 0.$$

È evidente che a questa curva è coordinato il sistema S'^2_3 di 9 coniche cioè:

$(A)^3$	$(B)^3$	$(C)^3$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$rx_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$r^2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
$rx_1^2 + r^2x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x_1^2 + rx_2^2 + x_3^2 = 0$	$x_1^2 + r^2x_2^2 + x_3^2 = 0$
$r^2x_1^2 + rx_2^2 + x_3^2 = 0$	$r^2x_1^2 + r^2x_2^2 + x_3^2 = 0$	$rx_1^2 + rx_2^2 + x_3^2 = 0.$

Se il punto P $(y_1\, y_2\, y_3)$ è situato sulla curva C_3, ci sono pure situati gli altri due punti del ciclo $(P_a)^3$ ossia ry_1, r^2y_2, y_3; r^2y_1, ry_2, y_3; mentre i 6 punti dei cicli $(P_b)^3 (P_c)^3$ cadono fuori della curva. Così ha luogo per ogni tangente di C_3 (Teor. XXVII)

l'equazione in coordinate di rette della C_3 non può perciò contenere che le 3^e o multipli delle 3 potenze delle variabili, oppure delle potenze del prodotto delle tre variabili, come si sa benissimo. Il triangolo fondamentale, come si vede, è uno dei trilateri della curva C_3, e si trova perciò la C_3 nelle stesse condizioni di quella del Teorema XLI. Invece del ciclo (1) possiamo considerarne infiniti altri, basta supporre le variabili x_1^2 x_2^2 x_3^2 dotate di coefficenti a_1, a_2, a_3 del tutto arbitrarî, ma che restano gli stessi per le curve di un medesimo ciclo S_3^2, e che noi abbiamo supposto fin da principio positivi. Il ciclo $(P)^9$, secondo quello che si è detto al n. 10, ha le stesse proprietà rispetto a tutti questi nuovi cicli S_3^2 e così pure la C_3. Per i 3 altri trilateri della C_3 corrispondono al ciclo $S_3'^2$ tre altri cicli analoghi di 9 coniche, prendendo sempre $a_1=a_2=a_3=1$ e così pure rispetto ad un altro ciclo S_3^2 qualunque, mantenendo gli stessi a per i quattro trilateri.

Teorema XLIII. Presa una curva del 3° ordine C_3 qualunque, ci sono tre terne di coniche $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ di un ciclo $S_3'^2$, rispetto alle quali la curva è nelle condizioni del Teorema XLI. Il triangolo fondamentale è un trilatero della curva. Rispetto a ciascun trilatero della curva c'è un sistema doppiamente infinito di questi cicli S_3^2.

Teorema XLIV. Il ciclo $(P)^9$ corrispondente ad un punto P rispetto ad uno qualunque dei cicli S_3^2, che si riferiscono ad un trilatero della curva, si decompone in tre cicli projettivi $(P_a)^3$, $(P_b)^3$, $(P_c)^3$. Se uno dei punti di questi cicli è situato sulla C_3, gli altri due punti del ciclo cadono nella C_3. Le tangenti in questi punti formano un ciclo projettivo di tre rette, rispetto ad una terna qualunque del ciclo S_3^2.

Teorema XLV. Il punto di contatto e i tre punti d'incontro delle tre tangenti di un ciclo, circoscritto alla C_3, con i tre lati del triangolo fondamentale, formano un rapporto anarmonico costante per tutte e tre le tangenti. Analogamente le tangenti in tre punti di un ciclo $(P_a)^3$, inscritto nella C_3, e le tre rette che li congiungono con i tre vertici del triangolo fondamentale, dànno un rapporto anarmonico costante per tutti e tre i punti.

16. Abbiamo visto (Teor. XXXVII) che un ciclo $(P_a)^3$ determina tre coniche, che toccano rispettivamente due dei lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo; una tale conica incontra la C_3 in due cicli $(P_a)^3$, $(Q_a)^3$; perchè dato un punto P comune alla conica ed alla C_3, il ciclo $(P_a)^3$ è situato tanto sulla conica come sulla C_3. Per uno di questi cicli per es. per $(P_a)^3$ passano due altre coniche, che hanno la stessa proprietà, dunque:

Teorema XLVI. Una conica, che tocca due lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo, taglia la C_3 in 6 punti di due cicli projettivi $(P_a)^3$ $(Q_a{}^3)$, rispetto alle terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ dei cicli S_3^2, che si riferiscono a quel triangolo. Se la conica tocca la C_3 in un punto, i due cicli $(P_a)^2$ $(Q_a)^3$ coincidono, cioè la conica toccherà la C_3 in tre punti.

Le coniche dei cicli S_3^2, n. 15, sono tutte immaginarie se il triangolo fondamentale è reale. Consideriamo il trilatero della C_3 i cui lati riferiti al trilatero reale sono:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= x_1' \\ rx_1 + r^2x_2 + x_3 &= x_2' \\ r^2x_1 + rx_2 + x_3 &= x_3'. \end{aligned} \qquad (1)$$

Tre delle 9 coniche del ciclo $S_3''^2$ corrispondente ad $S_3'^2$ che si riferisce a questo trilatero, formano una terna reale, le altre sono immaginarie. Esse sono:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2\,x_3 &= 0 \\ x_2^2 + 2x_1\,x_3 &= 0 \\ x_3^2 + 2x_1\,x_3 &= 0\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Invece le nove coniche di un altro ciclo S_3^2 corrispondente ad un altro ciclo S_3^2, che si riferisce al 1° trilatero, sono tutte immaginarie. Come ben si vede le coniche (2) toccano rispettivamente due lati del triangolo fondamentale nei vertici del terzo. Per gli altri due trilateri, le cui equazioni rispetto al trilatero reale sono ([1]):

$$\begin{aligned} x_1 + rx_2 + x_3 &= 0 \qquad & x_1 + r^2x_2 + x_3 &= 0 \\ rx_1 + x_2 + x_3 &= 0 \qquad & r^2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ r^2x_1 + r^2x_2 + x_3 &= 0 \qquad & rx_1 + rx_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

le 9 coniche dei cicli $S_3'''^2$ $S_3''''^2$ corrispondenti al ciclo $S_3'^2$ sono immaginarie.

Osserviamo pure dall'equazioni dei lati dei tre trilateri riferiti a quello reale, che essi formano un ciclo di rette $(p)^9$ rispetto al primo trilatero. I vertici dei tre trilateri formano invece un ciclo di 9 punti $(Q)^9$ dunque:

Teorema XLVII. I 9 lati di tre trilateri della C_3 formano tre cicli projettivi $(p_c)^3$ $(p_b)^3$ $(p_a)^3$ di un ciclo $(p)^9$, e i loro vertici formano tre cicli $(Q_c)^3$ $(Q_b)^3$ $(Q_a)^3$ di un ciclo $(Q)^9$ rispetto ai cicli S_3^2, che si riferiscono al 4° trilatero.

17. Rispetto alle coniche delle tre terne $(A)^3$ $(B)^3$ $(C)^3$ del ciclo $S_3'^2$ ha la curva C_3 tre curve polari reciproche. Infatti ad un ciclo $(P_a)^3$ inscritto in C_3 corrispondono tre cicli $(p_c)^3$, $(p_b)^3$, $(p_a)^3$, polari reciproci rispetto alle coniche delle tre terne. I tre punti d'inflessione di C_3 sopra uno dei lati del triangolo fondamentale formano un ciclo $(R)^3$ (Teor. XL), e questo ha per polare reciproco rispetto a tutte le coniche di un ciclo S_3^2 un ciclo $(r)^3$; se questo ciclo è $S_3'^2$, le rette del ciclo $(r)^3$ sono le tre rette armoniche dei tre flessi; onde le tre curve reciproche di C_3 rispetto alle coniche del ciclo $S_3'^2$, toccano le 9 rette armoniche dei 9 flessi di C_3. Analogamente per i cicli $S_3''^3$ $S_3'''^2$ $S_3''''^2$, dunque:

Teorema XLVIII. La figura dei 9 punti d'inflessione della C_3 e quella delle 9 rette armoniche sono polari reciproche rispetto alle 36 coniche dei 4 cicli $S_3'^2$ $S_3''^2$ $S_3'''^2$ $S_3''''^2$, che si riferiscono

([1]) Vedi Clebsch, *Vorlesungen ueber Geometrie*, p. 572.

rispettivamente ai 4 trilateri della curva. Tre sole di queste 36 coniche sono reali e formano una terna di uno dei quattro cicli ([1]).

18. Ad una curva L corrisponde rispetto ai cicli S_3^2 un ciclo di 9 curve, che si scompone in tre cicli $(L_c)^3$ $(L_b)^3$ $(L_a)^3$. Ora se una curva di uno di questi cicli ha una certa proprietà projettiva con la C_3, è chiaro, che la stessa proprietà l'avranno pure le altre due curve del ciclo, dunque:

Teorema XLIX. Ad una curva L corrispondono tre cicli $(L_a)^3$ $(L_b)^3$ $(L_c)^3$, rispetto ad uno qualunque dei cicli S_3^2, che si riferiscono ad uno dei trilateri della C_3. Se una curva di uno di quei tre cicli ha con la C_3 una proprietà projettiva, le altre due curve del ciclo avranno con la C_3 la medesima proprietà.

Consideriamo ora il fascio sizigetico:

$$x_1^3 + x_2^2 + x_3^3 + 6k\,x_1 x_2 x_3 = 0. \qquad (1)$$

Una curva qualunque f di esso ha la sua Hessiana Δ nel fascio stesso. Due punti conjugati P_1 Q_1 dell'Hessiana rispetto alla f, dànno luogo a due coppie di punti P_2 Q_2, P_3 Q_3, che formano coi due primi due cicli $(P_a)^3$ $(Q_a)^3$, inscritti pure in Δ. P_2 Q_2, P_3 Q_3 sono anche coppie di punti conjugati rispetto alla f. Infatti P_1 ha la proprietà, che la sua conica polare rispetto alla C_3 ha un punto doppio in Q_1; ebbene pel teorema precedente i punti P_2 P_3 avranno la stessa proprietà, così Q_2 Q_3. Questo si vede facilmente anche analiticamente. Onde uno dei sistemi di punti conjugati di Δ si trasforma in sè stesso, rispetto ai cicli S_3^2, che si riferiscono ai trilateri di Δ.

Teorema L. In una C_3 un sistema di punti conjugati si trasforma in sè stesso rispetto ai cicli S_3^2, che si riferiscono ad uno qualunque dei suoi trilateri.

19. Le rette, che congiungono due a due i punti di un ciclo $(P_a)^3$, dato da un punto $(y_1\, y_2\, y_3)$, hanno per coordinate $\left(\frac{1}{y_1}\frac{1}{y_2}\frac{1}{y_3}\right)$, $\left(\frac{r}{y_1}\frac{r^2}{y_2}\frac{1}{y_3}\right)$, $\left(\frac{r^2}{y_1}\frac{r}{y_2}\frac{1}{y_3}\right)$ e formano perciò un ciclo $(q_a)^3$. Le 6 rette che congiungono due a due i punti dei cicli $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ formano i due cicli $(q_b)^3$ $(q_c)^3$. Ora se consideriamo un ciclo $(P_a)^3$ inscritto nella C_3, i lati di esso formano un ciclo $(q_a)^3$, e i loro ulteriori punti d'incontro con la C_3 formano un altro ciclo $(N_a)^3$, perchè essendo N_1 il punto d'incontro di q_1 con C_3, è evidente che i punti N_2 N_3, che formano con N_1 il gruppo $(N_a)^3$ sono situati sulla C_3 ed anche in $q_2\, q_3$, dunque:

Teorema LI. Se dei lati di un ciclo $(P_a)_3$ inscritto in C_3 si trovano i tre ulteriori punti d'incontro con C_3, essi formano un ciclo $(Q_a)^3$. — Che relazione hanno i successivi cicli che si ottengono continuando l'operazione col ciclo $(Q_a)^3$ ecc.?

20. Nel fascio sizigetico sciegliamo la curva

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mr^2 x_1 x_2 x_3 = 0 \qquad (1)$$

ove r^2 è una delle radici cubiche dell'unità. Se il punto P_1 $(y_1\, y_2\, y_3)$ è situato

[1] Queste 36 coniche furono incontrate per altra via dal prof. Battaglini in una sua recente Nota, che fa parte di un volume, che si sta pubblicando in onore del Chelini.

sulla (1) allora non solamente vi sono situati i punti (ry_1, r^2y_2, y_3) (r^2y_1, ry_2, y_3) ma anche i punti (ry_1, y_2, y_3), (y_1, ry_2, y_3), (r^2y_1, r^2y_2, y_3) e perciò i due cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ sono inscritti nella (1). Prendendo in considerazione tutti i quattro trilateri del fascio si ha:

Teorema LII. Ci sono rispetto ad ogni trilatero di un fascio sizigetico due sistemi di curve C_3 per le quali, dato un punto P o una tangente q di esse, due dei cicli $(P_a)^3$ $(P_b)^3$ $(P_c)^3$ o $(q_a)^3$ $(q_b)^3$ $(q_c)^3$ sono inscritti in esse o circoscritti ad esse.

Finalmente sia $k=0$, la curva

$$x_1^3 + x_2^3 + x^3 = 0 \tag{2}$$

è una curva A. Un suo punto P od una sua tangente q dà un ciclo $(P)^9$ inscritto in essa od un ciclo $(q)^9$ circoscritto ad essa. La curva ha la stessa polare reciproca rispetto alle coniche di un ciclo qualunque S_3^2, che si riferisce al triangolo fondamentale (Teor. XXXII e segg.).

Teorema LIII. In un fascio sizigetico di curve C_3 c'è rispetto ad uno qualunque dei trilateri del fascio una curva equianarmonica, per la quale, dato un suo punto P od una sua tangente q il ciclo $(P)^9$ o $(q)^9$ corrispondente è inscritto in essa o circoscritto ad essa. Essa ha rispetto alle 9 coniche di un ciclo qualunque S_3^2, che si riferisce a quel trilatero, la stessa polare reciproca, che varia da ciclo a ciclo, e che è una curva equianarmonica di 3ª classe. Ogni punto od ogni tangente della curva equianarmonica di 3° ordine dà luogo rispetto ad un trilatero a un ciclo di 6. 9=54 punti inscritto in essa o di 54 tangenti circoscritto ad essa (Teorema XXXV).

Il caso $n=4=2.2$ dà luogo ad un ciclo S_4^2 di 16 coniche, che pel teorema XX si decompone in 4 cicli S_2^2. La curva A

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0 \tag{1}$$

ha una stretta relazione con questi gruppi di 16 coniche ed ogni suo punto P ed ogni sua tangente q dà un ciclo di 16 punti $(P)^{16}$ inscritto nella curva o di 16 rette $(q)^{16}$ circoscritto ad essa. Se poi si scambiano le coordinate fra loro da ogni punto o da ogni tangente della curva se ne ottengono altri 5, che soddisfano il teorema XXXV. Onde ogni punto od ogni tangente della (1) dà luogo ad un ciclo di 96 punti inscritto nella curva o di 96 rette circoscritto ad essa.

I punti o tangenti singolari della curva devono somministrare dei gruppi speciali.

Pongo fine alla discussione di questi ed altri casi speciali nel piano. Siccome i casi $n=2$ ed $n=3$ presentano tanto interesse, è probabile, che dando ad n altri valori si ottengano altri gruppi di coniche ed altri cicli di punti, non senza interesse. Passo ora a sviluppare la medesima teoria nello spazio, tralasciando però tutte quelle dimostrazioni o teoremi, che si enunciano nella stessa guisa nel piano.

Parte II.

21. Nello spazio invece di considerare due coniche C_1 C_2 come nel n. 1 considero due superficie di 2° grado C_1 C_2 cioè:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{1}$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0 \tag{2}$$

Se per un punto P_1 $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ operiamo la trasformazione polare nel senso $C_1 C_2$ abbiamo una serie di punti $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$, le cui coordinate sono della forma $a_i^{-m} y_i$, e analogamente quelle della serie dei piani polari $\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_n \ldots$ La trasformazione polare nel senso $C_2 C_1$ ci dà la serie di punti $P_{-1} P_{-2} \ldots P_{-n} \ldots$ le cui coordinate sono della forma $a_i^m y_i$, così quelle della serie dei piani polari Π_{-1} $\Pi_{-2} \ldots \Pi_{-n} \ldots$ Le coordinate dei punti consecutivi di P_1 sono dunque della seguente forma:

$$\mu x_i = a_i^m y_i \tag{3}$$

ove m è un intero qualunque. È chiaro, anche qui, che il gruppo (P) determina due spazî projettivi, perchè i poli di un piano rispetto a due superficie di 2° grado $C_1 C_2$, formano due spazî projettivi, i cui punti uniti sono i vertici del tetraedro conjugato comune delle due superficie $C_1 C_2$. Se il punto P_1 si muove in una retta r, i suoi consecutivi si muoveranno nelle consecutive di r, descrivendo delle punteggiate projettive; se P_1 si muove in un piano Π_1, i suoi consecutivi si muoveranno nei piani consecutivi di Π_1, generando dei piani punteggiati projettivi; se P_1 si muove in uno spigolo del tetraedro fondamentale, tutti i punti del gruppo (P) si muoveranno in quello spigolo, se invece P_1 si muove in una delle faccie di quel tetraedro, tutti i suoi consecutivi si muoveranno pur essi in quella faccia.

Dunque per le due superficie $C_1 C_2$ valgono i teoremi analoghi ai teoremi I e II dati per le coniche, ed inoltre

Teorema LIV. Se il punto (P) è situato sopra uno spigolo del tetraedro fondamentale, il gruppo P è situato sul medesimo spigolo, se P_1 è situato invece sopra una faccia di esso, il gruppo (P) è situato su quella faccia, formando un gruppo projettivo piano rispetto alle due coniche d'intersezione delle superficie $C_1 C_2$ con essa. Se le due superficie $C_1 C_2$ hanno una retta comune e il punto P_1 giace in questa retta, il gruppo (P) sarà situato sulla medesima retta.

Se il punto P_1 è un punto delle due superficie per es. C_1 allora i piani del gruppo polare reciproco di (P) rispetto a $C_1 C_2$ passano rispettivamente per un punto di (P), e i punti di (P) sono perciò due a due conjugati rispetto a C_1 e C_2, in modo però che un punto del gruppo ha rispetto C_1 e C_2 due punti conjugati distinti. Qui possiamo fare dell'analoghe considerazioni che abbiam fatto al n. 2, rispetto alle due superficie $C_1 C_2$, per dimostrare che se due punti di un gruppo (P) sono conjugati rispetto ad una delle superficie $C_1 C_2$, uno dei punti del gruppo è situato in una delle due superficie. Per le superficie $C_1 C_2$ valgono i teoremi analoghi ai teoremi III, VI, VII e IX.

Teorema LV. Se il punto P_1 è situato sulle due superficie $C_1 C_2$, i piani del gruppo polare (Π) di (P) passano ciascuno per due punti di (P). Analogamente se P_1 è uno dei punti di contatto di un piano tangente comune alle due superficie $C_1 C_2$.

Siccome di un punto o di un piano di coordinate $y_1 y_2 y_3 y_4$, sono consecutivi i punti o piani, le cui coordinate sono della forma $a_i^n y_i$, così di una retta, le cui coordinate sono p'_{ik}, sono consecutive le rette le cui coordinate sono:

$$\mu p_{ik} = a_i^n a_k^n p'_{ik} \tag{4}$$

ove n è un numero intero qualunque. L'equazione di C_1 e C_2 in coordinate di rette sono:

$$\Sigma p^2_{12} = 0 \qquad \Sigma a_3 a_4 p^2_{12} = 0 \,. \tag{5}$$

I lati di un poligono, formato dalle rette, che congiungono due punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P), oppure di due punti tali che gl'indici, indicanti il posto di essi in (P), diano una differenza costante, sono rette consecutive, che s' incontrano rispettivamente nei punti di (P); ciò non vuol dire però che due rette immediatamente consecutive di un gruppo qualunque si debbano in generale incontrare. Se di un piano Π troviamo i due poli rispetto a C_1 C_2 e della retta congiungente di essi, troviamo le due conjugate rispetto a C_1 C_2, queste due rette sono immediatamente consecutive, dunque:

Teorema LVI. *In un piano Π qualunque ci sono due rette immediatamente consecutive di un determinato gruppo, e infinite coppie di punti immediatamente consecutivi, che appartengono rispettivamente ad infiniti gruppi (P).*

22. Un gruppo (P) qualunque è inscritto in una curva trascendente W intersezione dei 4 coni, che si ottengono dall'equazioni

$$\mu x_1 = a_1{}^n y_1, \quad \mu x_2 = a_2{}^n y_2, \quad \mu x_3 = a_3{}^n y_3, \quad \mu x_4 = a_4{}^n y_4$$

eliminando fra tre di esse μ ed n. L'equazioni di questi 4 coni sono:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_1}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}} = 1, \quad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_4}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_4}{a_2}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_4}{a_1}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_3}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_3}{a_1}} = 1, \quad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_4}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_4}{a_1}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}} = 1 \tag{1}$$ (¹).

Il gruppo (P) ha rispetto a tutte le superficie dei due gruppi (R_1) ed (R_2) lo stesso gruppo polare reciproco (Π), i piani di questo gruppo inviluppano una superficie sviluppabile w, che è la polare reciproca di W rispetto alle superficie di (R_1) ed (R_2). Quindi ogni punto di W dà luogo ad un gruppo (P) inscritto in W, così ogni sua tangente o piano osculatore. Analogamente per la sviluppabile w. Abbiamo supposto però tacitamente $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ (+), perchè altrimenti i punti di un gruppo non sarebbero situati solamente in una curva W. Osserviamo che lo spigolo di regresso di w è pure una curva W, e se la W è una curva algebrica, come può esserlo, allora ha l'ordine eguale alla sua classe. Queste curve W come è chiaro, passano per due vertici del tetraedro fondamentale, toccano ivi due spigoli ed hanno ivi due faccie come piani osculatori. Se si ha per es.

$$a_2 > a_2 > a_3 > a_4$$

i due primi coni (1) si possono mettere sotto la seguente forma:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_1}{a_2}} = \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3} + \log\frac{a_1}{a_2}} \tag{2}$$

$$\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log\frac{a_3}{a_4}} \left(\frac{x_4}{y_4}\right)^{\log\frac{a_2}{a_3}} = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log\frac{a_3}{a_4} + \log\frac{a_2}{a_3}} \tag{3}$$

(¹) Vedi Battaglini l. c.

Questi sono due coni coi vertici in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e con la generatrice $x_2 = x_3 = 0$ comune.

Supponendo $\quad a_1 a_3 = a_2^2 \quad a_2 a_4 = a_3^2 \quad (4)$

da cui $\quad a_1 a_4 = a_3^3 \quad a_4 a_1^2 = a_2^3$

i coni (2) e (3) diventano di 2° grado cioè:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}\right) = \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 \qquad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}\right) = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^2$$

mentre gli altri due sono

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}\right)^2 = \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^3; \qquad \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2\left(\frac{x_4}{y_4}\right) = \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^3$$

Questi sono due coni di terzo ordine con una generatrice cuspidale ed una d'inflessione. I 4 coni generano evidentemente una cubica gobba, che passa per i punti $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e tocca in essi le due rette $x_1 = x_4 = 0$ e $x_1 = x_2 = 0$ ed ha nel primo per piano osculatore il piano $x_1 = 0$, nel 2° il piano $x_4 = 0$. Questo risulta chiaro dalle equazioni dei coni stessi e sapendo che projettando una curva gobba da un punto di una sua tangente, il cono projettante ha questa retta come generatrice cuspidale, se esso ha ivi anche una generatrice d'inflessione, vuol dire che il piano tangente al cono lungo questa generatrice contiene due tangenti della curva infinitamente vicine ossia che è un piano osculatore della curva. Presi due punti A_1, A_4 qualunque di una cubica gobba e i piani osculatori e le tangenti in essi alla curva, e di queste si trovano rispettivamente i punti d'incontro $A_2 A_3$ coi due piani osculatori, si ottiene un tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$, rispetto al quale la cubica gobba si trova nelle stesse condizioni della precedente rispetto al tetraedro fondamentale.

Teorema LVII. Un gruppo projettivo (P) qualunque è situato nello spazio in una curva gobba trascendente W. Del gruppo (P) è polare reciproco rispetto a tutte le superficie di (R_1) e (R_2) un gruppo projettivo (Π_1), il quale genera la sviluppabile w, polare reciproca di W rispetto a quelle superficie. Ogni punto od ogni tangente od ogni piano tangente e osculatore di W dà luogo ad un gruppo inscritto in essa o circoscritto ad essa. Analogamente per w. Le curve W passano per due vertici del tetraedro fondamentale, toccano ivi due spigoli ed hanno in essi due facce come piani osculatori. La loro superficie sviluppabile è una superficie w (Vedi Teorema LXI).

Teorema LVIII. Le curve W possono essere algebriche, esse hanno l'ordine eguale alla classe. Di queste curve fa parte la cubica gobba.

Teorema LIX. Presi due punti $A_1 A_2$ di una cubica gobba e costruiti i punti d'incontro $A_3 A_4$ delle tangenti in essi coi piani osculatori in essi alla curva, si ottiene un tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$. La cubica gobba è una curva W rispetto ad infiniti sistemi di gruppi (R_1) ed (R_2) di superficie di 2° grado, che si riferiscono a quel tetraedro.

Teorema LX. Alle curve W appartengono gli spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Due curve W non possono avere in comune altri punti all'infuori dei vertici del tetraedro fondamentale ed altri piani osculatori o rette tangenti all'infuori delle facce o spigoli di esso.

23. Le curve W gobbe hanno analoghe proprietà delle curve W piane incontrate al n. 3. Esse hanno per equazioni differenziali, supponendo $x_4=1$, $a_4=1$ e $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log a_2}{\log a_1}\frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{\log a_3}{\log a_1}\frac{z}{x} \tag{1}$$

che risultano da due dei 4 coni, trovati al n. 22. Se ora si considera la trasformazione infinitesima

$$\begin{aligned} x&=x'+\log a_1 . x' . dm \\ y&=y'+\log a_2 . y' . dm \\ z&=z'+\log a_3 . z' . dm \end{aligned} \tag{2}$$

le curve W mediante questa trasformazione si trasformano in sè medesime, in modo che ripetendola infinite volte si può passare da un punto di W ad un altro qualunque di essa ottenendo una trasformazione finita della forma

$$x_i=a_1^m x' \quad y=a_2^m y' \quad z=a_3^m z' \tag{3}$$

Da ciò si vede che due punti qualunque di W si possono considerare come punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P), rispetto ad un sistema di due gruppi di superficie (R_1) ed (R_2), che si riferiscono al tetraedro, invariabile nella trasformazione (2), i quali dipendono dalle quantità a_1, a_2, a_3. Ha luogo perciò per le curve gobbe W il teorema analogo al teorema XII. Un teorema analogo vale pure per le superficie sviluppabili *w*.

Si ha pure:

Teorema LXI. Le curve W non possono avere dei punti o tangenti singolari che nei vertici o spigoli del tetraedro fondamentale. Le superficie sviluppabili *w*, non possono avere altri piani singolari all'infuori dei piani del tetraedro fondamentale.

Teorema LXII. Il punto di contatto P di una tangente di una curva W e i tre punti d'incontro di essa con tre facce del tetraedro fondamentale, formano un rapporto anarmonico costante qualunque sia la tangente di W.

Se dai punti di W projettiamo i vertici del tetraedro fondamentale si ottengono delle stelle projettive, nelle quali si corrispondono i piani osculatori di W.

Teorema LXIII. Uno dei punti d'incontro P di una curva W con una delle superficie dei gruppi (R_1) ed (R_2), dà luogo ad un gruppo (P) inscritto in W, i cui punti sono due a due conjugati rispetto alle superficie dei gruppi (R_1) ed (R_2). Analogamente per un piano osculatore di W tangente ad una di quelle superficie.

Se la curva W tocca in un punto una delle superficie di (R_1) e (R_2), i piani tangenti della sua superficie polare reciproca w rispetto a quelle superficie, sono tangenti a W, se invece il piano osculatore di W nel punto di contatto è anche tangente alla 1ª superficie, la W ha per sua polare reciproca rispetto a (R_1) e (R_2) la sua stessa superficie sviluppabile.

24. Secondo il n. 21 le formole di trasformazione per due rette consecutive sono

$$\mu p_{ik} = a_i^n \, a_k^n \, p'_{ik}. \qquad (1)$$

Data una retta è evidente che tutte le sue consecutive generano una superficie rigata F, che conterrà tutte le curve W generate dai punti della retta. L'equazioni, che determinano la superficie F, corrispondente alla retta p_{ik} è data da tre delle seguenti equazioni:

$$\left(\frac{p_{12}}{p'_{12}}\right)^{\frac{1}{\log a_1 a_2}} = \ldots = \left(\frac{p_{34}}{p'_{34}}\right)^{\frac{1}{\log a_3 a_4}}. \; (^1)$$

È chiaro che questa superficie può essere algebrica qualora gli esponenti siano proporzionali a numeri razionali.

Teorema LXIV. Le rette di un gruppo projettivo (r) sono situate in una superficie rigata F. Ogni retta della superficie dà luogo ad un gruppo inscritto in essa. Essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle superficie di (R_1) ed (R_2).

Teorema LXV. Se le due rette, che generano due superficie F, s'incontrano, le due superficie F s'incontrano in una curva W ed hanno una superficie sviluppabile w comune, oltre gli spigoli del tetraedro fondamentale, pei quali esse passano. Se invece quelle due rette non s'incontrano le due superficie F non hanno nè alcuna curva W nè alcuna sviluppabile w comune. Le superficie F hanno tutte le loro rette singolari negli spigoli del tetraedro fondamentale.

Teorema LXVI. Se una superficie F, ha una retta comune con una delle superficie di (R_1) ed (R_2), essa è reciproca di sè stessa rispetto a tutte le superficie (R_1) (R_2).

Teorema LXVII. Le generatrici di F, tagliano le 4 facce del tetraedro fondamentale secondo 4 punti di un rapporto anarmonico costante (²).

Come per le coniche qui si può dimostrare che al massimo $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 1$ punti immediatamente consecutivi di un gruppo (P) possono essere situati in una superficie dell' ordine n, perchè se ce ne fosse uno di più sarebbero tutti situati sulla superficie. Però si può cercare la posizione speciale di C_1 C_2, in

(¹) Battaglini l. c.

(²) Vedi Klein e Lie, Comptes rendus p. 1222 e 1275, 1870.

modo che $\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{2\,.\,3}$ punti di un gruppo (P), ma non immediatamente consecutivi siano situati in una superficie d'ordine n.

Se $$\log a_1 : \log a_2 : \log a_3 : \log a_4 = n_1 : n_2 : n_3 : n_4$$
essendo $n_1\ n_2\ n_3\ n_4$ dei numeri razionali, la C_2 si pone sotto la forma
$$\Sigma e^{n_1} x_1^2 = 0\,.$$

25. Ora data la superficie $C_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ vogliamo determinare la C_2 in tal maniera, che dato il punto $P(y_1 y_2 y_3 y_4)$ il punto P_n del gruppo (P) coincida con P. Si dovrà perciò avere:
$$a_1 = \sqrt[n]{1} \quad a_2 = \sqrt[n]{1} \quad a_3 = \sqrt[n]{1} \quad a_4 = 1\,.$$
Scegliendo per $a_1\ a_2\ a_3$ una delle radici n^{me} dell'unità si ottiene un ciclo di n^3 superficie $S_n{}^3$ fra le quali è compresa pure la C_1. Siano date due di queste superficie per es.
$$r^p\, x_1^2 + r^q\, x_2^2 + r^s\, x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{1}$$
$$r^{p_1} x_1^2 + r^{q_1} x_2^2 + r^{s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{2}$$
e di un punto $P(y_1 y_2 y_3 y_4)$ si costruiscano i consecutivi sì nella trasformazione (1) (2) come anche nella trasformazione (2) (1), i punti P_n e P_{-n} coincidono con P. Il gruppo projettivo (P) diventa un ciclo projettivo. Analogamente per una retta, un piano o per qualunque altro ente geometrico. L'equazione di una delle n^3 superficie si può mettere anche sotto la forma:
$$e^{\frac{2\mu_1\pi}{n}} x_1^2 + e^{\frac{2\mu_2\pi}{n}} x_2^2 + e^{\frac{2\mu_3\pi}{n}} x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{3}$$
ove $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ sono numeri interi, che variano da 0 ad $n-1$.

Teorema LXVIII. Data una superficie di 2° ordine ce ne sono altre n^3-1 che formano con la 1ª un ciclo $S_n{}^3$. Due a due sono in tale posizione che il gruppo (P) corrispondente ad un punto P, contiene n punti di un ciclo projettivo $(P)^n$. A questo ciclo corrisponde un ciclo di n piani $(\Pi)^n$, polare reciproco del 1° rispetto alle due superficie. Le n^3 superficie del ciclo $S_n{}^3$ hanno lo stesso tetraedro conjugato comune. Per esse vale il teorema analogo al teorema XX.

Una superficie qualunque di $S_n{}^3$ per es.
$$r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{4}$$
interseca lo spigolo per es. $x_3 = x_4 = 0$ nei due punti $\frac{x_1}{x_2} = \pm i \sqrt{r^{q-p}}$, quindi le n^3 superficie di $S_n{}^3$ tagliano quello spigolo in sole n coppie di punti, vale a dire che per ogni coppia di punti di esso passano n^2 superficie del ciclo. La (4) taglia inoltre il piano per es. $x_1 = 0$ nella conica
$$r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 = 0\,.$$

È chiaro che le n^3 superficie incontrano quel piano in sole n^2 coniche, e che queste formano un ciclo piano $S_n{}^2$; onde in ciascuna di queste coniche si toccano

n superficie di S_n^3. Queste n superficie formano un' ennupla di 1 specie. Due coppie di punti, dati dalle superficie del ciclo, su due spigoli opposti del tetraedro fondamentale formano un quadrangolo gobbo; per i lati di esso passano n superficie del ciclo S_n^3; esse formano un' ennupla di 2ª specie.

Teorema LXIX. Le n^3 superficie di un ciclo S_n^3 incontrano ciascuno degli spigoli del tetraedro conjugato comune di esse in n coppie S_n di punti e ciascuno delle due facce in n^2 coniche di un ciclo S_n^2. — In ognuna di queste coniche, si toccano n superficie di S_n^3, e formano un' ennupla di 1ª specie. Nei lati di un quadrangolo gobbo, che ha i suoi vertici in due coppie S_n di due spigoli opposti, passano n superficie di S_n^3, che formano un ennupla di 2ª specie. Ci sono 4 n^2 ennuple 1ª specie e 3 n^2 di 2ª.

La polare reciproca di una superficie qualunque di S_n^3

$$r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 = 0$$

rispetto ad un'altra superficie $r^{p_1} x_1^2 + r^{q_1} x_2^2 + r^{s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0$.

è $r^{2p_1-p} x_1^2 + \ldots = 0$, dunque:

Teorema LXX. La polare reciproca di una superficie di S_n^3 rispetto ad un'altra superficie di esso appartiene a S_n^3.

Ci sono quattro casi da considerare per la posizione reciproca di due superficie di 2° grado S_n^3, mentre per le coniche ce ne sono due soli (nº 5). O le due superficie si toccano lungo una conica ed allora appartengono ad un'ennupla di 1ª specie, o s'incontrano lungo i 4 lati di un quadrangolo gobbo ed allora appartengono ad un'ennupla di 2ª specie, o incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in coppie di punti distinte, oppure si toccano in due punti di uno spigolo.

Nel 1° caso le due superficie si mettono sotto la seguente forma:

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p_1} x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Nel 2°

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+p_1} x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 . \end{aligned} \tag{2}$$

Nel 3°

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+q_1} x_2^2 + r^{s+s_1} x_3^2 + x_4^2 &= 0 . \end{aligned} \tag{3}$$

Nel 4° caso

$$\begin{aligned} r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+q_1} x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 &= 0 . \end{aligned} \tag{4}$$

26. Le due superficie (1) appartengono ad un' ennupla di 1ª specie. Il ciclo projettivo $(P)^n$ di un punto P qualunque rispetto alle due superficie (1) è situato sopra una retta passante pel vertice $x_2 = x_3 = x_4 = 0$; analogamente i piani del ciclo polare reciproco $(\Pi)^n$ s'incontrano in una retta di $x_1 = 0$.

Le due superficie (2) appartengono ad un' ennupla di 2ª specie. Il ciclo $(P)^n$ corrispondente ad un punto P rispetto ad esse, è situato sopra una retta t, che si appoggia ai due spigoli $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, ove giaciono i vertici del

quadrangolo comune alle due superficie (2). — Analogamente i piani del ciclo polare reciproco di $(P)^n$ s'incontrano in una retta che si appoggia agli stessi due spigoli opposti. Dunque:

Teorema LXXI. La polare reciproca di una superficie di un'ennupla di 1ª o 2ª specie rispetto ad una superficie dell'ennupla è una superficie di essa. I cicli (R_1) ed (R_2), generati da due superficie dell'ennupla di 1ª o 2ª specie, coincidono con l'ennupla stessa.

Teorema LXXII. Il ciclo P^n, che corrisponde ad un punto P rispetto a due superficie di un'ennupla di 1ª o 2ª specie, è situato in una retta t, e i piani del ciclo polare $(\Pi)^n$ s'incontrano in una retta t_1. Se l'ennupla è di 1ª specie la retta t_1 è situata sul piano del tetraedro fondamentale, ove si toccano le n superficie dell'ennupla e la retta t passa pel vertice opposto, mentre se l'ennupla è di 2ª specie le rette t e t_1 si appoggiano sulla coppia di spigoli opposti, ove sono situati i vertici del quadrangolo comune alle superficie dell'ennupla. Le rette del ciclo $(t)^n$ corrispondenti ad una retta t per l'ennupla di 1ª specie, s'incontrano in un punto del piano, ove si toccano le n superficie dell'ennupla, e stanno in un piano col vertice opposto, mentre se l'ennupla è di 2ª specie le rette di $(t)^n$ determinano un'iperboloide, che passa per gli spigoli opposti, ove sono situati i vertici del quadrangolo comune alle superficie dell'ennupla.

27. Siano date ora due superficie del ciclo S_n^3, che incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in coppie di punti distinte, per es.

$$r^p x_1^2 + r^q x_2^2 + r^s x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{1}$$

$$r^{p+p_1} x_1^2 + r^{q+q_1} x_2^2 + r^{s+s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{2}$$

Moltiplicando i coefficienti di x_1^2, x_2^2, x_3^2 ordinatamente per r^{p_1}, r^{q_1}, r^{s_1} si ha un'altra superficie di S_n^3 cioè:

$$r^{p+2p_1} x_1^2 + r^{q+2q_1} x_2^2 + r^{s+2s_1} x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{3}$$

che interseca gli spigoli del tetraedro fondamentale in punti diversi da quelli delle due prime. Ora dalla (3) si può ottenere nella stessa guisa un'altra superficie di S_n^3 e così continuando si trovano tutte le superficie di S_n^3, le cui equazioni sono della forma:

$$r^{p+mp_1} x_1^2 + r^{q+mq_1} x_2^2 + r^{s+ms_1} x_3^2 + x_4^2 = 0. \tag{4}$$

Queste superficie compresa la (1) sono n e formano un' *ennupla di* 3ª *specie*. Esse tagliano gli spigoli del tetraedro fondamentale in coppie di punti distinte.

Tenendo fissi come moltiplicatori r^{p_1}, r^{q_1}, r^{s_1} il ciclo S_n^3 si separa in n^2 ennuple di 3ª specie $(A)^n$ $(B)^n$ . . . $(N^n)^2$.

Con analoghe considerazioni fatte per le coniche al n. 6 si dimostra che con la n^3 superficie di S_n^3, si formano $(n-3)^2$ sistemi di n^2 ennuple di 2ª specie.

Teorema LXXIII. Con le n^3 superficie del ciclo S_n^3, si formano $(n-3)^2$ sistemi di n^2 cicli di n superficie (ennuple di 3ª specie) $(A)^n (B)^n .... (N^2)^n$. Le n superficie di un'ennupla di 3ª specie incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in n coppie di punti distinte e le

facce di esso in n^2 coniche di un ciclo piano S_n^2. I cicli (R_1) (R_2), determinate da due qualunque superficie dell' ennupla di 3ª specie coincidono con l' ennupla stessa.

Teorema LXXIV. Il ciclo $(P)^n$ che corrisponde a un punto P rispetto a due superficie di un' ennupla di 3ª specie ha lo stesso ciclo polare reciproco rispetto a tutte le superficie dell' ennupla. Esso è situato in una curva gobba W algebrica, che ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le n superficie dell' ennupla.

Il ciclo $(t)^n$ corrispondente ad una retta t rispetto a due superficie di un' ennupla, ha lo stesso polare reciproco rispetto alle superficie dell' ennupla. Esso è situato in una superficie F algebrica, che ha la stessa polaro reciproca rispetto alle superficie dell' ennupla.

Teorema LXXV. In una curva gobba W algebrica si possono inscrivere e circoscrivere dei gruppi projettivi aperti e chiusi di punti, di tangenti, di piani osculatori. In una superficie algebrica F, sono inscrivibili dei gruppi projettivi aperti e chiusi di rette (Teor. XXVI).

Abbiamo visto che la cubica gobba appartiene alle curve W essa si può ottenere qualunque sia n, purchè siano soddisfatte le condizioni (4) (n 22). Infatti supponendo $a_1 = r^p$, $a_2 = r^q$, $a_3 = r^s$ $a_4 = 1$ le due prime formole (4) divengono $r^p\, r^s = r^{2q}$ e $r^q = r^{2s}$. Ora perchè ciò avvenga basta supporre q numero primo con n, e $q + 2\,(x + 1)\,n = 2s$ per es. $q + n = 2s$ da cui $s = \frac{q+n}{2}$.

Teorema LXXVI. Si può sempre trovare un' ennupla di 3ª specie di un ciclo S_n^3, per la quale un ciclo qualunque $(P)^n$ sia situato in una cubica gobba, tranne nel caso in cui $n=3$.

Teorema LXXVII. Se i punti di alcuni cicli projettivi $(P)^n$ rispetto ad un' ennupla di 1ª, 2ª o 3ª specie determinano una sola curva o superficie d'ordine m; essa ha la stessa polare reciproca rispetto a tutte le n superficie dell' ennupla e ogni suo elemento dà luogo ad un ciclo inscritto o circoscritto ad essa (Teor. XXVII).

Siano date le n^3 superficie di S_n^3 disposte in un dato ordine e di un punto $P\,(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ troviamo il piano polare rispetto alla 1ª, di questo il polo rispetto alla 2ª, di questo il piano polare rispetto alla 3ª e così di seguito; otteniamo così un ciclo di n^3 punti $(P)^{n^3}$ e un ciclo di n^3 piani $(\Pi)^{n^3}$, le cui coordinate sono della forma

$$r^p\, y_1\,,\quad r^q\, y_2\,,\quad r^s\, y_3\,,\quad y_4\,.$$

Essi sono indipendenti dall'ordine delle n^3 superficie di S_n^3 e perciò sono polari reciproci rispetto alle medesime.

Teorema LXXVIII. Se di un punto P si determina il piano polare rispetto alla prima delle n^3 superficie, disposte in un dato ordine, di questo il polo rispetto alla 2ª, di questo il piano polare rispetto alla 3ª e così di seguito, si ottengono due cicli, uno di

n^3 punti $(P)^{n^3}$ ed uno di n^3 piani $(\Pi)^{n^3}$, che sono indipendenti dall'ordine delle n^3 superficie e polari reciproci rispetto ad esse. Date $2r+1$ delle n^3 superficie di S_n^3, ha luogo il teorema analogo al teorema XXIV.

Date le n^2 ennuple di 1ª specie, le cui superficie si toccano in n^2 coniche situate in una faccia del tetraedro fondamentale, il ciclo $(P)^{n^3}$, che corrisponde ad un punto P, si scompone rispetto ad esse in n^2 cicli situati in n^2 rette, che passano per il vertice opposto di quella faccia; e il ciclo $(\Pi)^{n^3}$ polare reciproco si scompone in n^2 cicli di n piani, che s'incontrano in n^2 rette di essa.

Teorema LXXIX. Un ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli di n punti situati sopra n^2 rette di 1ª specie, che passano per uno qualunque dei vertici del tetraedro fondamentale. Il ciclo $(\Pi)^{n^3}$, polare reciproco del 1° rispetto alle n^3 superficie di S_n^3, si scompone in n^2 cicli di n piani, che s'incontrano in n^2 rette di 1ª specie situate sulla faccia opposta a quel vertice. Gli n^2 cicli di $(P)^{n^3}$ e gli n^2 cicli $(\Pi)^{n^3}$, sono ordinatamente polari reciproci rispetto a ciascuna delle n^2 ennuple di 1ª specie, le cui superficie si toccano lungo n^2 coniche, situate su quella faccia. Il ciclo $(P)^{n^3}$ ha rispetto alle $4n^2$ ennuple di 1ª specie $4n^2$ rette di 1ª specie.

28. Siano ora date le n^2 ennuple di 2ª specie, le cui superficie s'incontrano in quadrilateri aventi i loro vertici in due spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Come risulta dal teorema LXXII, il ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone per ognuna di quelle ennuple in n^2 cicli di n punti, situati in n^2 rette, che si appoggiano su quei due spigoli; analogamente il ciclo polare reciproco $(\Pi)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli di n piani, che s'incontrano in n^2 rette, che pure s'appoggiano su quei due spigoli. Infatti gli n^2 punti di $(P)^{n^3}$ che hanno le due stesse ultime coordinate, sono situati in un piano passante per lo spigolo $x_3=x_4=0$ e siccome essi sono situati su n rette, che s'appoggiano sullo spigolo $x_1=x_2=0$, vuol dire che queste n rette s'incontrano in un punto di $x_1=x_2=0$. Questo piano nel quale giacciono n^2 punti del ciclo $(P)^{n^3}$, contiene anche n delle n^2 rette di 1ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$, che passano per i punti $x_1=x_2=x_4=0$ e $x_1=x_2=x_4=0$; perchè gli n^2 punti del ciclo $(P)^{n^3}$ che esso contiene, determinano anche n ad n $2n$ rette di 1ª specie passanti n ad n per il 1° e 2° vertice.

Teorema LXXX. Un ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli projettivi di n punti situati su n^2 rette di 2ª specie, che si appoggiano ad una coppia di spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Esse s'incontrano n ad n in n punti di ciascuno di questi spigoli. Analogamente pel ciclo polare reciproco $(\Pi)^{n^3}$. Gli n^2 cicli di $(P)^{n^3}$, sono ordinatamente polari reciproci degli n^2 cicli di $(\Pi)^{n^3}$ rispetto alle n^2 ennuple di 2ª specie, le cui superficie s'incontrano in quadrilateri, aventi i loro vertici in quella coppia di spigoli opposti.

Le n^2 rette di 2ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$ sono situate n ad n in n piani passanti per ognuno dei due spigoli. Uno qualunque di questi piani contiene pure n delle n^2 rette di 1ª specie del ciclo

$(P)^{n^3}$, che passano per i due vertici dello spigolo fondamentale, situato in quel piano.

29. Sia data una retta t di 2ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$, che si appoggia per es. sugli spigoli $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ e conduciamo le n rette, che passano per gli n punti P di t, e che incontrano due spigoli $x_1 = x_4 = 0$ $x_2 = x_3 = 0$. Un iperboloide, che passa per i 4 spigoli $x_1 = x_4 = 0$ $x_2 = x_3 = 0$. $x_1 = x_2 = 0$ $x_1 = x_4 = 0$ e per la retta t, passa evidentemente, anche per le n rette suddette. In una di queste rette ci sono oltre del punto d'incontro con t, altri $n-1$ punti di $(P)^{n^3}$, quindi le rette che passano per essi ed incontrano gli spigoli $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ appartengono a quell' iperboloide e incontrano le altre $n-1$ rette nei punti del ciclo $(P)^{n^3}$, in esse situati. Così abbiamo $2n$ rette di 2ª specie di $(P)^{n^3}$, che s'incontrano in n^2 punti di $(P)^{n^3}$ e situate in un iperboloide, passante per 4 spigoli del tetraedro fondamentale. Con gli n^3 punti di $(P)^{n^3}$ si ottengono n di questi gruppi di n^2 punti, situati in n iperboloidi, passanti per le stesse due coppie di spigoli opposti, onde:

Teorema LXXXI. Prese due coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale, gli n^3 punti del ciclo $(P)^{n^3}$ si separano in n gruppi O di n^2 punti; gli n^2 punti di un gruppo sono situati n ad n in $2n$ rette di 2ª specie del ciclo, che incontrano rispettivamente le due coppie di spigoli opposti. Gli n gruppi O sono situati rispettivamente in n iperboloidi, che contengono le due coppie di spigoli opposti.

Consideriamo ora una delle rette di 1ª specie di $(P)^{n^3}$ passante pel vertice $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ del tetraedro fondamentale; si vede chiaramente che non può contenere due punti di un medesimo gruppo O. Se ciò fosse le due rette di 2ª specie di $(P)^{n^3}$, che passano per essi e incontrano i due spigoli opposti $x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = x_4 = 0$ dovrebbero essere situate in un piano con uno di questi spigoli e quindi dovrebbero incontrarsi in uno di essi (teor. LXXX) e perciò l'iperboloide ove è situato il gruppo O avrebbe tre delle sue rette incontrantesi in un punto, ciò che è impossibile. Se uniamo tutti gli n^2 punti di un gruppo O con uno dei vertici del tetraedro conjugato fondamentale, si ottengono le n^2 rette di 1ª specie di $(P)^{n^3}$, che passano per quel punto. Sopra ciascuna di queste rette sono disposti gli $n-1$ punti del ciclo $(P)^{n^3}$, che appartengono rispettivamente agli altri $n-1$ gruppi O del teorema precedente. Dato il punto $P(y_1 y_2 y_3 y_4)$, la retta di 2ª specie del ciclo $(P)^{n^3}$, che passa per esso e s'appoggia sugli spigoli $x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = x_4 = 0$ contiene i punti

$$(ry_1 \cdot ry_2, y_3, y_4); \quad (r^2 y_1, r^2 y_2, y_3, y_4) \; . \; . \; . \; . \; (r^{n-1}y_1, r^{n-1}y_2, y_3, y_4)$$

così la retta, che si appoggia sugli spigoli $x_1 = x_4 = 0$ $x_2 = x_3 = 0$ contiene i punti

$$(y_1, ry_2, ry_3, y_4), \quad (y_1, r^2 y_1, r^2 y_2, y_4) \; . \; . \; . \; (y_1, r^{n-1}y_2, r^{n-1}y_3, y_4).$$

Invece dato il punto $r^\alpha y_1, y_2, y_3, y_4$ che è allineato con $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ col vertice $x_2 = x_2 = x_4$, le due rette che si spiccano da esso e si appoggiano sugli stessi spigoli opposti contengono rispettivamente i punti:

$$r^{\alpha+1}y_1, ry_2, y_3, y_4 \; . \; . \; . \; . \; r^{\alpha+n-1}y_1, r^{n-1}y_2, \; y_3, y_4$$
$$r^\alpha y_1, ry_2, ry_3, y_4 \; . \; . \; . \; . \; r_\alpha y_1, r^{n-1}y_2, r^{n-1}y_3, y_4.$$

Ora è chiaro il 1° punto $r^{\alpha+1}y_1, ry_2, y_3, y_4$ determina una retta, che passa pei

punti ry_1, ry_2, y_3, y_4 e $x_2=x_3=x_4=0$. Sia y_1 y_2 y_3 y_4, come abbiamo detto, un punto del 1° gruppo O e $r^\alpha y_1$, y_2, y_3, y_4 un punto del 2° situato in una retta col primo e con $x_1=x_3=x_4=0$ e si scelgano altri due punti qualunque del 1° gruppo per es. ay_1, by_2, cy_3, y_4; a_1y_1, b_1y_2, c_1y_3, y_4. Quelli appartenenti al 2° e allineati con $x_2=x_3=x_4$ sono:

$$r^\alpha ay_1,\ by_2,\ cy_3,\ y_4;\quad r^\alpha a_1y_1,\ b_1y_2,\ c_1y_3,\ y_3.$$

Il piano dei tre punti del 1° gruppo O si mette sotto la forma

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = A_4x_4 = 0$$

e quello dei tre del 2°

$$A_1x_1 + r^\alpha A_2x_2 + r^\alpha A_3x_3 + r^\alpha A_4x_4 = 0$$

i quali due piani evidentemente s'incontrano in una retta del piano $x_1=0$; onde i piani, che uniscono tre a tre i punti di due gruppi O, i cui punti sono due a due allineati rispettivamente con uno dei vertici del tetraedro fondamentale, si tagliano in una retta della faccia opposta.

Teorema LXXXII. Due gruppi O qualunque, che si riferiscono a due stesse coppie di spigoli opposti, sono omologhi in 4 maniere differenti per i 4 vertici del tetraedro fondamentale come centro e le 4 facce opposte come piani di omologia

30. Abbiasi ora un sistema di n^2 ennuple di 3ª specie, cioè $(A)^n$ $(B)^n$ .... $(N^2)^n$, il ciclo si scompone rispetto a ciascuna di esse in n^2 cicli projettivi di n punti situati in altrettante curve W (Teor. LXXIV), così il ciclo polare reciproco $(\Pi)^3$ si scompone in n^2 cicli projettivi, che generano le sviluppabili W, polari reciproche delle W rispetto a quelle 2 ennuple. È chiaro che gli n^2 cicli di punti hanno ordinatamente per polari reciproci rispetto alle n^2 ennuple del sistema gli n^2 cicli $(\Pi)^{n^3}$, dunque:

Teorema LXXXIII. Il ciclo $(P)^{n^3}$ si scompone in n^2 cicli projettivi di n punti $(P_a)^n$ $(P_b)^n$.... $(P_{n^2})^n$ rispetto alle n^2 ennuple di 3ª specie $(A)^n$ $(B)^n$ .... $(N^2)^n$ di un sistema di $S_n{}^3$ (teor. LXXIII).

Così il ciclo $(\Pi)^{n^3}$ polare reciproco di (P^{n^3}) rispetto alle superficie di $S_n{}^3$ si scompone in n^2 cicli projettivi $(\Pi_a)^n$ $(\Pi_b)^n$... $(\Pi_{n^2})^n$. I cicli $(P_a)^n$ $(P_b)^n$... $(P_{n^2})^n$ hanno per polari reciproci rispetto a tutte le n^2 ennuple di 3ª specie del sistema ordinatamente i cicli $(\Pi_a)^n$ $(\Pi_b)^n$... $(\Pi_{n^2})^n$. Le curve W algebriche sulle quali sono situati $(P_a)^n$, $(P_b)^n$, ... $(P_{n^2})^n$ hanno gli stessi caratteri, ed hanno per sviluppabili polari rispetto alle ennuple n le w generate da $(\Pi_a)^n$, ... $(\Pi_{n^2})^n$.

Possiamo anche qui enunciare un teorema analogo al teorema XXXII cioè:

Teorema LXXXIV. Ogni punto, ogni tangente od ogni piano tangente delle superficie A, le cui equazioni rispetto al tetraedro, fondamentale di $S_n{}^3$ non contengono che le n^{me} potenze o multipli delle n^{me} potenze delle variabili dà luogo ad un ciclo inscritto in esse o circoscritto ad esse. Una superficie A ha rispetto a tutte le n^3 superficie di $S_n{}^3$ la stessa polare reciproca.

Il punto di contatto di tre punti d'incontro di una tangente q di una superficie A, con tre delle facce del tetraedro fondamentale,

danno un rapporto anarmonico costante per tutte le rette del ciclo $(q)^{n^3}$. Projettando da quelle tangenti, i vertici del tetraedro fondamentale si ottengono 4 piani, che hanno uno stesso rapporto anarmonico.

Qui possiamo fare la stessa osservazione del n. 9 e se ne deduce.

Teorema LXXXV. Scambiando in tutti i modi possibili le 4 coordinate $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ di un punto P si ottengono 24 punti, situati 6 a 6 in 16 coniche. I 6 punti di una conica soddisfano il teorema XXXIV; i 16 piani delle 16 coniche si separano in 4 gruppi rispetto alle 4 facce del tetraedro fondamentale. I 4 piani del gruppo, che si riferisce per es. alla faccia $x_1=0$ s' incontrano nella retta $x_2+x_3+x_4=0$ di essa. I 24 punti P sono situati in una superficie di 2° ordine.

Teorema LXXXVI. Ogni punto, ogni tangente od ogni piano tangente di una superficie A, dà luogo ad un ciclo M di $24.n^3$ punti inscritto in essa o di $24.n^3$ tangenti o piani tangenti circoscritti ad essa. Le singolarità della A della stessa specie (per es. I punti doppî, i piani doppî ecc.) devono dar luogo ad uno o più cicli speciali M il cui numero d' elementi deve essere un divisore o un multiplo di 24 e di n^3.

Caso speciale $n=2$.

31. Nel piano per $n=2$ abbiamo ottenuto 4 coniche. Nello spazio per $n=2$ si ottengono 8 superficie di 2° grado; che possiamo chiamare pure *armoniche*, esse risultano anche cercando le superficie di 2° grado rispetto alle quali due date superficie sono polari reciproche. Sotto quest' ultimo punto di vista furono accennate da Steiner ([1]), alcune delle loro proprietà furono date da Battaglini ([2]). La ricerca un po' intima di queste superficie, credo non sia stata fatta da alcuno; io qui enuncerò i teoremi, che più m' interessano per lo sviluppo della IIª Memoria, i quali non sono del resto che corollarî di quelli già enunciati. Le 8 superficie hanno per equazioni:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1) \qquad \begin{aligned} -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0\,. \end{aligned} \quad (2)$$

Come si vede facilmente queste 8 superficie si dividono in due gruppi di 4, in un gruppo si passa da un' equazione all' altra mediante lo scambio di due segni, mentre da una di un gruppo si passa ad una dell'altro mediante lo scambio di un solo segno. Pel teorema LXIX le 8 superficie incontrano gli spigoli del tetraedro fondamentale in due coppie di punti distinte, le coordinate dei punti per es. sullo spigolo $x_1=x_2=0$ sono:

$$\frac{x_1}{x_2}=\pm 1 \qquad \frac{x_1}{x_2}=\pm\sqrt{-1}\,.$$

Queste due coppie di punti le chiamo $P^2{}_1\, P'_{12}$, $P^{i}_{12}\, P^{i'}_{12}$, esse oltre che dividere armonicamente le coppie di vertici del tetraedro fondamentale, si dividono armonicamente anche fra loro. Come si vede la coppia $P'_{12}\; P^{i'}_{12}$ è immaginaria. — Secondo

([1]) Vol. 32. Crelle.

([2]) Atti della r. Acc. dei Lincei 1872, e D'Ovidio Giorn. di Battaglini vol. X.

lo stesso teorema LXIX tagliano le 8 superficie del ciclo S_2^3 le facce del tetraedro fondamentale secondo 4 coniche armoniche; in una di queste coniche si toccano 2 superficie di S_2^3 e costituiscono una coppia di 1ª specie. Le coppie di 2ª specie sono date da quelle superficie che s'incontrano nei lati di un quadrangolo gobbo, i cui vertici sono sopra due degli spigoli del tetraedro fondamentale, cioè sono due coppie di punti P_{ik}. Ora, come è evidente, due superficie di un gruppo formano una coppia di 2ª specie, mentre due di gruppi diversi formano una coppia di 1ª specie. — Si vede pure che una delle superficie del 1° gruppo è immaginaria e le altre 3 sono iperboloidi, mentre le altre 4 sono superficie a punti ellittici. Dunque:

Teorema LXXXVII. Le 8 superficie armoniche di 2° ordine, che si ottengono per $n=2$, si dividono in due gruppi di 4 superficie. Quelle di un gruppo sono a punti ellittici, di quelle dell'altro, tre sono iperboloidi ad una falda, la 4ª è immaginaria.

Teorema LXXXVIII. Le 8 superficie del ciclo S_2^3 tagliano ciascun spigolo del loro tetraedro conjugato in due coppie di punti $P_{ik} P'_{ik}$, P^i_{ik} $P^{i'}_{ik}$, di cui una è immaginaria; esse dividono armonicamente la coppia di vertici $A_i A_k$ del tetraedro situati in quello spigolo e si separono armonicamente fra loro. Le 8 superficie tagliano ciascuna faccia del tetraedro in un ciclo S_2^2 di 4 coniche armoniche. In una di queste coniche si toccano due superficie di una coppia di 1ª specie (Teor. LXIX).

Teorema LXXXIX. Le superficie di uno stesso gruppo formano due a due una coppia di 2ª specie, cioè s'incontrano nei lati di un quadrilatero gobbo, i cui vertici sono 4 punti P_{ik} situati su due spigoli opposti; due superficie di gruppi diversi formano una coppia di 1ª specie. Le coppie di 1ª specie sono 16, le coppie di 2ª specie sono 12, 6 per gruppo. Non ci sono coppie di 3ª specie (Teor. LXX).

Teorema XC. Ciascuna delle 8 superficie è reciproca di sè stessa rispetto alle altre 7 (Teor. LXXII).

Di due superficie di un gruppo per es.

$$x_1^2 + x_2^2 \quad x_3^2 + x_4^2 = 0$$
$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0$$

l' invariante simultaneo

$$A_{1222} = \Sigma \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a'_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{44} \\ a'_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 .$$

Invece per due superficie appartenenti a due gruppi diversi si ha

$$A_{1122} = \Sigma \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a'_{12} & a'_{22} & a_{23} & a_{24} \\ d'_{13} & a'_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & d_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ora l'essere $A_{1222} = 0$ vuol dire che ci sono infiniti tetraedri conjugati all' una

inscritti o circoscritti all'altra, mentre $A_{1122} = 0$ vuol dir che ci sono infiniti tetraedri conjugati all'una e i cui spigoli toccano l'altra (¹).

Teorema XCI. Per due superficie di uno stesso gruppo vi sono infiniti tetraedri conjugati all' una e inscritti e circoscritti all' altra.— Per due di diversi gruppi ci sono infiniti tetraedri conjugati all' una e i cui spigoli toccano l' altra.

Qui possiamo enunciare senz' altro i seguenti teoremi, che non sono altro che corollarî dei teoremi LXXII, LXXIX cioè:

Teorema XCII. Se di un punto P si trova il piano polare rispetto ad una delle 8 superficie di S_2^3, di questo il polo rispetto ad un altra, di questo il piano polare rispetto alla 1ª ecc. si ottiene un ciclo projettivo di due punti $P P_1$, di cui è polare reciproco rispetto alle due superficie un ciclo di due piani Π e Π_1. La retta r, che congiunge i due punti P e P_1 e la retta r, d'intersezione dei due piani Π e Π_1 si appoggiano su due spigoli opposti del tetraedro fondamentale, se le due superficie appartengono ad una coppia di 2ª specie; $P P_1$ e $\Pi \Pi_1$ sono allora divisi armonicamente dai due spigoli opposti.— Se le due superficie formano una coppia di 1ª specie, la retta r_1 è situata sul piano, ove si toccano le due superficie, mentre la retta r passa pel vertice opposto. $P P_1$ e $\Pi \Pi_1$ sono allora diversi armonicamente dal vertice e dalla faccia opposta.

Teorema XCIII. Se di un punto P si trova il ciclo corrispondente $(P)^8$ rispetto alle 8 superficie di S_2^3 e il ciclo degli 8 piani polari $(\Pi)^8$, essi formano due figure polari reciproche, rispetto alle 8 superficie di 2° grado. Gli 8 punti del ciclo $(P)^8$ formano due tetraedri omologici in 4 maniere differenti per i 4 vertici del tetraedro fondamentale e per le facce opposte come centro e piani di omologia (Teor. LXXXI).

L' ultima parte di questo teorema si dimostra anche nel seguente modo. Gli 8 punti del ciclo $(P)^8$ sono:

$$\begin{array}{llll} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ -y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 \\ -y_1 & -y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} -y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1 & -y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & -y_4 \end{array}$$

Si dividono, come si vede, in due gruppi come le 8 superficie di S_2^3; le rette che congiungono due punti di uno stesso gruppo sono rette di 2ª specie di $(P)^8$, mentre quelle che uniscono i punti di gruppi diversi sono rette di 1ª specie. Le 1ᵉ sono gli spigoli dei 2 tetraedri, mentre le altre 16 passano 4 a 4 per i vertici del tetraedro fondamentale.— La figura formata da questi tre tetraedri, cioè dai due dati da $(P)^8$ e da quello fondamentale, è studiata diffusamente nella IIª Memoria. Le coordinate dei piani di $(\Pi)^8$ sono le medesime di quelle dei punti $(P)^8$ e formano perciò due analoghi tetraedri. Uno dei vertici di questi due ultimi tetraedri ha per

(¹) *Analy. Geom. des Raumes* 1. Theil. Salmon-Fiedler p. 235. — 2ª edizione.

coordinate $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$. Questo punto lo chiamo conjugato di y_1, y_2, y_3, y_4 rispetto al tetraedro fondamentale e si costruisce nel seguente modo. Si congiunge uno spigolo del tetraedro col punto (y_1, y_2, y_3, y_4), si ottiene un piano che forma un certo angolo α con una delle facce del tetraedro che s' incontrano in quello spigolo, si costruisce un piano passante per esso e che formi con l'altra faccia un angolo α diretto nello stesso senso del 1°. Così facendo per tutti e 6 gli spigoli si ottengono 6 piani, che s' incontrano nel conjugato di P. Analogamente chiamo piano conjugato di un piano rispetto ad un tetraedro, quello che ha le coordinate inverse del dato.

Teorema XCIV. Gli 8 Vertici dei due tetraedri del ciclo $(\Pi)^8$ polare reciproco di $(P)^8$ rispetto alle 8 superficie del ciclo S_2^3 sono i punti conjugati dei punti $(P)^8$ rispetto al tetraedro fondamentale. Per punti conjugati intendo quelli che hanno le coordinate inverse rispetto a quel tetraedro.

32. Consideriamo un tetraedro $(P)^8$ e uno del ciclo $(\Pi)^8$ per es. i due tetraedri:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4} \\
y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 & \frac{1}{y_1} & -\frac{1}{y_2} & -\frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4} \\
-y_1 & -y_2 & y_3 & y_4 & -\frac{1}{y_1} & -\frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4} \\
-y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 & -\frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & -\frac{1}{y_3} & \frac{1}{y_4}
\end{array} \qquad (1)$$

Congiungendo y_1 con $\frac{1}{y_1}$ mediante una retta t, a questa retta corrispondono le rette, che congiungono i punti della stessa orizzontale in (1). Le altre 4 rette, uniscono due a due i vertici dei due tetraedri rimanenti di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$. Queste 8 rette giaciono in un iperboloide. Infatti se per gli 8 punti di $(P)^8$ e di $(\Pi)^8$ e per un altro punto di t si fa passare un iperboloide, ciò che è sempre possibile, esso conterrà anche le altre 7 rette del ciclo $(t)^8$. Esso ha evidentemente il tetraedro fondamentale come conjugato. Ora però invece di unire y_i con $\frac{1}{y_i}$ possiamo unirlo con un altro dei vertici del tetraedro $(\Pi)^8$, si ha allora un' altra retta t_1 il cui ciclo $(t_1)^8$ dà luogo ad un altro iperboloide, che passa per gli stessi 8 punti di $(P)^8$ e di $(\Pi)^8$. Onde così si ottengono 4 iperboloidi, che appartengono ad un fascio. Ora se si considera l'altro tetraedro di $(\Pi)^8$, si ottengono altri 4 iperboloidi, che appartengono al medesimo fascio. Gli 8 piani di $(\Pi)^8$ sono i conjugati degli 8 piani di $(P)^8$ rispetto al tetraedro fondamentale; onde i due tetraedri di $(P)^8$ e i due tetraedri di $(\Pi)^8$, con le intersezioni delle loro facce generano altri 8 iperboloidi, che appartengono ad una schiera e che hanno il tetraedro fondamentale come conjugato.

Teorema CXV. Uno dei tetraedri di $(P)^8$ e uno di $(\Pi)^8$ sono « iperboloidici » in 4 maniere differenti. I 4 iperboloidi generati rispettivamente dai quattro gruppi di 4 rette, che congiungono i vertici dei due tetraedri due a due, sono anche generati rispettivamente

dai quattro gruppi di 4 rette, che congiungono due a due i vertici dei due tetraedri rimanenti di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$ e che formano con le prime 4 un ciclo $(t)^8$. Altri 4 iperboloidi sono generati dal 1° tetraedro di $(P)^8$ e dal 2° di $(\Pi)^8$ oppure dal 2° di $(P)^8$ e dal 1° di $(\Pi)^8$.— Questi 8 iperboloidi appartengono ad un fascio ed hanno il tetraedro fondamentale come conjugato.

Ci sono altri 8 iperboloidi, generati dalle rette d'intersezione delle facce dei tetraedri di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$, essi formano una schiera ed hanno pure per tetraedro conjugato il fondamentale.

Il polare reciproco di uno degli 8 iperboloidi, generati dai vertici dei tetraedri di $(P)^8$ e $(\Pi)^8$ rispetto alle 8 superficie di S_2^3 è uno degli 8 iperboloidi della schiera. Infatti esso si può considerare come una superficie A del teorema LXXXIV. Se si fa passare per gli 8 punti di un ciclo $(P)^8$ una superficie di 2° grado, ogni suo punto od ogni sua retta dà luogo a un ciclo inscritto in essa, mentre ogni suoi piano tangente dà luogo a un ciclo circoscritto ad essa. Essa non è altro, che una superficie A, che ha la medesima polare reciproca rispetto alle 8 superficie di S_2^3.

Teorema XCVI. Uno degli 8 iperboloidi del 1° gruppo per polare reciproco rispetto alle 8 superficie di S_2^3 uno degli 8 iperboloidi del 2° gruppo.

Teorema XCVII. Se una superficie di 2° grado passa per 8 punti di un ciclo $(P)^8$, ogni suo punto P o retta q o piano tangente Π, dà luogo ad un ciclo $(P)^8$ o $(q)^8$ o $(\Pi)^8$ inscritto in essa o circoscritto ad essa. Essa ha la stessa polare reciproca rispetto alle 8 superficie di S_2^3 (Teor. LXXXIII). Ogni suo punto dà luogo ad un ciclo di $8.24=192$ punti inscritto in essa.

Mi pare debba essere di molto interesse lo studio di $n=3$ ed $n=4$ ecc. in relazione alle superficie $x_1^n+x_2^n+x_3^n+x_4^n=0$.

MEMORIA II.

Dal caso $n=2$ nello spazio si deduce la figura studiata da Klein nella sua Memoria: *Ueber die Liniencomplexe* 1^{ens} *und* 2^{ens} *Grades* (1). Il punto di vista, sotto il quale io considero questa figura è molto diverso da quello di Klein, e perciò mi è dato di ricavare molte nuove ed interessanti proprietà di questa figura importante.

Abbiamo visto nella Iª Memoria, che pel caso $n=2$ un ciclo $(P)^8$ si scompone in due tetraedri omologici in 4 maniere differenti rispetto ai vertici e alle facce opposte del tetraedro fondamentale, come centri e piani di omologia. Credo che Hermes sia stato il primo od uno dei primi a considerare un gruppo simile di tre tetraedri, studiando un esaedro, le cui diagonali s'incontrano in un punto (2). Essi si presentano anche nello studio della superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado (3) e nello studio dei centri di similitudine di 4 sfere (4). La figura di questi tre tetraedri si deduce con grande facilità dal teorema IV della mia Memoria sull'*Hexagrammum mysticum* (5), che dimostra, che se i due triangoli $A_1 B_1 C_1$ e $A_2 B_2 C_2$ sono omologici per un centro D_3; i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$, $A_1 C_2 . A_2 C_1 \equiv B_3$, $A_1 C_2 . B_2 C_1 \equiv A_3$, formano un triangolo omologico ai due primi, per i centri $D_2 D_1$, i quali sono allineati con D_3. Il sig. dott. Stephanos Cyparissos, come l'ho già notato nei Transunti della r. Accademia dei Lincei del mese di aprile testè passato, ha studiato contemporaneamente a me, la figura formata da un gruppo di tre tetraedri omologici in 4 maniere differenti nell'ultimo fascicolo del *Bulletin dés sciences mathematiques* di Darboux dell'anno scorso. Le mie ricerche si spingono però molto più oltre di quelle del sig. Stephanos Cyparissos, oltre che esse hanno un'intima relazione con le teorie sviluppate nella Iª Memoria (6).

Infine faccio un' applicazione della figura all' Hexagrammum e studio due fasci di superficie di 4° ordine, dotate di 12 punti doppî comuni, che formano precisamente un gruppo di tre tetraedri omologici in 4 maniere differenti. Questi tetraedri li chiamo fasciali (7).

(1) Math. Annalen, vol. II.

(2) Vol. 56 Crelle.

(3) Vedi Clebsch, *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Flächen* 2 *Ordnung*. Crelle 62 e parte III di questa Mem.

(4) Vedi n. 5.

(5) Atti della r. Acc. dei Lincei 1877.

(6) Faccio osservare che io ho studiato già la sezione piana e la projezione fatta di un punto sopra un piano di questa figura nella mia Memoria stessa dell'Hexagrammum.

(7) Il sig. Cyparissos li chiama desmiques (da *δέσμη*, fascio).

Parte I.

Tetraedri fasciali.

1. Sia dato un tetraedro fondamentale $(A) \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$ ed un punto B_1 di coordinate $X_1 X_2 X_3 X_4$; ci sono altri 7 punti, con le medesime coordinate, però con segni diversi; questi 8 punti formano un ciclo $(P)^8$ (vedi Teor. XCIII, Mem. I[a]) e formano perciò due tetraedri omologici in 4 maniere differenti per i vertici e le facce opposte del tetraedro (A), come centri e piani di omologia. Siano $B_1 B_2 B_3 B_4 \equiv (B)$ e $C_1 C_2 C_3 C_4 \equiv (C)$ i due tetraedri; le coordinate dei loro vertici sono:
per (B) X_1, X_2, X_3, X_4; $X_1, X_2, -X_3, -X_4$; $X_1, -X_2, X_3, -X_4$; $X_1, -X_2, -X_3, X_4$
e per (C) $X_1, X_2, X_3, -X_4$; $X_1, X_2, -X_3, X_4$; $X_1, -X_2, X_3, X_4$; $-X_1, X_2, X_3, X_4$.

Se per maggior semplicità poniamo $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1$; le facce dei tetraedri si mettono sotto la forma

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0$$

onde le formole di trasformazione dal tetraedro (A) a (B) sono:

$$(1) \quad x'_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4;\ x'_2 = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4;\ x'_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$
$$x'_4 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4$$

da cui quelle da (B) a (A) sono:

$$(2) \quad x_1 = x'_1 - x'_2 - x'_3 + x'_4;\ x_2 = x'_1 - x'_2 + x'_3 - x'_4,\ x_3 = x'_1 + x'_2 - x'_3 - x'_4$$
$$x_4 = x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4.$$

Analogamente si hanno le formole di trasformazione per il tetraedro (A) e (C), basta cambiare il segno ad x_4 in (1). Se i due tetraedri (B) e (C) sono omologici pei vertici e piani opposti di (A), (B) ed (A), oppure (C) ed (A) sono pure omologici in 4 maniere differenti per i vertici e piani opposti del terzo tetraedro (C) o (B). Infatti si ha:

(3)	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_1 C_2 C_3 C_4$	omologici pel centro	A_1
	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_3 C_4 C_1 C_2$	»	A_2
	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_2 C_1 C_4 C_3$	»	A_3
	$B_1 B_2 B_3 B_4$,	$C_1 C_2 C_3 C_4$	»	A_4

Donde

$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_4 B_3 B_2 B_1$	omologici pel centro	C_1
$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_3 B_4 B_1 B_2$	»	C_2
$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_2 B_1 B_4 B_3$	»	C_3
$A_1 A_2 A_3 A_4$,	$B_1 B_2 B_3 B_4$	»	C_4

Analogamente si ricava che (A) e (C) sono omologici in 4 maniere differenti, pei vertici e piani opposti di (B).

Dal quadro (3) si vede, che i vertici dei tre tetraedri (A) (B) e (C) sono tre a tre situati in 16 rette, che chiamo h, che passano 4 a 4 pei 12 vertici dei tre tetraedri; per es. per A_1 passano le 4 rette $B_1 C_1$, $B_2 C_3$, $B_3 C_2$, $B_4 C_1$. Siccome (B) e (C) formano un ciclo $(P)^8$ rispetto al tetraedro (A), così le 16 rette h sono le 16 rette di 1[a] specie di $(P)^8$ (n. 31, I[a] Mem.). Analogamente le 12 facce dei tre tetraedri (A) (B) e (C), s'incontrano tre a tre in 16 rette h', che sono situate 4 a 4

sopra ognuna di quelle facce. Siccome (B) e (C) formano anche un ciclo $(\Pi)^8$ rispetto al tetraedro (A), così le 16 rette h', d' intersezione delle facce dei due tetraedri due a due, sono le rette di 1ª specie di $(\Pi)^8$. Mentre tre dei vertici di (A) (B) e (C) sono in una retta h, le tre facce opposte s' incontrano in una retta corrispondente h'. Ora se consideriamo i due triangoli $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, essi sono omologici pel centro C_4, i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$, $A_1 B_3 . A_3 B_1 \equiv C_2$ $A_2 B_3 . A_3 B_2 \equiv C_1$ formano il triangolo $C_1 C_2 C_3$, che è omologico con i due primi per i centri A_4 e B_4, e i tre centri A_4 B_4 C_4 sono situati in una retta h, mentre i tre piani $A_1 A_2 A_3 \equiv \alpha_4$, $B_1 B_2 B_3 \equiv \beta_4$, $C_1 C_2 C_3 \equiv \gamma_4$ s' incontrano in una retta h'. I due triangoli $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ possono considerarsi come qualunque, purchè siano prospettivi per un centro C_4 ed allora si ottiene il teorema analogo al teorema IV della mia citata Memoria che si esprime con le stesse parole cioè:

Teorema I. Se si hanno due triangoli $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, situati in piani differenti ed omologici pel centro C_4, i punti $A_1 B_2 . A_2 B_1 \equiv C_3$, $A_1 B_3 . A_3 B_1 \equiv C_2$, $A_2 B_3 . A_3 B_2 \equiv C_1$ danno un altro triangolo $C_1 C_2 C_3$ omologico coi due primi per i centri $A_4 B_4$; i tre centri $A_4 B_4 C_4$ sono situati in una retta h e i tre piani $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ s' incontrano in una retta h', corrispondente alla retta h. Due dei tetraedri $A_1 A_2 A_3 A_4 \equiv (A)$, $B_1 B_2 B_3 B_4 \equiv (B)$, $C_1 C_2 C_3 C_4 \equiv (C)$ sono perciò omologici in quattro maniere differenti per ciascun vertice e piano opposto del terzo, come centro e piano di omologia. I loro vertici sono tre a tre situati su 16 rette h e le loro facce tre a tre s' incontrano in 16 rette h', a quelle corrispondenti.

Teorema II. Se uno dei tetraedri (A) (B) (C) si considera come tetraedro di riferimento, i vertici degli altri due hanno rispetto ad esso le medesime coordinate con segni differenti, formano cioè un ciclo $(P)^8$ rispetto al tetraedro di riferimento (Teor. XCIII, Iª Mem.).

2. Gli spigoli dei tetraedri (B) e (C), come abbiamo visto nel n. 33, Iª Memoria, sono rette di 2ª specie del ciclo $(P)^8$ che essi formano; ossia sono rette, che si appoggiano rispettivamente sulle tre coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale (A). Due spigoli opposti di (A) vengono incontrati da due spigoli opposti di (B) in due punti P_{ik} e P'_{ik}, per i quali passano anche due spigoli opposti di (C). I due vertici di (B) o (C) situati sopra uno spigolo, che si appoggia su due spigoli opposti di (A), sono divisi armonicamente da questi due spigoli. Dal teorema LXXX Mem. Iª si deduce, che gli 8 vertici di (B) e (C) sono situati 4 a 4 in 12 piani Π_{ik} passanti due a due per uno qualunque degli spigoli di (A), i quali contengono 2 rette di 2ª specie, ossia due spigoli appartenenti l'uno a (B) e l'altro a (C), e 4 rette h. Del resto queste proprietà si possono verificare facilmente, anche senza la Iª Memoria. Se dagli spigoli del tetraedro (A) si projetta il punto B_1 sugli spigoli opposti, si ottengono 6 punti P_{ik}, tale che per es. P_{12}, è situato in $A_1 A_2$. Il piano, che projetta per es. dallo spigolo $A_3 A_4$ il punto B_1 sullo spigolo opposto $A_1 A_2$, ha per equazione

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad (1)$$

e perciò il punto P_{12} viene determinato nello spigolo $A_1 A_2$ da $\frac{x_1}{x_2} = 1$. L'equazione dunque dei 6 punti P_{ik} sono della forma

$$u_i - u_k = 0. \tag{2}$$

I 6 conjugati armonici P'_{ik} dei punti P_{ik} rispetto ai vertici di (A), hanno per equazione

$$u_i + u_k = 0 \tag{3}$$

e sono situati nel piano

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Questo si chiama il piano polare di B_1 rispetto al tetraedro (A), che è la faccia opposta di B_1 nel tetraedro (B). Per quello che si è detto precedentemente, per ogni punto P_{ik} o P'_{ik} passano uno spigolo di (B) ed uno di (C) e naturalmente anche uno di (A). I piani che projettano dagli spigoli di (A) i punti P'_{ik} sono:

$$x_i + x_k = 0 \tag{4}$$

quelli invece che projettano i punti P_{ik}

$$x_i - x_k = 0. \tag{5}$$

I primi li chiamo piani Π_{ik}, questi ultimi Π'_{ik}. Essi sono 12, passano due a due per ogni spigolo di (A), formando con le due facce, che s'incontrano in esse un gruppo armonico.

Per ciascuna retta h per es. per la retta $A_1 B_1 C_1$ cioè per la retta, che congiunge i punti di coordinate $(1, 0, 0, 0)$ $(1, 1, 1, 1,)$, $(-1, 1, 1, 1)$, passano i tre piani $\Pi'_{12}\, \Pi'_{13}\, \Pi'_{14}$ cioè:

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad x_1 - x_3 = 0 \qquad x_1 - x_4 = 0.$$

La figura dei piani Π_{ik} e Π'_{ik} è correlativa di quella formata dai punti $P_{ik}\, P'_{ik}$, poichè essi hanno le stesse relazioni colle facce dei due tetraedri (B) e (C), che i punti $P_{ik}\, P'_{ik}$ hanno coi vertici stessi. — Si è visto nel principio di questo numero che i piani Π_{ik} e Π'_{ik} contengono 4 rette h, delle quali due s'incontrano in un vertice, le altre due in un altro vertice di (A). Le altre due coppie di vertici opposti del quadrilatero da esse formato, sono due coppie di vertici di (B) e due di (C); infatti congiungendo un punto di (B) con un punto di (A) in un piano Π_{ik} o Π'_{ik}, la retta congiungente h passa anche per un vertice di (C). Correlativamente per ciascun punto P_{ik} o P'_{ik} passano 4 rette h'; le tre coppie di piani opposti, che le congiungono due a due, sono coppie di facce di (A) (B) e (C). Da tutto ciò si vede, che se invece di prendere (A) come tetraedro fondamentale pigliamo (B) o (C), le rette h ed h' restano le stesse, e perciò restano gli stessi i punti P_{ik} e P'_{ik}, e i piani Π_{ik} e Π'_{ik}. Chiamando con $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$, $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ le facce opposte ai punti $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, $C_1 C_2 C_3 C_4$ nei tre tetraedri (A) (B) e (C) abbiamo il seguente quadro di punti $P_{ik}\, P'_{ik}$ e delle rette h'. È semplicissimo d'ottenere da questo il quadro delle rette h e dei piani Π_{ik} e Π'_{ik}, basta scambiare $P_{ik}\, P'_{ik}$ con Π_{ik} e Π'_{ik} e le lettere greche in majuscole latine e viceversa.

Quadro Q

per P_{12}	passano gli spigoli	A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2	e le rette h'	$\alpha_4\beta_3\gamma_3$, $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_3\beta_4\gamma_3$, $\alpha_3\beta_3\gamma_4$
P'_{12}	»	A_1A_2, B_3B_4, C_3C_4	»	$\alpha_4\beta_2\gamma_2$, $\alpha_4\beta_1\gamma_1$, $\alpha_3\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_1\gamma_2$
P_{34}	»	A_3A_4, B_1B_2, C_3C_4	»	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$, $\alpha_1\beta_4\gamma_1$, $\alpha_2\beta_4\gamma_2$, $\alpha_2\beta_3\gamma_1$
P'_{34}	»	A_3A_4, B_3B_4, C_1C_2	»	$\alpha_1\beta_2\gamma_3$, $\alpha_1\beta_1\gamma_4$, $\alpha_2\beta_2\gamma_4$, $\alpha_2\beta_1\gamma_3$
P_{14}	»	A_1A_4, B_1B_4, C_2C_3	»	$\alpha_3\beta_3\gamma_4$, $\alpha_3\beta_2\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_4$, $\alpha_2\beta_3\gamma_1$
P'_{14}	»	A_1A_4, B_2B_3, C_1C_4	»	$\alpha_3\beta_1\gamma_2$, $\alpha_3\beta_4\gamma_3$, $\alpha_2\beta_4\gamma_2$, $\alpha_2\beta_1\gamma_3$
P_{23}	»	A_2A_3, B_1B_4, C_1C_4	»	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$, $\alpha_1\beta_2\gamma_3$, $\alpha_4\beta_2\gamma_2$, $\alpha_4\beta_3\gamma_3$
P'_{23}	»	A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3	»	$\alpha_1\beta_1\gamma_4$, $\alpha_1\beta_4\gamma_1$, $\alpha_4\beta_1\gamma_1$, $\alpha_4\beta_1\gamma_2$
P_{13}	»	A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3	»	$\alpha_2\beta_4\gamma_2$, $\alpha_2\beta_2\gamma_4$, $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_4\beta_2\gamma_2$
P'_{13}	»	A_1A_3, B_2B_4, C_2C_4	»	$\alpha_2\beta_1\gamma_3$, $\alpha_2\beta_3\gamma_1$, $\alpha_4\beta_1\gamma_1$, $\alpha_4\beta_3\gamma_3$
P_{24}	»	A_2A_4, B_1B_3, C_2C_4	»	$\alpha_1\beta_2\gamma_3$, $\alpha_1\beta_4\gamma_1$, $\alpha_3\beta_2\gamma_1$, $\alpha_3\beta_4\gamma_3$
P'_{24}	»	A_2A_4, B_2B_4, C_1C_3	»	$\alpha_1\beta_3\gamma_2$, $\alpha_1\beta_1\gamma_4$, $\alpha_3\beta_1\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_4$

Teorema III. Projettando dagli spigoli del tetraedro (A) il punto B_1 sugli spigoli opposti otteniamo 6 punti P_{ik} tali che P_{12} per es. giace in A_1 A_2. Di questi 6 punti trovando i conjugati armonici, rispetto ai vertici del tetraedro (A) si ottengono altri 6 punti P'_{ik}, che sono situati nel piano $B_2B_3B_4$ e che chiamo piano polare di B_1 rispetto al tetraedro (A). Le facce di uno dei tetraedri (A) (B) e (C) sono i piani polari dei vertici opposti rispetto agli altri due.

Un gruppo di tetraedri (A) (B) e (C) lo chiamo *terna di tetraedri fasciali,* due tetraedri, che formano con un terzo una tale terna li chiamo *complementari.*

Teorema IV. I 18 spigoli dei tre tetraedri (A) (B) (C) s'incontrano tre a tre nei 12 punti P_{ik} P'_{ik}. Questi sono situati 3 a 3 in 12 piani Π_{ik} Π'_{ik}, che formano la figura correlativa di quella di P_{ik}, P'_{ik}. I piani Π_{ik}, Π'_{ik} passano due a due per ognuno dei 18 spigoli, formando un gruppo armonico con le due facce di (A) o (B) o (C), che s'incontrano in quello spigolo. Per ciascun punto P_{ik} P'_{ik} passano 4 rette h', mentre nei piani Π_{ik} e Π'_{ik} sono situate 4 rette h e tre spigoli dei tre tetraedri (A) (B) (C). I piani Π_{ik} Π'_{ik} sono quelli, che projettano per es. dagli spigoli di (A) i vertici degli altri due (B) e (C). I punti P_{ik} P'_{ik} sono i punti d'intersezione per es. degli spigoli di (A) con le facce dei due tetraedri (B) e (C).

Teorema V. Se un piano passa per un punto, il tetraedro fasciale del piano rispetto al tetraedro di riferimento è circoscritto al tetraedro fasciale del punto.

Infatti se (y_1, y_2, y_3, y_4) è situato nel piano

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + a_4\, x_4 = 0$$

il punto

$$-y_1, -y_2, y_3, y_4,$$

è situato in

$$-a_1\, x_1 - a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + a_4\, x_4 = 0 \text{ ecc.}$$

3. Ritorniamo alla figura dei tre tetraedri (A) (B) e (C).

Possiamo separare i punti P_{ik} e P'_{ik} in tre tetraedri cioè:

$$P_{12}\,P'_{12}\,P_{34}\,P'_{34},\ P_{13}\,P'_{13}\,P_{24}\,P'_{24},\ P_{14}\,P'_{14}\,P_{23}\,P'_{23}$$

Le facce di questi tre tetraedri sono:

$$\Pi_{12}\,\Pi'_{12}\,\Pi_{34}\,\Pi'_{34},\ \Pi_{13}\,\Pi'_{13}\,\Pi_{24}\,\Pi'_{24},\ \Pi_{14}\,\Pi'_{14}\,\Pi_{23}\,\Pi'_{23}$$

Gli spigoli di essi sono quelli di (A) (B) e (C), essendo $P_{12}P'_{12} \equiv A_1 A_2$, $P_{34}P'_{34} \equiv A_3 A_4$, $P_{12}P_{34} \equiv B_1 B_2$, $P'_{12}P'_{34} \equiv C_1 C_2$, $P_{12}P_{34} \equiv B_3 B_4$, $P'_{12}P_{34} \equiv C_3 C_4$ ecc. (Vedi quadro Q, n. 2)

Teorema VI. I 12 punti P_{ik}, P'_{ik} formano 3 tetraedri fasciali di una 2ª terna, cioè $P_{12}P'_{12}P_{34}P'_{34} \equiv (P')$, $P_{13}P'_{13}P_{24}P'_{24} \equiv (P'')$, $P_{14}P'_{14}P_{23}P'_{23} \equiv (P''')$. Le facce di essi sono i piani Π_{ik} e Π'_{ik}, cioè $\Pi_{12}\Pi'_{12}\Pi_{34}\Pi'_{34}$ ecc. Mentre i 6 punti P'_{ik} sono situati nel piano $B_2B_3B_4$ (Teorema III), i 6 piani Π_{ik} s'incontrano nel punto B_1. Le rette, che congiungono tre a tre i vertici dei tre tetraedri $(P')(P'')(P''')$ sono le 16 rette h', mentre le facce Π_{ik}, Π'_{ik} s'incontrano tre a tre nelle 16 rette h. Chiamo questa 2ª terna di tetraedri la conjugata della 1ª, tutte e due insieme formano una sestupla fondamentale. I tetraedri della 1ª e 2ª terna hanno gli spigoli comuni.

L'equazioni dei piani del tetraedro $P_{12}P'_{12}\ P_{34}P'_{34}$ sono:

$$x_1 \mp x_2 = 0 \qquad x_3 \mp x_4 = 0$$

Le formole di trasformazione fra questo e il tetraedro (A) sono:

$$(1)\qquad x'_1 = x_1 + x_2,\ x'_2 = x_1 - x_2,\ x'_3 = x_3 + x_4,\ x'_4 = x_3 - x_4$$

$$(2)\qquad x_1 = x'_1 + x'_2,\ x_2 = x'_1 - x'_2,\ x_3 = x'_3 + x'_4,\ x_4 = x'_3 - x'_4$$

4. Sia data la terna di spigoli opposti $A_1 A_2, A_3 A_4$; $B_1 B_4, B_2 B_3$; $C_2 C_4$, $C_1 C_3$ oppure la terna $A_1 A_2, A_3 A_4$; $B_1 B_3, B_2 B_4$; $C_1 C_4$, $C_2 C_3$, gli spigoli di esse non s'incontrano, perchè gli spigoli $B_1 B_4, B_2 B_3$ si appoggiano sui due spigoli $A_1 A_4, A_2 A_3$ nei punti $P_{14}P'_{14}P_{23}P'_{23}$ (Vedi quadro Q, n. 2) e quindi non possono incontrare gli spigoli $A_1 A_2, A_3 A_4$. — Lo stesso succede di $C_1 C_3, C_2 C_4$. — Ogni coppia di spigoli dei tetraedri della 1ª o 2ª terna dà luogo a due tali terne dunque:

Teorema VII. Le 9 coppie di spigoli opposti dei tetraedri della sestupla fondamentale si separano in 6 terne, nelle quali due spigoli qualunque non s'incontrano. I 18 spigoli s'incontrano solamente tre a tre nei vertici dei 6 tetraedri della sestupla e tre a tre, sono situati nelle loro facce.

5. Date 4 sfere di centri $A_1 A_2 A_3 A_4$, esse hanno 6 centri di similitudine interni $P_{12}P_{13}P_{14}\ P_{34}P_{24}P_{23}$ e 6 centri di similitudine esterni $P'_{12}P'_{13}P'_{14}P'_{34}P'_{24}P'_{23}$. Ora si sa che questi 12 punti giacciono 3 a 3 in 16 rette h' cioè:

$$P'_{12}P'_{13}P'_{23};\ P'_{24}P'_{14}P'_{12};\ P'_{34}P'_{14}P'_{13};\ P'_{34}P'_{24}P'_{23}\ \text{ecc.}$$

le quali formano precisamente un quadro analogo a quello Q n. 2. Si sa anche, che in ogni faccia del tetraedro dei 4 centri $A_1 A_2 A_3 A_4$ delle 4 sfere, sono situati 6 dei centri di similitudine, cioè per es. in $A_1 A_2 A_3$ sono situati i centri $P_{12}P_{13}P_{23}P'_{12}$ $P'_{13}P'_{23}$; inoltre si sa che $P_{12}P'_{12}$ per es. formano una coppia armonica con $A_1 A_2$ [1] ecc.

[1] Vedi Poncelet, *Traité des prop. projectives des figures.* 1ère partie p. 409-410, 1822 e Geiser, *Enleitung in die synthetische Geometrie,* 1869.

Ora come è facile di vedere, l'insieme dei centri di similitudine di 4 sfere è identico a quello studiato precedentemente; onde possiamo applicare a questo caso i teoremi già trovati e quelli che troveremo. Osservo che i vertici dei tetraedri (B) e (C) possono essere anche essi considerati, come vertici di 4 sfere, il cui sistema di centri di similitudine è egualmente dato dai punti P_{ik} e P'_{ik}. Analogamente possono essere considerati i vertici dei tre tetraedri della 2ª terna (P') (P'') (P''') come centri di 4 sfere, i cui centri di similitudine sono i vertici dei tetraedri della 1ª terna, dunque:

Teorema VIII. I vertici $A_1 A_2 A_3 A_4$ del tetraedro (A), e quelli di (B) e (C) sono centri di 3 gruppi di 4 sfere, il cui sistema di centri di similitudine è dato dai punti P_{ik} e P'_{ik}. — Analogamente per i tetraedri della 2ª terna — Dato un sistema di centri di similitudine, ci sono 3 gruppi di 4 sfere, che hanno quel sistema in comune.

6. Abbiansi due tetraedri (B) e (B_1) fasciali con un tetraedro (A), ma non complementari, i loro vertici abbiano per coordinate:

$$y_1, y_2, y_3, y_4;\ y_1, -y_2, -y_3, y_4;\ -y_1, -y_2, y_3, y_4;\ -y_1, y_2\ -y_3, y_4$$
$$y'_1, y'_2, y'_3, y'_4;\ y'_1, -y'_2, -y'_3, y'_4;\ -y'_1, -y'_2, y'_3, y'_4;\ -y'_1, y'_2, -y'_3, y'_4$$

Questi due tetraedri sono iperboloidici in 4 maniere differenti (vedi n. 32, Mem. Iª) e i 4 iperboloidi da essi generati appartengono ad un fascio ed hanno il tetraedro (A) come conjugato. Essi passano anche pei vertici dei due tetraedri complementari (C) (C_1). Abbiamo pure visto che (B) (C_1) e (B_1) (C) determinano altri 4 iperboloidi, che appartengono al medesimo fascio, dunque:

Teorema IX. Due tetraedri (B) e (B_1) fasciali con un tetraedro dato (A), ma non complementari, sono iperboloidici in 4 maniere differenti. I 4 iperboloidi, così ottenuti formano un fascio ed hanno il tetraedro (A) come conjugato. I due tetraedri (C) e C_1) complementari ai primi danno luogo ai medesimi 4 iperboloidi. Considerando le coppie (C) (B_1) e (C_1) (B) si ottengono altri 4 iperboloidi, che appartengono al medesimo fascio.

7. L'equazione di una superficie di 2° grado, circoscritta al tetraedro fondamentale, è della forma:

$$\Sigma\, a_{12}\, x_1\, x_2 = 0$$

Se in essa devono essere situati i tre punti

$$y_1, y_2, y_3, y_4;\ -y_1\ -y_2, y_3, y_4;\ -y_1, y_2 - y_3, y_4,$$

si ha:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} + a_{12}y_1y_2 & + a_{13}y_1y_3 & + a_{23}y_2y_3 & + a_{14}y_1y_4 & + a_{24}y_2y_4 & + a_{34}y_3y_4 = 0 \\ + & - & - & - & - & + \\ - & + & - & - & + & - \end{array}$$

donde

$$a_{12}y_1y_2 + a_{13}y_1y_3 - a_{23}y_2y_3 - a_{14}y_1y_4 + a_{24}y_2y_4 + a_{34}y_3y_4 = 0$$

cioè la superficie contiene anche in tal caso il punto $y_1, -y_2, -y_3, y_4$, dunque:

Teorema X. Se una superficie di 2° ordine passa pei tre vertici di un tetraedro fasciale con un tetraedro in essa inscritto, essa passa anche pel 4° vertice.

Ora vediamo se dato un tetraedro qualunque inscritto in una superficie di 2° ordine è possibile di trovarne un altro inscritto nella medesima e che sia fasciale col dato. Abbiamo allora da determinare i rapporti $\frac{y_1}{y_4}, \frac{y_2}{y_4}, \frac{y_3}{y_4}$ dalle tre equazioni (1), ciò che è possibile. Il tetraedro complementare sarà evidentemente conjugato rispetto alla superficie, dunque:

Teorema XI. *In una superficie di 2° ordine c'è sempre in generale un tetraedro (B) ed uno solo, fasciale con un tetraedro dato (A) e pure inscritto nella superficie. Il tetraedro (C) complementare di (B) è un tetraedro conjugato della superficie.*

Se si considerano i piani tangenti nei vertici di (B) alla superficie, questi formano un tetraedro, pure fasciale con (C) (Vedi Teor. V), dunque:

Teorema XII. *Il tetraedro formato dai piani tangenti nei vertici del tetraedro (B) alla superficie di 2° ordine (Teor. XI) è pure fasciale con (C). Il tetraedro inscritto e il tetraedro circoscritto sono iperboloidici in 4 maniere differenti (Vedi Teor. XI)* [1].

8. Se è data una superficie di 2° grado

$$a_x^2 = 0 \tag{1}$$

e un tetraedro qualunque (A), che supponiamo sia il tetraedro fondamentale, e se vogliamo, che i piani polari di un punto $y_1 y_2 y_3 y_4$ rispetto alla superficie ed al tetraedro coincidano, si deve avere:

$$a_y a_1 y_1 = a_y a_4 y_4, \; a_y a_2 y_2 = a_y a_4 y_4, \; a_y a_3 y_3 = a_y a_4 y_4 \tag{2}$$

Come si vede le 3 equazioni (2) rappresentano 3 superficie di 2° ordine, che s'incontrano in 8 punti, le coordinate di questi soddisferanno evidentemente alle 3 equazioni (2). Questi sono dunque gli 8 punti, che hanno lo stesso piano polare rispetto alla superficie e rispetto al tetraedro. Se il tetraedro (A) primitivo dato è conjugato rispetto alla superficie, le tre equazioni (2) diventano:

$$a_4 y_1^2 = a_4 y_4^2, \; a_2 y_2^2 = a_4 y_4^2, \; a_3 y_2^2 = a_4 y_4^2 \tag{2^a}$$

ed allora si ottengono 8 punti, che formano col tetraedro dato due tetraedri (B) e (C) fasciali complementari. Questi tetraedri sono pure conjugati rispetto alla superficie di 2° ordine.

I tetraedri (A) (B) (C) formano una terna analoga a quella da noi studiata, essi sono conjugati rispetto alla superficie (2^a). Se poniamo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ la superficie (2^a) diventa

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \qquad (2^b) \ldots \; S$$

Gli spigoli opposti di (A) (B) (C) sono conjugati rispetto ad S, dunque i tetraedri (P′) (P″) (P‴) della 2ª terna sono pure conjugati rispetto ad S. Dato adunque un tetraedro conjugato qualunque (A) rispetto ad una superficie di 2° ordine S, esso determina una ed una sola sestupla di tetraedri fasciali, gli altri 5 determinano alla lor volta la stessa sestupla. Se la superficie S è reale allora due soli dei 6 tetraedri

[1] Chasles nell'*Aperçu historique « sur les théorèmes analogues des théorèmes de Pascal et Brianchon »* dice che tali tetraedri sono iperboloidici, ma in una sola maniera, cioè che i vertici del tetraedro inscritto e i punti d'incontro dei piani tangenti negli altri tre, sono situati in 4 generatrici di un iperboloide.

possono essere reali se invece è immaginaria, essendo il suo sistema polare interamente reale allora se il primo è reale gli altri sono tutti reali.

Teorema XIII. Data una superficie S di 2° grado e un tetraedro qualunque (A) ci sono 8 punti, i quali hanno lo stesso piano polare rispetto ad S ed al tetraedro (A). Se il tetraedro (A) è conjugato rispetto alla superficie, gli 8 punti formano due tetraedri (B) e (C) conjugati rispetto ad S e fasciali complementari rispetto ad (A). (A)(B)(C) e (P′)(P″)(P‴) sono conjugati rispetto ad S. Ogni tetraedro conjugato rispetto ad S dà luogo ad una tale sestupla di tetraedri conjugati rispetto ad S; se S è reale due soli dei 6 tetraedri possono essere reali, se invece la S è immaginaria, ma ha il suo sistema polare interamente reale, se uno dei tetraedri è reale, lo sono anche gli altri 5.

Supponiamo data la $S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ e il tetraedro y_1, y_2, y_3, y_4; $y_1, -y_2, -y_3, y_4$; $-y_1, -y_2, y_3, y_4$; $-y_1, y_2 -y_3, y_4$ fasciale col tetraedro di riferimento. Il tetraedro polare reciproco del primo rispetto alla S è pure un tetraedro fasciale col tetraedro di riferimento, donde:

Teorema XIV. Se di un tetraedro (B) fasciale con un tetraedro (A) conjugato rispetto ad una superficie di 2° ordine S, si costruisce il tetraedro polare reciproco (B), esso è pure fasciale con (A) ed è quindi iperboloidico in 4 maniere differenti col tetraedro (B) [1] (Teor. IX).

9. Ritorniamo alla figura delle due terne (A)(B)(C) e (P′)(P″)(P‴). Abbiasi una retta h cioè $A_1 B_1 C_4$; $B_1 C_4$ sono divisi armonicamente dal vertice A_1 e dal punto A'_1 d'incontro della retta h con la faccia opposta α_1. Analogamente i punti $B'_1 C'_4$ d'incontro di h con le facce β_1 e γ_4 di (B) e (C) sono i conjugati armonici di B_1 e C_4 rispetto ad $A_1 C_4$ e $A_1 B_1$. Sulla retta h si ha adunque l'involuzione $A_1 B_1 C_4$, $A'_1 B'_1 C'_4$, i cui due punti doppî immaginarî E′, formano coi primi tre punti o con gli altri tre un gruppo equianarmonico. Lo stesso succede per i tre piani $\alpha_1 \beta_1 \gamma_4$, che passano per la retta h' corrispondente alla retta $A_1 B_1 C_4$; vale a dire si ha intorno ad h' un'involuzione di piani $\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_4$, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_4$, che contengono rispettivamente i punti $A'_1 B'_1 C'_4$, $A_1 B_1 C_4$. I piani doppî e di quest'involuzione passano evidentemente per i punti E di h. Analogamente sulle rette h' abbiamo due punti immaginarî E′ e intorno alle rette h due piani immaginarî e'.

Le coordinate dei punti della retta $A_1 B_1 C_4$ sono

$$x_1 = 1 + \lambda_1, \; x_2 = 1, \; x_3 = 1, \; x_4 = 1$$

ove λ un parametro. Il punto A_1 si ottiene ponendo $\lambda = \infty$, B_1 si ottiene ponendo $\lambda = 0$ e per C_4 basta porre $\lambda = -\frac{1}{2}$ (vedi n. 1). Per i punti doppî dell'involuzione $A_1 B_1 C_4$, $A'_1 B'_1 C'_4$ si ha:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad .$$

[1] Chasles nell'*Aperçu historique* l. c. dimostra che due tetraedri polari reciproci qualunque rispetto ad una superficie di 2° ordine sono in generale iperboloidici in una sola maniera.

ossia le coordinate di essi sono:

$$x_1 = \pm\sqrt{-3} \quad x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

Un punto della retta $h' \equiv P'_{23} P'_{34} P'_{24}$ corrispondente alla $A_1 B_1 C_4$ ha per coordinate:

$$0, -1, 1+\lambda, -\lambda$$

I punti E ed E' sono situati sulla superficie S (Teor. XIII) ossia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, dunque il λ dei due punti E'

è
$$\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

e perciò le coordinate dei punti E' sono:

$$0, \quad -2, \quad 1 \pm i\sqrt{3}, \quad -(1 \pm i\sqrt{3})$$

Teorema XV. Se in una retta h per es. nella $A_1 B_1 C_4$, di ciascuno dei tre vertici si determina il conjugato armonico rispetto agli altri due, si ottengono i tre punti $A'_1 B'_1 C'_4$ d'incontro con le facce opposte ad $A_1 B_1 C_4$ nei tetraedri (A) (B) (C). In ogni retta h ci sono due punti immaginarî E, punti doppî dell'involuzione $A_1 B_1 C_4$, $A'_1 B'_1 C'_4$. Analogamente se dei tre piani $A_2 A_3 A_4$, $B_2 B_3 B_4$, $C_2 C_3 C_4$, che s'incontrano nella h' corrispondente di h, si determinano i conjugati armonici rispetto agli altri due si ha un'involuzione i cui piani doppî e passano pei punti E di h. In ogni retta h' si hanno invece due punti E' e intorno ad ogni retta h due piani e' immaginarî.

Per ottenere sulla retta h i punti A'_1 e B'_1 basta porre $\lambda = -1$ e $\lambda = -4$ sapendo ch'essi sono i punti d'incontro di h coi piani $x_1 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ Donde:

$$(A_1 B_1 A'_1 B'_1) = 4 = \text{cost.}$$

Teorema XVI. Il rapporto anarmonico dato da uno dei vertici di un tetraedro (A), dal suo piano opposto, da un punto qualunque B_1 e dal suo piano polare rispetto ad (A), è costante.

10. Abbiamo visto nella I^a Memoria, teor. LXXXVIII, che sopra ogni spigolo $A_i A_k$ di (A) c'è un'altra coppia di punti $P^i_{ik} P^{i'}_{ik}$ immaginarî, i quali dividono armonicamente la coppia $A_i A_k$ e $P_{ik} P'_{ik}$. In tutto abbiamo 18 coppie di punti $P^i_{ik} P^{i'}_{ik}$. Le due coppie $P^i_{12} P^{i'}_{12} P^i_{34} P^{i'}_{34}$ formano un tetraedro F, di cui due spigoli sono reali e 4 spigoli I immaginarî. Così abbiamo gli analoghi tetraedri $P^i_{13} P^{i'}_{13} P^i_{24} P^{i'}_{24}$, $P^i_{14} P^{i'}_{14} P^i_{23} P^{i'}_{23}$. Per ogni tetraedro (A) (B) (C) otteniamo tre di questi tetraedri, o per meglio dire ne otteniamo uno per ogni coppia di spigoli opposti dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale, ossia in tutto 9.

Consideriamo le 4 superficie armoniche (Vedi Mem. I^a n. 31)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S \\ -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S_1 \\ -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S_2 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv S_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

La S ha per tetraedri conjugati i 6 tetraedri della sestupla (Teor. XIII), rispetto ad essa sono conjugate le rette $h\, h'$ corrispondenti, essa passa per i punti E E' di esse ivi toccando i piani e ed e', passa per i punti P^i_{ik} $P^{i'}_{ik}$ dei 18 spigoli, dei tetraedri della sestupla, onde contiene tutti gli spigoli immaginarî I dei tetraedri F. Mediante la trasformazione (2) n. 1 le S S_1 riferite al tetraedro (B) hanno per equazioni:

$$\begin{aligned} x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0 &\equiv S \\ x'_1 x'_2 + x'_3 x'_4 = 0 &\equiv S_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

La S_1 adunque passa per le coppie di spigoli $B_1\, B_3$, $B_2\, B_4$; $B_1\, B_4$, $B_2\, B_3$. — Lo stesso avviene se adoperiamo la trasformazione fra (A) e (C), cioè la S_1 passa anche per due coppie di spigoli di (C). La S_1 passa per le 2 coppie di rette I del tetraedro $P^i_{12}\, P^{i'}_{12}$ P^i_{34} $P^{i'}_{34}$, come si scorge da (1). Una di queste coppie si appoggia evidentemente ad una coppia di spigoli di (B) e ad una di (C), oltre che appoggiarsi ad una coppia di spigoli di (A); dunque se ne conclude che le coppie di rette I sono solamente 6, ogni coppia di esse si appoggia sugli spigoli di una terna di coppie di spigoli, che non s'incontrano (Teor. VII).

Teorema XVII. *Sopra uno qualunque dei 18 spigoli della sestupla fondamentale, per es.* $A_1\, A_2$, *ci sono due punti immaginarî* $P^i_{12}\, P^{i'}_{12}$, *che dividono armonicamente la coppia di punti* $P_{12}\, P'_{12}$ *e* $A_1\, A_2$ — *I 36 punti* P^i_{ik} $P^{i'}_{ik}$ *sono situati 6 a 6 in 6 coppie di rette immaginarie I, che s'appoggiano ciascuna ad una delle 6 terne di coppie di spigoli, che non s'incontrano* (Teor. VII).

Teorema XVIII. *Con le due coppie di punti* $P^i_{ik}\, P^{i'}_{ik}$ *situate in due spigoli opposti per es. di* (S), *si forma un tetraedro F, che ha due spigoli reali e 4 rette I, come spigoli immaginarî. I tetraedri F sono 9* [1]

Teorema XIX. *Le 6 coppie di rette I sono situate sulla superficie S, che ha i 6 tetraedri della sestupla fondamentale come conjugati. — La S passa per i punti E ed E' delle rette* h *ed* h' *ed ha in essi per piani tangenti i piani* e *ed* e'. *Le rette* $h\, h'$ *corrispondenti sono conjugate rispetto alla S.*

11. Abbiamo visto che l'iperboloide S_1 cioè

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

passa per due coppie di spigoli di (B) e di (C) e per due coppie di rette immaginarie I. Lo stesso accade per i due iperboloidi S_2 S_3. — La superficie S riferita a (B) si mette sotto la forma

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_3'^2 = 0$$

i tre iperboloidi che con essa formano rispetto a (B) un gruppo di superficie armoniche sono

$$\begin{aligned} -x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 &= 0 \\ -x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 + x_4'^2 &= 0 \\ x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 + x_4'^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

[1] La figura formata dai 6 tetraedri (A) (B) (C) (P') (P'') (P''') e dai 9 tetraedri F è precisamente quella ottenuta da Klein considerando 6 complessi lineari in involuzione. Le 15 coppie di spigoli opposti di questi tetraedri rappresentano le direttrici delle congruenze date dai 6 complessi due a due. Math. Ann. Vol. II.

Le loro equazioni rispetto ad (A) [n. 1. (1)] sono precisamente

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0 \equiv S_4$$
$$x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0 \equiv S_5$$
$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0 \equiv S_6$$

Queste superficie riferite invece al tetraedro (C), si mettono sotto la medesima forma; ciò dunque fa vedere, che passano per due coppie di spigoli di (A) e per due di (C). Se riferiamo la S al tetraedro (C) la sua equazione è della forma

$$x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 + x_4''^2 = 0$$

i tre iperboloidi, che con essa formano un gruppo di superficie armoniche rispetto a (C) riferite ad (A), hanno per equazioni

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0 \equiv S_7$$
$$x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0 \equiv S_8$$
$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \equiv S_9.$$

Questi passano per due coppie di spigoli di (A) e per due coppie di spigoli di (B) e per due coppie di rette immaginarie I. L'iperboloide

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

passa per gli spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $A_1 A_4$, $A_2 A_3$; $B_1 B_3$ $B_2 B_4$; $B_1 B_4$, $B_2 B_3$; questi sono anche gli spigoli $P_{13} P'_{13}$, $P_{24} P'_{24}$; P_{13} P_{24}; P'_{13} P'_{24}; P_{14} P'_{14}, $P_{23} P'_{23}$; $P_{14} P_{23}$ $P'_{14} P'_{23}$ dei due tetraedri (P'') e (P'''), esso ha dunque per conjugato il tetraedro (C) e il tetraedro (P').

Teorema XX. Per due coppie di spigoli opposti di due tetraedri di una terna per es. (B) e (C) passa un iperboloide S_1, che ha il tetraedro (A) come conjugato. Esso passa anche per due coppie di spigoli opposti di due tetraedri della 2ª terna (sono gli stessi dei primi) e ha il terzo tetraedro come conjugato. Esso contiene pure due coppie di rette I, che formano un quadrangolo gobbo, e che congiungono 4 a 4 i punti P'_{ik} P''_{ik} degli spigoli di (B) e di (C), che giaciono in S_1.

Teorema XXI. Per le tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro della sestupla per es. di (A) si ottengono 6 iperboloidi S_4 S_5 S_6 S_7 S_8 S_9 in modo che $S_4 S_7$, $S_5 S_8$, $S_6 S_9$ s'incontrano in due coppie di spigoli opposti di (A). Gli altri due tetraedri (B) e (C) danno luogo ad altri tre iperboloidi S_1 S_2 S_3, che hanno il tetraedro (A) come conjugato. Uno qualunque di questi 9 iperboloidi ha due tetraedri della sestupla come conjugati e contiene 4 rette I, spigoli di un tetraedro F. Due iperboloidi qualunque s'incontrano in due dei 18 spigoli dei tetraedri fondamentali e in due rette I.

Siccome le coppie di spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $B_1 B_3$, $B_2 B_4$ che non s' incontrano e che sono situate sulla superficie.

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

formano un gruppo armonico, perchè le rette $B_1 B_3$, $B_2 B_4$, incontrano le rette $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ nei unti P_{13} P'_{13} P_{24} P'_{24}, così:

Teorema XXII. Le due coppie di spigoli di due tetraedri di una delle terne, situate in uno dei 9 iperboloidi e che non s'incontrano, formano un gruppo armonico.

Da ciò che si è detto si ha pure che $SS_1 S_4 S_7$, $SS_2 S_5 S_8$, $SS_3 S_6 S_9$ formano tre gruppi di superficie armoniche rispetto ai tetraedri della 2ª terna.

Teorema XXIII. Le 4 delle 10 superficie $S\ S_1\ S_2 \ldots S_9$, che sono coniugate rispetto ad un tetraedro della sestupla fondamentale, formano un gruppo di superficie armoniche (Vedi n. 32 Mem. Iª). Rispetto ai 6 tetraedri della sestupla fondamentale esse formano 6 gruppi di 4 superficie armoniche a ciascuno dei quali appartiene la S.

12. Le coordinate dei vertici del tetraedro immaginario $P'_{12} P''_{12}\ P'_{34} P''_{34}$ sono rispetto ad (A) come tetraedro di riferimento $(1\, i\, 0\, 0)$, $(1\, -i\ 0\ 0)$, $(0\ 0\ 1\ i)$, $(0\ 0\ 1\, -i)$ e le sue facce sono:

$$x_1 \pm i x_2 = 0 \qquad x_3 \pm i x_4 = 0$$

onde le formole di trasformazione fra questo tetraedro ed (A) sono:

$$x'_1 = x_1 + i x_2, \quad x'_2 = x_1 - i x_2, \quad x'_3 = x_3 + i x_4, \quad x'_4 = x_3 - i x_4. \quad (1)$$

Analoghe formole otteniamo per gli altri due tetraedri F, che si formano con le coppie di punti $P'_{ik}\ P''_{ik}$, situate sulle coppie $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ di (A). Fra il tetraedro (A) e il tetraedro $P'_{12} P''_{12}\ P'_{34} P''_{34}$ di (B) si hanno invece le seguenti formole di trasformazione, come è facile di verificare.

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 (1-i) + x_2 (1-i) + x_3 (1+i) + x_4 (1+i) \\
x'_2 &= x_1 (1+i) + x_2 (1+i) + x_3 (1-i) + x_4 (1-i) \\
x'_3 &= -x_1 (1+i) + x_2 (1+i) - x_3 (1-i) + x_4 (1-i) \\
x'_4 &= -x_1 (1-i) + x_2 (1-i) - x_3 (1-i) + x_4 (1-i).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Analogamente si ottengono le formole di trasformazione fra (A) e gli altri tetraedri F di (B) e (C).

13. Ora consideriamo uno degli iperboloidi $S_1 \ldots S_9$ per es. S_9 cioè

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

esso, come si è visto, passa per gli spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, $A_1 A_4$, $A_2 A_3$; $B_1 B_3$, $B_2 B_4$, $B_1 B_4$, $B_2 B_3$. I punti $P'_{ik}\ P''_{ik}$ delle coppie rimanenti di (A) e di (B) formano adunque due tetraedri F, conjugati rispetto ad S_7; ma la S_7 passa anche per due coppie di spigoli dei tetraedri (P″) e (P‴) (n. 11), dunque è chiaro che altri due tetraedri F sono conjugati rispetto alla S_7. Essa ha pure i tetraedri (C) e (P′) come conjugati, i quali coi 4 tetraedri F suddetti formano una sestupla di tetraedri fasciali rispetto alla S_7 (Teorema XIII). Dunque:

Teorema XXIV. I 6 tetraedri della sestupla fondamentale e i 9 tetraedri F, formano altre 9 sestuple di tetraedri fasciali, rispetto alle quali le superficie $S_1 \ldots S_9$ si comportano rispettivamente come la S rispetto alla sestupla fondamentale e pel teorema XC della Mem. Iª e pel teorema XXIII di questa si ha:

Teorema XXV. Ciascuna delle 10 superficie $S S_1 \ldots S_9$ è polare reciproca di sè stessa rispetto alle altre 9.

14. Se congiungiamo i due punti P'_{12} P''_{12} dello spigolo $A_1 A_2$ con la coppia $P_{34} P'_{34}$ dello spigolo opposto $A_3 A_4$, otteniamo un tetraedro, che chiamo N. Esso ha 2 spigoli reali e 4 immaginarî. Congiungendo invece i punti P''_{12} P'_{12} con A_3 A_4 si ottiene un altro tetraedro N; per ogni coppia di spigoli si ottengono dunque 4 tetraedri N, in tutto adunque considerando anche i tetraedri F 60, onde:

Teorema XXVI. Se si congiungono i punti P'_{ik} P''_{ik} di uno spigolo per es. $A_1 A_2$, con i punti reali P_{ik} P'_{ik} dello spigolo opposto $A_3 A_4$, oppure con i punti $A_3 A_4$ stessi, si ottiene un tetraedro N. Per tutti i 6 tetraedri di una sestupla otteniamo 36 di questi tetraedri; in tutto 60.

15. Nel n. 32 Mem. Iª abbiamo visto che al gruppo SS_1 S_2 S_3 di 4 superficie armoniche è complementare un altro gruppo di 4 superficie a punti ellittici, e siccome le 10 superficie $SS_1 \dots S_9$ formano 6 gruppi di superficie armoniche rispetto ai 6 tetraedri della sestupla fondamentale, così abbiamo 6 gruppi di 4 superficie $\mathcal{E}$ che si riferiscono a quelli stessi 6 tetraedri. Se prendiamo in considerazione anche i 9 tetraedri F, avremo altri 9 di questi gruppi di superficie $\mathcal{E}$, dunque:

Teorema XXVII. Ci sono rispetto ai tetraedri reali della sestupla fondamentale 6 gruppi di 4 superficie a punti ellittici $\mathcal{E}$, complementari ai 6 gruppi di superficie armoniche formati dalle 10 superficie $SS_1 \dots S_9$, rispetto a quei tetraedri. In tutto il sistema si ottengono 15 gruppi di 4 superficie $\mathcal{E}$ (¹) (Teor. LXXXIX, Mem. Iª).

Le superficie $\mathcal{E}$ dei gruppi, che si riferiscono ad (A) (B) (C) riferiti al tetraedro (A) hanno l'equazioni seguenti:

1ª Bisestupla

quelle di (A)

$$-x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_1$$
$$x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_2$$
$$x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_3$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0\equiv\mathcal{E}_4$$

quelle di (B)

$$\Sigma x_1^2-2\Sigma x_1x_2=0\equiv\mathcal{E}_5$$
$$\Sigma x_1^2-2x_1x_2-2x_3x_4+2x_1x_3+2x_2x_4+2x_1x_4+2x_2x_3=0\equiv\mathcal{E}_6$$
$$\Sigma x_1^2+2x_1x_2+2x_3x_4-2x_1x_3-2x_2x_4+2x_1x_4+2x_2x_3=0\equiv\mathcal{E}_7$$
$$\Sigma x_1^2+2x_1x_2+2x_3x_4+2x_1x_3+2x_2x_4-2x_1x_4-2x_2x_3=0\equiv\mathcal{E}_8$$

quelle di (C)

$$\Sigma x_1^2-2x_1x_2+2x_3x_4-2x_1x_3+2x_2x_4-2x_2x_3+2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_9$$
$$\Sigma x_1^2-2x_1x_2+2x_3x_4+2x_1x_3-2x_2x_4+2x_2x_3-2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_{10}$$
$$\Sigma x_1^2+2x_1x_2-2x_3x_4-2x_1x_3+2x_2x_4+2x_2x_3-2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_{11}$$
$$\Sigma x_1^2+2x_1x_2-2x_3x_4+2x_1x_3-2x_2x_4-2x_2x_3+2x_1x_4=0\equiv\mathcal{E}_{12}$$

Le ultime 8 equazioni si trovano facendo uso delle formole (1) n. 1. E così facendo uso delle formole n. 4 si hanno i tre gruppi di superficie $\mathcal{E}$ che si riferiscono

(¹) Essendo $x_1=0$ $x_2=0 \dots x_6=0$ i 6 complessi fondamentali le equazioni delle 10 superficie $SS_1 \dots S_9$ considerate anche da Klein hanno per equazioni $x_1^2+x_3^2+x_5^2\equiv x_2^2+x_4^2+x_6^2$ ecc. mentre le 60 superficie $\mathcal{E}$ che abbiamo qui incontrate hanno per equazioni $\pm x_1 x_2 \pm x_3 x_4 \pm x_5 x_6=0$ ecc.

ai tetraedri della 2ª terna, cioè

$$
2^a \text{ Bisestupla} \left\{ \begin{array}{lll}
\text{per} & (P') & x_1^2 + x^2 \mp 2x_3 x_4 = 0 \equiv \mathcal{E}_{13}, \ \mathcal{E}_{14} \\
 & & x_3^2 + x_4^2 \mp 2x_1 x_2 = 0 \equiv \mathcal{E}_{15}, \ \mathcal{E}_{16} \\
» & (P'') & x_1^2 + x_3^2 \mp 2x_2 x_4 = 0 \equiv \mathcal{E}_{17}, \ \mathcal{E}_{18} \\
 & & x_2^2 + x_4^2 \mp 2x_1 x_3 = 0 \equiv \mathcal{E}_{19}, \ \mathcal{E}_{20} \\
» & (P''') & x_1^2 + x_4^2 \mp 2x_2 x_3 = 0 \equiv \mathcal{E}_{21}, \ \mathcal{E}_{22} \\
 & & x_2^2 + x_3^2 \mp 2x_1 x_4 = 0 \equiv \mathcal{E}_{23}, \ \mathcal{E}_{24}.
\end{array} \right.
$$

Queste 24 superficie $\mathcal{E}$, come si vede, son tutte reali. È chiaro pure che un identico sistema di equazioni, si otterrebbe riferendosi ad un altro tetraedro della sestupla fondamentale.

Mediante le formole (1) n. 14 le 4 superficie $\mathcal{E}$ che si riferiscono al tetraedro $P^i_{12}\, P^{i'}_{12}\, P^i_{34}\, P^{i'}_{34}$ di (A) hanno per equazioni:

$$x_1^2 + x_2^2 \mp 2i\, x_3\, x_4 = 0$$
$$x_3^2 + x_4^2 \mp 2i\, x_1\, x_2 = 0$$

E così analogamente quelle che si riferiscono agli altri due tetraedri F di (A). Quelle che invece si riferiscono al tetraedro $P^i_{12}\, P^{i'}_{12}\, P^i_{34}\, P^{i'}_{34}$ di B hanno le seguenti equazioni (2) (n. 14)

$$\Sigma x_1^2 + 2x_1\, x_2 - 2x_3\, x_4 - 2i\, x_1\, x_3 - 2i\, x_2\, x_4 + 2i\, x_1\, x_4 + 2i\, x_2 x_3 = 0 \text{ ecc.}$$

Le superficie $\mathcal{E}$ dei tre gruppi dei tre tetraedri di una terna formano una bisestupla. — *Considero solamente le superficie $\mathcal{E}$ della sestupla fondamentale e chiamo 1ª bisestupla quella che si riferisce ai tetraedri della 1ª terna* (A) (B) (C) e 2ª *quella che si riferisce alla 2ª terna* (P′) (P″) (P‴).

16. Sia data una delle superficie $\mathcal{E}$ di un gruppo di uno dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale per es. $\mathcal{E}_1$

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 .$$

Essa incontra i tre spigoli $A_1\, A_2$, $A_1\, A_3$, $A_1\, A_4$ nelle tre coppie di punti reali $P_{12} P'_{12}$, $P_{13} P'_{13}$, $P_{14} P'_{14}$ e gli altri spigoli nelle coppie di punti immaginarî $P^i_{23}\, P^{i'}_{23}\, P^i_{24}\, P^{i'}_{24}\, P^i_{34}\, P^{i'}_{34}$ onde essa passa per gli spigoli immaginarî di tre tetraedri N, cioè: $P_{12}\ P'_{12}\ P^i_{34}\, P^{i'}_{34}$, $P_{13}\ P'_{13}\ P^i_{24}\ P^{i'}_{24}$, $P_{14}\ P^i_{14}\ P^i_{23}\ P'^i_{23}$. Se consideriamo un'altra superficie $\mathcal{E}$ dello stesso gruppo per es. $\mathcal{E}_2$

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

si vede che essa passa pure per gli spigoli immaginarî del tetraedro $P_{12}\ P'_{12}\ P^i_{34}\ P^{i'}_{34}$ quindi due superficie $\mathcal{E}$ di uno stesso gruppo, s'incontrano nei 4 spigoli immaginarî di un tetraedro N (Vedi Mem. Iª, Teor. LXXXIX).

Teorema XXVIII. *Due superficie $\mathcal{E}$ di un gruppo qualunque s'incontrano nei 4 spigoli immaginarî di un tetraedro N, che ha i suoi vertici in una coppia di spigoli opposti del tetraedro, a cui si riferisce quel gruppo. In una superficie $\mathcal{E}$ qualunque sono situati i 4 spigoli immaginarî di tre tetraedri N.*

Si scorge facilmente dall'equazioni delle superficie $\mathcal{E}$ n. 15, che quelle che si riferiscono per es. a (B) e (C) toccano gli spigoli del tetraedro (A) nei punti reali

P_{ik} P'_{ik} e siccome in tal caso s'annulla l'invariante $A_{1222}=0$ fra una $\mathcal{C}$ per es. di (B) ed una per es. di (A), si ha:

Teorema XXIX. Le superficie $\mathcal{C}$ di un gruppo della 1ª bisestupla che si riferisce per es. ad (A), toccano gli spigoli degli altri due tetraedri (B) e (C). Analogamente per le superficie della 2ª bisestupla. Ci sono infiniti tetraedri conjugati alle superficie $\mathcal{C}$ di (A) i cui spigoli toccano rispettivamente le superficie $\mathcal{C}$ di (B) e (C).

17. Considero ora invece una $\mathcal{C}$ della 2ª bisestupla per es. $\mathcal{C}_{15}$

$$x_1^2+x_2-2x_3\,x_4=0\,.$$

Questa taglia i piani $x_1=0$ e $x_2=0$ secondo le due coniche

$$x_2^2=2x_3\,x_4\,, \qquad x_1^2=2x_3\,x_4$$

che toccano gli spigoli $A_1\,A_3$, $A_1\,A_4$ e $A_2\,A_3$, $A_2\,A_4$ nei punti A_3, A_4. Essa taglia invece i piani $x_3=0$ $x_4=0$ secondo due rette cioè:

$$(x_1+ix_2)\;(x_1-ix_2)=0$$

le quali 4 rette passano rispettivamente per A_3 e A_4 e s'incontrano nei due punti P'_{12} P''_{12} dello spigolo $A_1\,A_2$; la superficie adunque tocca i piani $x_3=0$ $x_4=0$ nei punti A_3 e A_4 e i piani $x_1\pm i\;x_2=0$ nei punti P'_{12} e P''_{12}, dunque:

Teorema XXX. Le superficie $\mathcal{C}$ della 2ª bisestupla toccano due facce di un tetraedro qualunque della 1ª terna e tagliano le altre in due coniche, che toccano due degli spigoli, nei punti d'incontro di essi con lo spigolo, opposto a quello ove s'incontrano le due prime facce. Così per le superficie $\mathcal{C}$ della 1ª bisestupla rispetto ai tetraedri della 2ª terna.

L'invariante simultaneo A_{1222} o A_{1112} di una superficie della 1ª bisestupla ed una della 2ª è zero.

Teorema XXXI. Ci sono infiniti tetraedri conjugati di una superficie $\mathcal{C}$ per es. della 1ª bisestupla, che sono inscritti o circoscritti ad una superficie $\mathcal{C}$ qualunque della 2ª bisestupla.

La S, cioè

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$$

è reciproca di sè stessa rispetto alle 24 superficie $\mathcal{C}_1 \ldots \mathcal{C}_{24}$ (Vedi Teor. XC, Mem. Iª e Teor. XXV di questa) dunque:

Teorema XXXII. La superficie S, di una delle 10 sestuple, formate con i tetraedri reali e coi 9 tetraedri F è reciproca di sè stessa rispetto alle 24 superficie $\mathcal{C}$ delle due bisestuple, che si riferiscono alle due terne di tetraedri di quella sestupla.

La $\mathcal{C}_1$ per es.

$$-x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$$

è polare reciproca di sè stessa rispetto a 6 superficie della 2ª bisestupla cioè $\mathcal{C}_{13}$ $\mathcal{C}_{14}$ $\mathcal{C}_{17}$ $\mathcal{C}_{18}$ $\mathcal{C}_{21}$ $\mathcal{C}_{22}$

$$x_1^2+x_2^2\mp 2x_3\,x_4=0$$
$$x_1^2+x_3^2\mp 2x_2\,x_4=0$$
$$x_1^2+x_4^2\mp 2x_2\,x_3=0\,.$$

Teorema XXXIII. Una superficie $\mathcal{C}$ della 1^a (2^a) bisestupla è polare reciproca di sè stessa rispetto a 6 superficie $\mathcal{C}$ della 2^a (1^a) bisestupla.

Siccome con i 15 tetraedri fondamentali si possono formare 10 sestuple di tetraedri fasciali così colle 60 superficie $\mathcal{C}$ (Teor. XXVII) si formano 10 aggruppamenti di due bisestuple, quindi è chiaro che queste superficie $\mathcal{C}$ devono avere altre interessanti proprietà, che io tralascio di considerare.

18. Ritorniamo alla figura delle rette h (Teor. I). Con le 16 rette h si possono formare i seguenti 8 gruppi α di 4 rette

1°	$A_1 B_4 C_1$,	$A_2 B_1 C_3$,	$A_3 B_3 C_4$,	$A_4 B_2 C_2$
2°	$A_1 B_1 C_4$,	$A_2 B_3 C_1$,	$A_3 B_4 C_3$,	$A_4 B_2 C_2$
3°	$A_1 B_2 C_3$,	$A_2 B_4 C_2$,	$A_3 B_3 C_4$,	$A_4 B_1 C_1$
4°	$A_1 B_3 C_2$,	$A_2 B_1 C_3$,	$A_3 B_2 C_1$,	$A_4 B_4 C_4$
5°	$A_1 B_4 C_1$,	$A_2 B_2 C_4$,	$A_3 B_1 C_2$.	$A_4 B_3 C_3$
6°	$A_1 B_1 C_4$,	$A_2 B_4 C_2$,	$A_3 B_2 C_1$,	$A_4 B_3 C_3$
7°	$A_1 B_2 C_3$,	$A_2 B_3 C_1$,	$A_3 B_1 C_2$,	$A_4 B_4 C_4$
8°	$A_1 B_3 C_2$,	$A_2 B_2 C_4$,	$A_3 B_4 C_3$,	$A_4 B_1 C_1$

Le 4 rette h di un gruppo non s'incontrano, esse passano rispettivamente per i 4 vertici di ciascuno dei tre tetraedri (A) (B) e (C). Una retta per es. $A_1 B_4 C_1$ entra in 2 gruppi cioè nel 1°, e nel 5° dunque:

Teorema XXXIV. Le 16 rette h si dispongono in 8 gruppi α di 4 rette, che non s'incontrano. Le 4 rette h di un gruppo passano rispettivamente per i vertici dei tre tetraedri (A) (B) e (C). — Analogamente per le rette h'

Le 6 rette h, che con $A_1 B_4 C_1$ formano due gruppi α sono:

$$A_2 B_1 C_3, \quad A_3 B_3 C_4, \quad A_4 B_2 C_2$$
$$A_2 B_2 C_4, \quad A_3 B_1 C_2, \quad A_4 B_4 C_4.$$

Queste 6 rette sono situate evidentemente in un iperboloide H, che corrisponde alla retta $A_1 B_4 C_1$.

Teorema XXXV. Ogni retta h entra in due gruppi α; le 6 rette h che con essa formano i due gruppi α determinano un iperboloide H, che corrisponde alla prima retta h. Le 6 rette h s'incontrano due a due in 9 vertici di (A) (B) (C), eccettuati quelli della prima retta h. In essi l'iperboloide H ha per piani tangenti 9 piani Π_{ik} Π'_{ik}. Ci sono 16 iperboloidi H e 16 H', che corrispondono alle 16 rette h e alle 16 rette h'. Alle 4 rette h (h') di un gruppo α (α') corrispondono 4 iperboloidi H (H') di un gruppo α (α').

Gli iperboloidi, che corrispondono alle 4 rette h, passanti per A_1, riferiti al tetraedro (A) hanno le seguenti equazioni:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1^2 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 &= 0 \\ x_1^2 - x_2 x_3 + x_2 x_4 - x_3 x_4 &= 0 \\ x_1^2 - x_2 x_3 - x_2 x_4 + x_3 x_4 &= 0 \\ x_1^2 + x_2 x_3 - x_2 x_4 - x_3 x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Analogamente per gli altri.

Dato un iperboloide H ce ne sono 6, che formano con esso due gruppi α e sono precisamente quelli che corrispondono alle 6 rette h situate sul primo.

L'iperboloide che corrisponde alla retta $A_1 B_4 C_1$ è

$$A_2 B_1 C_3\,,\quad A_3 B_3 C_4\,,\quad A_4 B_2 C_2$$
$$A_2 B_2 C_4\,,\quad A_3 B_1 C_2\,,\quad A_4 B_3 C_2\,.$$

Ora quello corrispondente per es. alla retta $A_2 B_1 C_3$ è

$$A_1 B_4 C_1\,,\quad A_3 B_3 C_4\,,\quad A_4 B_2 C_2$$
$$A_1 B_3 C_2\,,\quad A_3 B_2 C_1\,,\quad A_4 B_4 C_4\,.$$

Come è chiaro, questi due iperboloidi s'incontrano nelle due rette $A_3 B_3 C_4$, $A_4 B_2 C_2$, che non s'incontrano.

Invece due iperboloidi, che corrispondono a due rette h che s'incontrano, s'intersecano in due rette h, che pure s'incontrano.

Teorema XXXVI. Uno qualunque degli iperboloidi H incontra i 6 iperboloidi H, che formano con esso due gruppi α, in due rette h che non s'incontrano, mentre incontra gli altri 9 in due rette h, che s'incontrano.

19. Le 4 rette h di un gruppo α non possono appartenere ad un iperboloide, questo passerebbe per tutti i vertici di (A) (B) (C) e quindi per tutte le rette h, ciò che è impossibile; le 4 rette h di un gruppo α ammettono due sole trasversali comuni h_0. Abbiamo visto, n. 11, che i punti E della retta $A_1 B_1 C_4$ hanno per coordinate

$$\pm i\sqrt{3},\quad 1,\quad 1,\quad 1\,.$$

Considerando le rette $A_2 B_3 C_1$, $A_3 B_4 C_3$, $A_4 B_2 C_2$, che con essa formano un gruppo α, i punti immaginarî E di esse sono:

$$\begin{array}{cccc} -1\,, & \pm i\sqrt{3}, & -1\,, & 1 \\ -1 & 1 & \pm i\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \pm i\sqrt{3}\,. \end{array}$$

Tiriamo la retta, che passa per il punto $(+ i\sqrt{3}, 1, 1, 1)$ di $A_1 B_3 C_4$ e $(-1, + i\sqrt{3}, -1, 1)$ di $A_2 B_3 C_1$; le coordinate di un suo punto qualunque sono della forma:

$$i\sqrt{3}-\lambda,\quad 1+i\sqrt{3}.\lambda,\quad 1-\lambda,\quad 1+\lambda\,.$$

Ponendo per λ i valori $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ si ottengono i due punti E delle altre due rette h; ciò vuol dire che le trasversali comuni h_0 delle 4 rette h di un gruppo α, le incontrano nei punti E; dunque sono situate nella superficie S, siccome questa passa per i punti E ed E' (Teor. XIX). Che le rette h_0 passano per i punti E delle rette h si dimostra anche projettando da due rette h del gruppo α i tre vertici di (A) (B) (C) della terza sulla 4ª retta h; si ottengono così in quest'ultima nelle due projezioni gli stessi vertici di (A) (B) (C) situati in essa, in modo che si ha $(ABC..) \barwedge (BCA..)$; ciò fa vedere che i punti uniti di queste due punteggiate projettive sono precisamente i punti E.

Teorema XXXVII. Ciascun gruppo α di rette h ammette due trasversali h_0, che incontrano le 4 rette di esso nei punti E. Queste

rette h_0 sono 16. — I gruppi α' delle rette h' ammettono le stesse trasversali h_0. — Esse sono situate sulla S.

L'ultima parte di questo teorema può dimostrarsi nel seguente modo. La retta h_0 che passa per un punto immaginario E è situata sulla S, essa è dunque situata sul piano tangente ad S in E, cioè in un piano e (Teor. XIX), il quale passa, come si sa, per la retta h' corrispondente alla retta h, ove giace il punto E; dunque la retta h_0 incontra le 4 rette h', che corrispondono alle 4 rette h del gruppo α e di cui essa è trasversale comune. Quelle 4 rette h' formano anch'esse un gruppo α', quindi due gruppi corrispondenti α ed α' ammettono le stesse trasversali h_0.

Congiungendo i due punti E di una retta h con un punto E′ della retta corrispondente h' si ottengono due rette h_0, onde le rette h_0 si scindono in due gruppi di 8 rette, che appartengono ai due sistemi di rette di S, dunque:

Teorema XXXVIII. Le 16 rette h_0 si scindono in due gruppi di 8 rette, due qualunque di un gruppo non s'incontrano, mentre s'incontrano quelle di gruppi differenti in uno dei punti E od E′.

20. L'iperboloide H corrispondente alla retta $A_1 B_1 C_2$ passa evidentemente per le due coppie di trasversali h_0, dei due gruppi α, a cui appartiene la $A_1 B_1 C_1$; quindi in ogni iperboloide H ci sono 4 rette h_0 e perciò due iperboloidi H, che corrispondono a due rette h dello stesso gruppo α, s'incontrano oltre che in due rette h (Teor. XXVIII) anche in due rette h_0.

Teorema XXXIX. Due iperboloidi di uno stesso gruppo α s'incontrano oltre che in due rette h (Teor. XXXVI) in due rette h_0, che non s'incontrano.

21. Sia ora dato un punto di coordinate y_1, y_2, y_3, y_4, e determiniamo i suoi conjugati nelle involuzioni di 2ª specie, determinate dalle 9 coppie di spigoli dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale. Quelli rispetto alle tre coppie di spigoli di (A), si ottengono semplicemente cambiando due segni alle coordinate del punto dato, quelli invece rispetto a (B) e (C) si ottengono pure semplicemente colle formole (1) n. 1. Essi sono distribuiti nei seguenti quadri; a sinistra di ciascun punto è indicato uno dei due spigoli, rispetto ai quali esso è conjugato di 2ª specie del punto dato.

1. $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$

$A_1 A_3$	2	$-y_1\ \ y_2 - y_3\ \ y_4$	$B_1 B_3$	5	$y_3\ \ y_4\ \ y_1\ \ y_2$	$C_1 C_3$	8	$y_3 - y_4\ \ y_1 - y_2$
$A_1 A_4$	3	$y_1 - y_2 - y_3\ \ y_4$	$B_1 B_4$	6	$y_4\ \ y_3\ \ y_2\ \ y_1$	$C_1 C_4$	9	$-y_4\ \ y_3\ \ y_2 - y_1$
$A_1 A_2$	4	$-y_1 - y_2\ \ y_3\ \ y_4$	$B_1 B_2$	7	$y_2\ \ y_1\ \ y_4\ \ y_3$	$C_1 C_2$	10	$y_2\ \ y_1 - y_4 - y_3$

Osservo che i conjugati di 2ª specie rispetto alle coppie di spigoli opposti di (B) e (C), sono due a due conjugati di 2ª specie rispetto alle coppie di spigoli opposti di (A). Se di 2, 3 ecc. si fa la stessa operazione si ottengono rispetto ad (A) gli stessi punti 1 3 4 ed avremo:

2. $-y_1\ y_2 - y_3\ y_4$

$B_1 B_3$	8	$-y_3\ \ y_4 - y_1\ \ y_2$	$C_1 C_3$	5	$y_3\ \ y_4\ \ y_1\ \ y_2$
$B_1 B_4$	11	$y_4 - y_3\ \ y_2 - y_1$	$C_1 C_4$	13	$-y_4 - y_3\ \ y_2\ \ y_1$
$B_1 B_2$	12	$y_2 - y_1\ \ y_4 - y_3$	$C_1 C_2$	14	$y_2 - y_1 - y_4\ \ y_3$

3. $y_1 - y_2 - y_3\ y_4$

$B_1 B_3$ 15	$-y_3\ \ y_4\ \ y_1 - y_2$	$C_1 C_3$ 16	$-y_3 - y_4\ \ y_1\ \ y_2$
$B_1 B_4$ 11	$y_4 - y_3 - y_2\ \ y_1$	$C_1 C_4$ 6	$y_4\ \ y_3\ \ y_2\ \ y_1$
$B_1 B_2$ 14	$-y_2\ \ y_1\ \ y_4 - y_3$	$C_1 C_2$ 12	$-y_2\ \ y_1 - y_4\ \ y_3$

4. $-y_1 - y_2\ y_3\ y_4$

$B_1 B_3$ 16	$y_3\ \ y_4 - y_1 - y_2$	$C_1 C_3$ 15	$y_3 - y_4 - y_1\ \ y_2$
$B_1 B_4$ 13	$y_4\ \ y_3 - y_2 - y_1$	$C_1 C_4$ 11	$y_4 - y_3 - y_2\ \ y_1$
$B_1 B_2$ 10	$-y_2 - y_1\ \ y_4\ \ y_3$	$C_1 C_2$ 7	$y_2\ \ y_1\ \ y_4\ \ y_3$

I punti 1 2 5 8 formano due coppie 1 2, 5 8 di punti conjugati di 2ª specie rispetto agli spigoli $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; due coppie 15, 28 di punti conjugati di 2ª specie rispetto agli spigoli $B_1 B_3$, $B_2 B_4$ di (B) e 18, 25 sono conjugati di 2ª specie rispetto alla coppia di spigoli $C_1 C_3$, $C_2 C_4$ di (C). Questo risulta chiaro dal precedente quadro ed è altresì chiaro essendo $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $B_1 B_3$, $B_2 B_4$: $C_1 C_3$, $C_2 C_4$ spigoli del tetraedro $P_{13} P'_{13} P_{24} P'_{24}$ della 2ª terna (Vedi n 2, quadro Q), onde 1 2 5 8 formano un tetraedro fasciale con $P_{13} P'_{13} P_{24} P'_{24}$. Così i punti 1 3 6 9, 1 4 7 10 determinano due tetraedri fasciali rispettivamente con gli altri due tetraedri della 2ª terna. I punti 5, 8, 15, 16 formano invece un tetraedro fasciale con (A), come anche 6, 9, 11, 13 e 7, 10, 12, 14. Dunque i 16 punti ottenuti sono vertici di 4 tetraedri fasciali rispetto ad (A) e per la stessa ragione rispetto agli altri 5 tetraedri della sestupla fondamentale. Se scegliamo il tetraedro 5, 8, 15, 16 e costruiamo dei suoi vertici i conjugati di 2ª specie rispetto alla coppia $B_1 B_3$, $B_2 B_4$ oppure $C_1 C_3$, $C_2 C_4$ (vedi quadri precedenti) otteniamo i punti 1 2 3 4 stessi. Ma v'ha di più, i 16 punti formano un ciclo tale, che se di uno di essi si trovano i conjugati di 2ª specie rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale, si ottengono 9 punti degli stessi 16 punti.

Teorema XL. *Se dei vertici del tetraedro fasciale di un punto P rispetto ad uno della sestupla fondamentale per es. (A) si costruiscono i conjugati nelle involuzioni, date dalle 3 coppie di spigoli opposti degli altri due tetraedri (B) e (C), si ottengono 12 punti, che formano tre tetraedri fasciali con (A). Facendo la stessa operazione con uno qualunque di questi tre tetraedri risultano gli altri due tetraedri e il 1° appartenente a P. I 16 vertici di questi 4 tetraedri determinano una configurazione K chiusa, tale che di un suo punto qualunque i conjugati di 2ª specie rispetto alle 9 coppie di spigoli della sestupla fondamentale coincidono con se 9 dei 16 punti di essa. I 16 punti si separano in 4 tetraedri fasciali rispetto ad uno qualunque dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale.*

22. Del punto $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ ossia 1 (n. 21) i conjugati di 2ª specie rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti sono i punti dal 2 al 10; dei 16 punti dunque ne rimangono 6 cioè:

11 $y_4 - y_3\ \ y_2 - y_1$, 12 $y_2 - y_1\ \ y_4 - y_3$, 13 $-y_4 - y_3\ \ y_2\ \ y_1$

14 $-y_2 - y_1 - y_4\ \ y_3$, 15 $-y_3\ \ y_4\ \ y_1 - y_2$, 16 $-y_3 - y_4\ \ y_1\ \ y_2$.

Questi 6 punti stanno in un piano, cioè nel piano polare

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0$$

del punto 1 rispetto alla $S \equiv x_1^2 + x_2^2 x_3^2 + x_4^2 = 0$. Questo ha luogo naturalmente per ognuno dei 16 punti di K, quindi essi sono disposti 6 a 6 in 16 piani, che sono i piani polari dei 16 punti rispetto alla S. Questi 16 piani formano alla lor volta una configurazione K. È facile anche di verificare che i 6 punti 11, 12, 13, 14, 15, 16 sono situati in una conica. La configurazione K è adunque analoga, alla configurazione dei 16 punti singolari e 16 piani singolari di una superficie di Kummer. Pigliamo ora i punti 3, 4, 6, 7 cioè:

$$y_1 \; -y_2 \; -y_3 \; y_4\,, \qquad -y_1 \; -y_2 \; y_3 \; y_4\,, \qquad y_4 \; y_3 \; y_2 \; y_1\,, \qquad y_2 \; y_1 \; y_4 \; y_3$$

Questi 4 punti sono situati sul piano polare di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ad

$$S_7 \equiv x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0$$

cioè

$$x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_4 - x_4 y_3 = 0$$

esso passa anche pei punti 13 e 14, vale a dire esso è uno dei 16 piani di K; dunque i 16 piani di K sono i 16 piani polari dei suoi 16 punti rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots\ldots S_9$; dunque la K ha le stesse proprietà rispetto alle 10 sestuple formate coi 6 tetraedri reali e i 9 immaginarî F.

Teorema XLI. I conjugati di 2ª specie di un punto P rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti di una delle 10 sestuple (Teor. XXIV) per es. della fondamentale sono situati 3 a 3 nei piani polari di esso rispetto ai 6 tetraedri della sestupla e 4 a 4 nei suoi piani polari rispetto alle 9 superficie $S_1 \ldots . S_9$. Gli altri 6 punti della configurazione K, a cui dà luogo il punto P, sono situati sul piano polare di P rispetto alla S. — Questi 6 punti sono situati in una conica. — Per due di questi ultimi punti passano rispettivamente i piani polari di P rispetto alle superficie $S_1 \ldots . S_9$. — La configurazione K ha le stesse proprietà rispetto a ciascuna delle 10 sestuple di 6 tetraedri, e i suoi 16 piani formano una configurazione K e sono rispettivamente i piani polari dei suoi 16 punti rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots . S_9$. La configurazione K è analoga a quella dei 16 punti e 16 piani singolari della superficie di Kummer (¹).

23. Abbiamo finora considerato i conjugati di 2ª specie di un punto P, rispetto alle 9 coppie di spigoli opposti dei 6 tetraedri di una sestupla qualunque. Ora considereremo anche i conjugati di 1ª specie S di un punto P rispetto alle involuzioni di 1ª specie date dai vertici e piani opposti dei tetraedri di una delle due terne di una sestupla per es. (A) (B) (C). Tenendo conto delle formole (1) (2), n. 1, si hanno i seguenti punti. Il punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ ha rispetto ad (A) per conjugati di 1ª specie i punti:

17 $-y_1\; y_2\; y_3\; y_4$, 18 $y_1\; -y_2\; y_3\; y_4$, 19 $y_1\; y_2\; -y_3\; y_4$, 20 $y_1\; y_2\; y_3\; -y_4$

rispetto a (B):

21 $(y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$
22 $(y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(y_1+y_2-y_3+y_4)$
23 $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(+y_1-y_2+y_3+y_4)$
24 $(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$

(¹) Vedi anche Klein, l. c.

rispetto a (C):

25 $(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1+y_2-y_3-y_4)$, $(\ y_1-y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1-y_2-y_3+y_4)$
26 $(y_1-y_2+y_3-y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1-y_2+y_3+y_4)$
27 $(y_1+y_2-y_3-y_4)$, $(\ y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(-y_1+y_2-y_3+y_4)$
28 $(y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1+y_2+y_3+y_4)$.

Così continuando coi punti 2 3 4 si hanno altri punti, che si possono ottenere semplicemente da questi col solo scambio di alcuni segni, donde

Teorema XLII. Se dei vertici di un tetraedro 1234 fasciale per es. con (A) si costruiscono i conjugati di 1ª specie nelle involuzioni date dai vertici e dai piani opposti di uno dei tetraedri (B), (C), si ottengono 16 punti, che formano 4 tetraedri fasciali rispetto ad (A).

Teorema XLIII. Il tetraedro fasciale complementare di 1234 rispetto ad (A) dà luogo rispetto a (C) o (B) ai 4 tetraedri (Teor. XLII), rispettivamente complementari a quelli determinati da 1234 rispetto ad (A).

E continuando l'operazione indicata coi nuovi punti ottenuti si ha:

Teorema XLIV. Se di un punto P si trovano i conjugati di 1ª e 2ª specie nelle involuzioni date dai tre tetraedri di una terna per es. (A) (B) (C) e lo stesso si fa coi nuovi punti ottenuti, si ottiene un ciclo V di 96 punti, che si compone di 6 configurazioni K. Esso ha perciò anche 96 piani che contengono 6 a 6 quei 96 punti e che determinano pure un ciclo V.

24. Il piano che congiunge il punto $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ con la retta h $A_1\ B_1\ C_1$ ha per equazione:

$$x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)=0$$

questo deve contenere i conjugati di 1ª specie del punto 1 rispetto alle involuzioni $A_4\ \alpha_4$, $B_1\ \beta_1$, $C_1\gamma_1$. Essi sono, come si sa dal num. precedente i punti 20, 24 e 28 cioè

$$y_1\quad y_2\quad y_3\quad -y_4$$

$(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(\ y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$
$(\ y_1-y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(-y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3+y_4)$.

Ora di 20 trovando i conjugati di 1ª specie nelle stesse involuzioni si ottengono il punto 1 e due altri punti di V cioè:

$(-y_1+y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1-y_2+y_3-y_4)$, $(\ y_1+y_2-y_3-y_4)$, $(y_1+y_2+y_3+y_4)$
$(-y_1+y_2+y_3+y_4)$, $(+y_1-y_2+y_3+y_4)$, $(+y_1+y_2-y_3+y_4)$, $(y_1+y_2+y_3-y_4)$.

Se facciamo lo stesso coi due punti 24 e 28 già trovati, otteniamo dei punti trovati. Questi 6 punti sono in una conica e formano due triangoli omologhi in tre maniere differenti per i punti $A_1\ B_1\ C_1$ come centri e le rette d'intersezione del piano con $\alpha_4\ \beta_1\ \gamma_1$ come assi di omologia. Dunque:

Teorema XLV. I 96 punti di un ciclo V sono situati 6 a 6 in 16 piani O che passano per una retta qualunque h. In ciascuno di questi piani O i 6 punti sono situati in una conica, e formano due triangoli omologici in 3 maniere differenti per i vertici dei tetraedri (A) (B) (C) situati sulla retta h del piano O come centri e l'intersezioni

del piano O con le facce opposte come assi di omologia. I piani O di un ciclo V sono 240. — Analogamente per i 96 piani di V.

Se il punto P è situato in una retta h i 6 punti considerati precedentemente, cadono tutti in h e si ha perciò:

Teorema XLVI. Se il punto P cade in una retta h, i 96 punti del ciclo V corrispondente a quel punto rispetto ad (A) (B) (C) sono situati 6 a 6 sulle 16 rette h; se P è invece un punto di una delle rette h', il ciclo V si riduce ad una configurazione K speciale.

La seconda parte di questo teorema si dimostra pure facilmente.

25. Se del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ costruiamo il piano polare rispetto al tetraedro (A) esso ha per equazione:

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}+\frac{x_4}{y_4}=0$$

e se così facciamo per tutti i punti della configurazione K, a cui dà luogo il punto 1 (vedi n. 23), vediamo che essi formano un' altra configurazione K; che è appunto quella data dal punto conjugato $\frac{1}{y_1}\,\frac{1}{y_2}\,\frac{1}{y_3}\,\frac{1}{y_4}$ di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto al tetraedro (A); di modo che i 16 punti della 1ª e i 16 punti della 2ª configurazione K sono conjugati rispetto ad (A). È chiaro pure che se dei 16 punti della 2ª configurazione si pigliano i piani polari rispetto ad (A), si ottengono i 16 piani della 1ª. Così succede pure rispetto ad un tetraedro qualunque di una qualunque delle 10 sestuple di tetraedri fasciali e si ha:

Teorema XLVII. I piani polari dei 16 punti di una configurazione K rispetto ad uno dei 15 tetraedri fondamentali, costituiscono un'altra configurazione K, i cui 16 punti sono i conjugati dei primi rispetto a quel tetraedro.

Analogamente si trova:

Teorema XLVIII. Se di ciascuno dei punti di una configurazione K, si trovano i 4 punti conjugati di 1ª specie rispetto ad uno qualunque dei 15 tetraedri fondamentali si ottiene un'altra configurazione K.

Se di ciascuno dei 96 punti di un ciclo V, che si riferisce ai tetraedri di una terna per es. (A) (B) (C), si trovano i 4 punti conjugati di 1ª specie rispetto ad un tetraedro della 2ª terna (P') (P'') (P''') si ottengono altri 96 punti, che formano un ciclo V, rispetto alla 1ª terna.

Teorema XLIX. Le 16 rette h e quindi anche i 16 iperboloidi H formano un ciclo V, ridotto ad una configurazione speciale K rispetto ai tetraedri della 1ª e 2ª terna della sestupla fondamentale. Analogamente per le rette h' e per gli iperboloidi H'.

26. Abbiamo trovato il ciclo V del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ determinando i suoi conjugati rispetto alle involuzioni di 1ª e 2ª specie, date dai tre tetraedri (A) (B) (C). Ora se consideriamo anche i conjugati di 1ª e 2ª specie di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tetraedri della 2ª terna (P') (P'') (P'''), e di tutti i punti così ottenuti, si dimostrano facilmente i seguenti teoremi:

Teorema L. Se dei vertici di un tetraedro (Y) fasciale con uno dei tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C) per es. (A) si determinano i conjugati nelle involuzioni di 1ª specie date da uno qualunque dei tetraedri della 2ª terna, si ottengono 8 soli punti, che formano due tetraedri (P) (Q) fasciali con (A). Se dei vertici del tetraedro (Y′) fasciale complementare di (Y) rispetto ad (A) si fa la stessa operazione si ottengono altri 8 punti, che determinano i due tetraedri (P′) (Q′), fasciali complementari di (P) (Q) rispetto ad (A).

Teorema LI. Se di un punto P si determinano i conjugati nelle involuzioni di 1ª e 2ª specie date dalle 9 coppie di spigoli dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale e dai loro vertici e facce opposte, e si fa la stessa operazione coi nuovi punti ottenuti, si ottiene un ciclo Z di 576 punti, composto di 36 configurazioni K, che formano 6 cicli V rispetto ai tre tetraedri della 1ª terna e 6 rispetto a quelli della 2.ª Analogamente per le altre 9 sestuple di tetraedri fasciali. I 23 punti che risultano scambiando le coordinate di un punto qualunque del ciclo Z rispetto ad uno qualunque dei 6 tetraedri della sestupla fondamentale appartengono allo stesso ciclo Z (Vedi Teor. LXXXV, Mem. Iª).

27. Se un punto $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ è situato sulla $S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ è evidente che in essa è inscritto l'intero ciclo Z, a cui dà luogo il punto y_i rispetto alla sestupla fondamentale, perchè i 6 tetraedri di essa sono conjugati rispetto ad S; e siccome ogni tetraedro conjugato alla superficie S dà luogo a una tale sestupla (Teor. XIII) così per ogni tetraedro conjugato otteniamo un tale aggruppamento Z di punti, piani, tangenti e rette di S. Dunque:

Teorema LII. Se un punto o una retta appartiene alla S, il ciclo Z corrispondente rispetto alla sestupla fondamentale è inscritto in S. Analogamente per un piano tangente di S si ottiene un ciclo Z circoscritto ad S. Per ogni tetraedro conjugato ad S si ottiene un tale aggruppamento dei suoi punti, piani tangenti e delle sue rette (Teor. XII).

Se invece il punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ appartiene ad uno degli iperboloidi $S_1 \ldots\ldots S_9$, la configurazione K corrispondente è inscritta in esso, questo si vede sia dalle coordinate dei punti di K, come anche dall'avere K la stessa relazione con tutte le 10 superficie $S\ S_1 \ldots S_9$.

Teorema LIII. Se un punto appartiene ad una delle superficie $S_1 \ldots . S_9$, la configurazione $\mathcal{E}$ a cui dà luogo è inscritta in essa.

Consideriamo invece le superficie E di un gruppo per es. $\mathcal{E}_1\, \mathcal{E}_2\, \mathcal{E}_3\, \mathcal{E}_4$ (n. 12) cioè:

$$\begin{aligned}
-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv \mathcal{E}_1 \\
x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv \mathcal{E}_2 \\
x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \equiv \mathcal{E}_3 \\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 \equiv \mathcal{E}_4
\end{aligned}$$

e sia dato il punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ in $\mathcal{E}_1$; in $\mathcal{E}_1$ sono allora pure situati i punti $(-y_1,\ y_2,$

$- y_3, y_4), y_1, - y_2, - y_3, y_4) (- y_1, - y_2, + y_3, y_4)$ nel 2° invece sono situati i 4 punti

$$\begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} y_2, \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} y_1, \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y_4, \begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix} y_3, \quad \text{nel } 3^\circ \text{ i 4 punti} \quad \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y_4, \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} y_3, \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} y_3, \begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix} y_4$$

e così nel 4° i 4 punti

$$\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix} y_4, \begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix} y_3, \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix} y_2, \begin{smallmatrix}+\\+\\+\\+\end{smallmatrix} y_1$$

della configurazione K, a cui dà luogo $y_1 y_2 y_3 y_4$

Teorema LIV. Se in una delle superficie $\mathcal{E}$ di un gruppo, che si riferisce per es. al tetraedro (A) si considera un punto, il ciclo K corrispondente si scompone in 4 tetraedri fasciali con (A) e inscritti rispettivamente nelle 4 superficie $\mathcal{E}$.

28. Se del punto $y_1 y_2 y_3 y_4$ si costruiscono i piani polari rispetto alle 12 superficie $\mathcal{E}$ di una bisestupla per es. della 1ª (n. 12) si hanno le seguenti equazioni rispetto ad $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_4$

$$\begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} x_1 y_1 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} x_2 y_2 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} x_3 y_3 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} x_4 y_4 = 0$$

rispetto a $\mathcal{E}_5 \mathcal{E}_6 \mathcal{E}_7 \mathcal{E}_8$

$$x_1 \left(\begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_4 \right) + x_2 \left(\begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_4 \right) + x_3 \left(\begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_4 \right)$$

$$+ x_4 \left(\begin{smallmatrix}+\\+\\\pm\end{smallmatrix} y_1 \begin{smallmatrix}+\\\pm\\+\end{smallmatrix} y_2 \begin{smallmatrix}\pm\\+\\+\end{smallmatrix} y_3 \begin{smallmatrix}\mp\\+\\+\end{smallmatrix} y_4 \right) = 0$$

e analogamente per $\mathcal{E}_9 \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{11} \mathcal{E}_{12}$. Ora questi non sono altro che i piani polari dei punti 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 (n. 23) rispetto alla S, dunque sono piani del ciclo V, a cui dà luogo il punto $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ rispetto ai tetraedri della 1ª terna, donde:

Teorema LV. I 96 punti di un ciclo V, che si riferisce ad una terna di tetraedri e i suoi 96 piani sono rispettivamente poli e piani polari non solo rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots S_9$ (Teor. XLIII) ma anche rispetto alle 12 superficie $\mathcal{E}$ della bisestupla che si riferisce a quella terna.

Se di $y_1 y_2 y_3 y_4$ si pigliano anche i piani polari rispetto alle altre 12 superficie $\mathcal{E}$ $\mathcal{E}_{13} \ldots \mathcal{E}_{24}$ si ottengono piani del ciclo Z onde si ricava:

Teorema LVI. I 576 punti di un ciclo Z, che si riferisce ad una sestupla di tetraedri fasciali e i suoi 576 piani sono rispettivamente poli e piani polari rispetto alle 10 superficie $SS_1 \ldots S_9$ e alle 24 superficie $\mathcal{E}$ delle due bisestuple, che si riferiscono alle due terne conjugate di quella sestupla.

Parte II.

Applicazione alle coniche e all'Hexagrammum mysticum.

29. Un piano quantunque taglia la figura dei 6 tetraedri di una sestupla in due terne di quadrilateri. I lati di due quadrilateri di una terna s'incontrano due a due nei lati del terzo in 16 punti h', perchè le facce dei tre tetraedri (A) (B) (C), s'incontrano tre a tre nelle 16 rette h'. Analogamente avviene per i tre quadrilateri della 2ª terna. Abbiamo 9 coppie di vertici opposti, come nello spazio abbiamo 9 coppie di spigoli opposti della sestupla. Le 16 rette h sono incontrate dal piano in 16 punti h, situati 4 a 4 in 12 rette (lati dei quadrilateri della 2ª terna) le quali passano due a due per uno qualunque dei vertici dei tre quadrilateri della 1ª terna formando con i due lati di questi un gruppo armonico. Quelle 12 rette rappresentano evidentemente l'intersezione del piano con i 12 piani Π_{ik}, che passano due a due per gli spigoli di (A) (B) (C), formando con le due facce, che s'incontrano negli spigoli, un gruppo armonico (Teor. IV). Dunque:

Teorema LVII. Un piano qualunque taglia la figura di 6 tetraedri di una sestupla in due terne conjugate di quadrilateri fasciali. I lati di due quadrilateri della 1ª terna s'incontrano due a due nei lati del terzo in 16 punti h', e quelli della 2ª terna in 16 punti h. I vertici opposti dei quadrilateri della 1ª e 2ª terna sono gli stessi. I lati dei quadrilateri di una terna passano due a due rispettivamente per i vertici degli altri tre, formando un gruppo armonico, con i due lati di questi, che passano per quei vertici.

Abbiamo visto che ad una retta h, corrisponde un iperboloide H, che passa per 6 rette h (Teor. XXXV).

Teorema LVIII. I 16 punti h sono situati 6 a 6 in 16 coniche H; analogamente i 16 punti h' sono situati in 16 coniche H'.

Abbiamo visto pure che le superficie $S_1 \ldots . S_9$ passano rispettivamente per due coppie di spigoli di due tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C), che sono anche due coppie di spigoli di due tetraedri della 2ª terna (P') (P'') (P''') (Teor. XX e XXI), dunque:

Teorema LIX. Due coppie di vertici opposti di due quadrilateri di una terna, che determinano anche due coppie di vertici opposti di due quadrilateri della terna conjugata, sono situate sopra una conica che ha il terzo quadrilatero, tanto della 1ª quanto della 2ª terna, come polare, cioè tale, che i vertici opposti di esso sono conjugati rispetto alla conica. Queste coniche sono 9.

La superficie S dà nel piano una conica, che ha i 6 quadrilateri come polari, e siccome abbiamo visto (Teor. XIII) che ogni tetraedro conjugato rispetto ad S dà luogo ad una sestupla di tetraedri fasciali conjugati rispetto ad S, così ogni quadrilatero polare dà luogo rispetto alla S ad una sestupla di quadrilateri fasciali rispetto alla S.

Teorema LX. I 6 quadrilateri delle due terne sono polari rispetto

ad una conica S. Rispetto a questa conica sono conjugati due a due i 16 punti h e i 16 punti h'. — Ogni quadrilatero polare rispetto ad una conica S dà luogo ad una tale sestupla di quadrilateri polari.

30. Questa figura piana è precisamente quella da me studiata nella mia Memoria sull'*Hexagrammum*, ser. 3ª, vol. I. p. 675 e la correlativa di questa a p. 686, la quale non è che un' estensione del mio teorema IV della stessa Memoria.

Considero la 1,ª cioè quella a pag. 675. I tre quadrilateri della 1ª terna sono rappresentati dai punti K^{I}_{14} K^{II}_{15} K^{II}_{15} K^{II}_{34} K^{II}_{13} K^{II}_{35} e K^{I}_{14} K^{I}_{45} K^{I}_{15} K^{I}_{34} K^{I}_{13} K^{I}_{35}, che sono punti di Kirkman e i cui lati sono le rette di Pascal p^{II}_{145} p^{II}_{134} p^{II}_{135} p^{II}_{345} e p^{I}_{145} p^{I}_{134} p^{I}_{135} p^{I}_{345}, che appartengono a due delle mie figure π cioè I e II. Il terzo quadrilatero è dato dai lati del triangolo Δ_{12} di queste due figure cioè 12, 34, 56 (ove 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono i 6 punti fondamentali) e dalla retta g_{12} di Steiner Plücker delle due figure I II. I vertici opposti di questo quadrilatero sono $P_{12\cdot34}$ $Y_{12\cdot34}$, $P_{12\cdot56}$ $Y_{12\cdot56}$, $P_{43\cdot56}$ $Y_{34\cdot56}$. — I 16 punti h' sono rappresentati dai 12 punti $P_{12\cdot36}$, $P_{12\cdot35}$, $P_{12\cdot46}$, $P_{12\cdot45}$, $P_{13.56}$, $P_{23,56}$, $P_{14\cdot56}$ $P_{24\cdot56}$, $P_{25\cdot34}$, $P_{26\cdot34}$, $P_{16\cdot34}$ e dai 4 punti di Steiner G_{123} G_{124} G_{125} G_{126} situati sulla g_{12}. Le coppie di vertici opposti dei tre quadrilateri della 2ª terna, che sono le stesse di quelli dei tre primi, sono K^{I}_{14} K^{I}_{35}, K^{II}_{34} K^{II}_{15}, $P_{12.34}$ $Y_{12\cdot34}$; K^{I}_{34} K^{I}_{15}; K^{II}_{35} K^{II}_{14}, $P_{12\cdot56}$ $Y_{21.56}$; K^{I}_{13} K^{I}_{45}, K^{II}_{13} K^{II}_{45}, $P_{34\cdot56}$ $Y_{34\cdot56}$. — I lati di questi tre quadrilateri sono:

$$v_{12}=\overset{I}{K}_{35}\overset{II}{K}_{34}\overset{V}{Z}_{45.2}\overset{VI}{Z}_{35.2}P_{12.34}\,,\quad v_{12}=\overset{I}{K}_{14}\overset{II}{K}_{15}\overset{III}{Z}_{12.2}\overset{IV}{Z}_{45.2}P_{12.34}\,,\ \text{e le rette}\ m_1=\overset{I}{K}_{14}\overset{II}{K}_{34}Y_{12.34},\ \text{e}\ m_2=\overset{I}{K}_{3}\overset{II}{K}_{15}Y_{12.34}$$

$$v_{12}=\overset{I}{K}_{34}\overset{II}{K}_{35}\overset{IV}{Z}_{45.2}\overset{VI}{Z}_{35.2}P_{12.56}\,,\quad v_{12}=\overset{I}{K}_{15}\overset{II}{K}_{14}\overset{III}{Z}_{12.2}\overset{V}{Z}_{45.2}P_{12.56}\,,\quad \text{»}\quad m_3=\overset{I}{K}_{34}\overset{II}{K}_{14}Y_{12.56},\ \text{e}\ m_4=\overset{I}{K}_{15}\overset{II}{K}_{35}Y_{12.56}$$

$$v_{12}=\overset{I}{K}_{13}\overset{II}{K}_{13}\overset{III}{Z}_{12.2}\overset{VI}{Z}_{35.2}P_{34.56}\,,\quad v_{12}=\overset{I}{K}_{45}\overset{II}{K}_{45}\overset{IV}{Z}_{45.2}\overset{V}{Z}_{45.2}P_{34.56}\,,\quad \text{»}\quad m_5=\overset{I}{K}_{45}\overset{II}{K}_{43}Y_{34.56},\ \text{e}\ m_6=\overset{I}{K}_{13}\overset{II}{K}_{45}Y_{34.56}.$$

I 16 punti h sono dunque rappresentati dai 12 punti T nei quali s'incontrano due a due le 6 rette m e che sono situati due a due sulle 6 rette v_{12} delle due figure π (Teor. XXX della Mem. sull'*Hexagr.*) e i 4 punti $Z^{III}_{12\cdot2}$ $Z^{IV}_{45\cdot2}$ $Z^{V}_{45\cdot2}$ $Z^{VI}_{35\cdot2}$, nei quali s'incontrano tre a tre le 6 rette v_{12}.

Applicando i teoremi precedentemente trovati abbiamo:

Teorema LXI. I 12 punti P del triangolo Δ di due figure π dell'Hexagrammum mysticum (tranne i vertici di esso) e i 4 punti di Steiner della retta di Steiner-Plücker di quelle due figure, sono 6 a 6 situati in 16 coniche H'. I 12 punti T e i 4 punti Z, determinati dalle due figure Π, sono situati pure 6 a 6 in 16 coniche H. Le coniche H ed H' sono 240 in tutto l'Hexagrammum.

Teorema LXII. Le 6 coppie di vertici opposti (punti di Kirkman) dei due quadrilateri di rette di Pascal delle due figure π, le quali s'incontrano rispettivamente due a due nei 12 punti P del triangolo Δ (Teorema XXII sull'*Hexagr.*) sono situate 4 a 4 in 3 coniche.— Queste coniche hanno il quadrilatero formato dal triangolo Δ e dalla retta di Steiner-Plücker, come polare, come anche uno dei tre quadrilateri formati colle rette m e le 6 rette v_{12} delle due

figure π. In tutto l'Hexagrammum queste coniche sono 45. Ci sono altre 6 coniche, che passano rispettivamente per due coppie di punti di Kirkman di uno dei due quadrilateri di rette di Pascal e per due coppie di vertici del terzo quadrilatero, e che hanno il quadrilatero rimanente di rette di Pascal come polare. Queste coniche sono 90.

Teorema LXIII. C'è una conica S immaginaria, rispetto alla quale sono polari i due quadrilateri di rette di Pascal, il quadrilatero formato col triangolo Δ e la retta di Steiner-Plücker, che formano una terna e i tre quadrilateri formati con le 6 rette m e le 6 rette v_{12}, che formano la 2ª terna. Rispetto alla S sono conjugati i 12 punti P e i 4 punti di Steiner delle due figure π con i 12 punti T e i 4 punti Z. Di queste coniche S ce ne sono 15 in tutto l'Hexagrammum. Quali relazioni hanno fra loro e con la conica fondamentale e con le 16 coniche π?

Abbiamo tralasciato di considerare l'intersezione del piano con gli altri 9 tetraedri immaginarî F, che con i 6 reali formano 10 sestuple di tetraedri fasciali. Nella figura data da due figure π abbiamo dunque 10 sestuple di quadrilateri fasciali. Sarebbe interessante di vedere quali relazioni hanno le altre 9 sestuple coll'Hexagrammum, considerando naturalmente le sestuple analoghe in tutte le 15 figure, date dalle combinazioni delle 6 figure π, due a due. Presa una delle 9 sestuple in una tale combinazione, a questa ne corrisponde una ed una sola in ognuna delle altre 14 combinazioni. Queste 15 sestuple, per la sestupla reale formano l'Hexagrammum e per un'altra delle sestuple che cosa formano? Se si considera la fig. correlativa a p. 686, Mem. sull'*Hexagr.*, altre sono le proprietà che si ottengono, essendo essa molto diversa per elementi da quella che abbiamo considerata. Essa si ottiene projettando la figura di 6 tetraedri fasciali in un piano.

Parte III.

Un fascio di superficie di 4° *ordine dotate di* 12 *punti doppî.*

31. Abbiamo visto che le 16 rette h' sono intersezioni delle tre facce di tetraedri (A) (B) (C) e le 16 rette h uniscono tre a tre i vertici di essi, e viceversa le rette h congiungono tre a tre i vertici dei tetraedri della 2ª terna (P′) (P″) (P‴) e le rette h, sono le intersezioni delle facce di essi tre a tre. Onde è chiaro, che tanto le rette h quanto le rette h' sono la curva base e sviluppabile base di un fascio di superficie di 4° ordine e di una schiera di superficie di 4ª classe. — Noi considereremo solamente uno o l'altro fascio, è evidente che analoghe proprietà avranno anche le due schiere di superficie di 4ª classe. Le superficie del fascio per es. quello che ha per base le rette h hanno 12 punti doppî comuni, che sono precisamente i vertici dei tre tetraedri (A) (B) (C), che non appartengono al fascio.

Teorema LXIV. Le 16 rette h o h' sono la curva base e sviluppabile base di un fascio di superficie di 4° ordine e di una schiera di

superficie di 4ª classe. Al fascio delle rette h appartengono i tre tetraedri della 2ª terna (P′) (P″) (P‴). Le superficie del fascio hanno 12 punti doppî comuni, che sono i vertici dei tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C).

32. I piani polari di un punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tre tetraedri di una terna s'incontrano dunque in una retta, così i poli di un piano sono situati in una retta corrispondente al piano. Questo si vede facilmente anche analiticamente. — Il piano polare del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto al tetraedro (A) è

$$\Sigma \frac{x_1}{y_1} = 0$$

rispetto a (B), è

$$\Sigma x_1 \{ 2y_2\, y_3\, y_4 - y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \} = 0$$

rispetto a (C) è invece

$$x_1 \{ 2y_2 y_3 y_4 + y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \} + x_2 \{ 2y_1 y_3 y_4 + y_2 (y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \}$$

$$+ x_3 \{ 2y_1 y_2 y_4 + y_3 (y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2) \} - x_4 \{ 2y_1 y_2 y_3 + y_4 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2) \} = 0.$$

Ora si vede benissimo, che questi tre piani appartengono ad un fascio, cioè:

$$\Sigma x_1 \{ 2y_2\, y_3\, y_4 - y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \} + \lambda \Sigma \frac{x_1}{y_1} = 0.$$

Per il piano del fascio che passa pel punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ stesso, ossia pel piano che unisce il punto con la sua retta corrispondente rispetto alla terna (A) (B) (C), si ha:

$$\lambda = 2y_1\, y_2\, y_3\, y_4 - \tfrac{1}{2} \Sigma y_1^2\, y_2^2 + \tfrac{1}{4} \Sigma y_1^4 .$$

Se invece considero la retta corrispondente al punto $-y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ essa è data dal fascio

$$- x_1 \{ 2y_2 y_3 y_4 - y_1 (-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \} + x_2 \{ 2y_1 y_3 y_4 - y_2 (y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \}$$

$$- x_3 \{ 2y_1 y_2 y_4 - y_3 (y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2 \} + x_4 \{ 2y_1 y_2 y_3 - y_4 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2) \}$$

$$+ \lambda \left(- \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_2} + \frac{x_4}{y_4} \right) = 0.$$

Per il piano, che passa pel punto $-y_1\, y_2 - y_3\, y_4$ si ha:

$$\lambda = 2y_1\, y_2\, y_3\, y_4 - \tfrac{1}{2} \Sigma y_1^2\, y_2^2 + \tfrac{1}{4} \Sigma y_1^4$$

dalla qual cosa si osserva che i piani che congiungono i punti $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ e $-y_1\, y_2 - y_3\, y_4$ con le loro rette corrispondenti rispetto al fascio (A) (B) (C) sono due piani, che hanno le stesse coordinate rispetto ad (A) con due segni cambiati. Se si considera dunque un tetraedro 1234 fasciale con (A) e se ne congiungono i vertici con le 4 rette corrispondenti rispetto ai tetraedri della 1ª terna, si ottengono 4 piani, che formano pure un tetraedro fasciale con (A), vale a dire le 4 rette sono situate in un iperboloide. Questo iperboloide passa pure per le 4 rette corrispondenti ai vertici del tetraedro complementare di 1234 rispetto ad (A) (Teor. IX). Possiamo dire quindi che le rette corrispondenti dei punti di una configurazione K e di un ciclo V rispetto alla terna per es. (A) (B) (C) formano una configurazione K o un ciclo V, e i piani che congiungono i punti di K o di V con quelle rette corrispondenti formano alla lor volta un ciclo K o V. Dunque:

Teorema LXV. I tre piani polari di un punto rispetto ai tetraedri della 1ª terna s'incontrano in una retta R, quelli rispetto alla 2ª in una retta R_1. Analogamente per un piano.

Teorema LXVI. Le rette R che corrispondono ai 4 vertici di un tetraedro fasciale con un tetraedro della 1ª terna per es. (A) sono situate in un iperboloide. — Questo passa per le 4 rette R dei vertici del tetraedro complementare al 1° rispetto ad (A).

Teorema LXVII. Le rette corrispondenti R dei punti di una configurazione K o di un ciclo V, che si riferisce ai tetraedri della 1ª terna, formano una configurazione K o un ciclo V. I piani che le congiungono coi loro punti corrispondenti formano anch'essi un ciclo K o V.

33. I piani polari del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tetraedri della 2ª terna, riferiti ad (A) hanno per equazioni (vedi n. 4 (1) e (2)):

$$\begin{aligned} &(x_1 y_1 - x_3 y_3)\,(y_4^2 - y_2^2) + (x_4 y_4 - x_2 y_2)\,.\,(y_1^2 - y_3^2) = 0 \\ &(x_1 y_1 - x_4 y_4)\,(y_2^2 - y_3^2) + (x_3 y_3 - x_2 y_2)\,(y_4^2 - y_1^2) = 0 \qquad (1) \\ &(x_1 y_1 - x_2 y_2)\,(y_3^2 - y_4^2) + (x_3 y_3 - x_4 y_4)\,(y_1^2 - y_2^2) = 0\,. \end{aligned}$$

Il conjugato di $y_1, y_2, y_3. y_4$ cioè $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$ rispetto al tetraedro (A) soddisfa tutte e tre l'equazioni (1), vale a dire i 3 punti conjugati di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ai tre tetraedri della 1ª terna (A) (B) (C) sono situati sulla retta R_1 di esso, ove s'incontrano cioè i suoi tre piani polari rispetto ai tre tetraedri della 2ª terna. Dunque:

Teorema LXVIII. Mentre la retta R di un punto P è l'intersezione dei tre piani polari di esso rispetto ai tetraedri della 1ª terna, la R contiene i tre conjugati di P rispetto ai tre tetraedri della 2ª terna. Analogamente per un piano Π.

Se del punto y_1, y_2, y_3, y_4 si determina il piano polare rispetto alla

$$S \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

il polo di questo piano rispetto ad un tetraedro della 1ª terna per es. (A) è $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$, ossia è il conjugato di $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ rispetto ad (A), od in altre parole le rette $R\, R_1$ del punto $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ sono le rette $R\, R_1$ del suo piano polare rispetto ad S. Dunque:

Teorema LXIX. Le rette $R\, R_1$ di P rispetto alle due terne conjugate della sestupla fondamentale coincidono con le rette R_1 R del suo piano polare Π rispetto alla S. Le rette $R\, R_1$ sono conjugate rispetto ad S, i 6 punti conjugati di P e i piani conjugati di Π rispetto ai 6 tetraedri della sestupla, sono rispettivamente poli e piani polari rispetto ad S.

34. Se di un punto P qualunque si trovano le 20 rette R corrispondenti rispetto alle 20 terne di tetraedri, che si possono formare con i 15 tetraedri fondamentali, esse contengono tre punti conjugati di P rispetto ai 15 tetraedri, ora siccome uno di questi tetraedri entra in 4 sestuple o per meglio dire in 4 terne, così è chiaro che le 20 rette R s'incontrano 4 a 4 in ciascuno dei 15 punti conjugati di P. Designiamo

i 15 punti colle combinazioni dei numeri I, II, III, IV, V, VI e le 20 rette R mediante i simboli I II III, I II IV ecc. Pel punto I II passano le 4 rette I II III, I II IV, I II V, I II VI, che contengono oltre I II i punti I III, II III; I IV, II IV; I V, II V; I VI; II IV; osservo che i punti I III, I IV, I V, I VI; II III, II IV, II V, II VI formano due tetraedri prospettivi pel centro I II i cui spigoli sono precisamente 12 rette R; il piano di prospettiva, come è facile di vedere, è dato dai 6 punti III IV, III V, IV V, IV VI, V VI, che si ottengono combinando due a due i numeri III IV V VI. Dunque i 15 punti sono situati 6 a 6 in 15 piani, che corrispondono ad essi e che contengono 4 rette R.

La figura così ottenuta è reciproca di sè stessa rispetto ad una superficie di 2° grado A rispetto alla quale le 20 rette sono due a due conjugate. La figura si scompone in 15 coppie di tetraedri prospettivi polari reciproci rispetto ad A. Ma v'ha di più; se consideriamo il pentagono gobbo (Fünfeck) completo

I II, I III, I IV, I V, I VI

i suoi 10 spigoli sono 10 rette R e le sue 10 facce sono 10 piani della figura; se consideriamo invece il pentapiano (Fünfflach) completo formato dai 5 piani rimanenti III IV V VI, II IV V VI, II III IV V, II III IV VI, II III V VI che corrispondono ai vertici del pentagono, i suoi 10 spigoli sono le altre 10 rette R e i suoi 10 vertici sono i 10 punti rimanenti. È chiaro altresì che il pentagono e il pentapiano completi non solamente sono polari reciproci rispetto alla superficie A, ma sono pure di per sè stessi polari rispetto ad A, perchè un vertice del pentapiano per es. II III ove s'incontrano le facce II III IV V, II III IV VI, II III V VI ha il piano polare I IV V VI, che passa per la retta R d'intersezione delle due facce rimanenti III IV V VI, II IV V VI. La figura corrispondente del piano è quella da me trovata nella mia Mem. sull'*Hexagr.*, ser. 3ª, vol. I. p. 653, formata da 10 punti 3 a 3 situati in 10 rette e reciproca di sè stessa rispetto ad una conica π. Dunque:

Teorema LXX. I 15 punti P' conjugati di un punto P rispetto ai 15 tetraedri fondamentali sono situati 3 a 3 in 10 coppie di rette R e 6 a 6 in 15 piani Π', che s'incontrano 3 a 3 nelle stesse rette R. Le 10 coppie di rette R sono le coppie di rette corrispondenti del punto P rispetto alle terne conjugate delle 10 sestuple di tetraedri fondamentali e le rette di esse sono quindi conjugate ordinatamente rispetto alle 10 superficie $S\, S_1 \ldots S_9$.

Teorema LXXI. La figura dei 15 punti P' e piani Π' è reciproca di sè stessa rispetto ad una superficie di 2° ordine A. Con essa si formano 15 coppie di tetraedri prospettivi e polari reciproci rispetto ad A. Essa si scompone in 6 gruppi di un pentagono gobbo e d'un pentapiano completi polari e polari reciproci rispetto ad A.

35. Il tetraedro (A) risguardato come superficie del 4° ordine ha per equazione

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

quella di (B)

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\ (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\ (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)\ (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

ossia

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2\, x_k^2 + 24\, x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

pel tetraedro (C) abbiamo invece:

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 - 24\, x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

onde il fascio di superficie, che ha per base le rette h', riferite ad uno dei tetraedri del fascio, ha per equazione:

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 + (24 + \lambda)\, x_1 x_2 x_3 x_4 = 0\,. \qquad (1)$$

Consideriamo invece il fascio di superficie, che ha per base le rette h e supponiamolo riferito ad uno dei tetraedri dei suoi punti doppî, per es. (A). La superficie del tetraedro (P′) è

$$(x_1 - x_2)\ (x_1 + x_2)\ (x_3 + x_4)\ (x_3 - x_4) = 0$$

ossia

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 - (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0\,.$$

Analogamente per (P″) e (P‴)

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2 - (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) = 0$$

$$x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 - (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) = 0$$

onde il fascio di superficie del 4° ordine è

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda\,(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda + 1)\,(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0\,.$$

Una superficie qualunque (2) non è altro che la polare reciproca della superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado. Infatti l'equazione della superficie dei centri di curvatura di un ellissoide è l'inviluppo delle superficie:

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 + \xi^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c_2 + \xi)^2} - 1 = 0 \ \text{(1)}$$

e la superficie polare reciproca rispetto alla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$$

è l'inviluppo delle superficie

$$\frac{(a^2 + \xi)^2}{a^2} x^2 + \frac{(b^2 + \xi^2)^2}{b^2} y^2 + \frac{(c^2 + \xi)^2}{c^2} z^2 - k^2 = 0$$

che si pone definitivamente sotto la seguente forma omogenea

$$(3) \qquad a'^2 x_2^2 x_3^2 + b'^2 x_1^2 x_3^2 + c'^2 x_1^2 x_2^2 + f'^2 x_1^2 x_4^2 + g'^2 x_2^2 x_4^2 + h'^2 x_3^2 x_4^2 = 0$$

$$a' = a\,(b^2 - c^2)\,, \quad b' = b\,(c^2 - a^2)\,, \quad c' = c\,(a^2 - b^2)$$

$$f' = k\,b\,c \qquad g' = k\,c\,a \qquad h' = k\,a\,b$$

Egli è facile di vedere come l'equazione (3) si possa trasformare nella (2).

In un caso speciale delle superficie focali (Brennflächen) di 3 sistemi di rette di 2° ordine e di 6ª classe dotate di 12 punti doppî si presentò la superficie (2) (non il fascio (2)) a Kummer (2) sotto una forma un po' diversa, egli nota però che essa è la polare reciproca della superficie dei centri di curvatura di un ellissoide, ma siccome non è entrato nella discussione della superficie, così gli sono sfuggite le 16 rette, come sono sfuggite anche a Cayley che in una breve Nota (3) fece vedere come queste superficie di 12 punti doppî si possano dedurre da quelle di 8. Però

(1) Cayley, *On the centrosurface of an ellipsoid.* Transactions of the Cambridge Phil. Society, 1873.

(2) Kummer, *Ueber die alg. Strahlensysteme.* Abh. der Berl. Ak. 1866.

(3) Cayley, *On a quartic Surface.* Quartely Journ. XIV.

le proprietà delle superficie dei centri di curvatura delle superficie di 2° grado furono da molti studiate principalmente da Clebsch, Cayley e Darboux ([1]), ma non ho trovato accennate in nessun sito le 16 rette e quindi tutte le proprietà, che qui sviluppo per le superficie reciproche.

36. Dato un punto di coordinate $y_1 y_2 y_3 y_4$ rispetto ad (A) situato in una superficie del fascio (2) è chiaro, che in essa è inscritto il ciclo V, a cui quel punto appartiene riferito ai tetraedri della 1ª terna; infatti il fascio si pone sotto la forma (2) anche rispetto a (B) e (C). Se congiungiamo i punti di V con le loro rette R corrispondenti si ottengono i piani tangenti alla superficie del 4° ordine del fascio che passa pel punto $y_1 y_2 y_3 y_4$, e questi, come si sa, formano pure un ciclo V. Da ciò si vede subito, che l'equazione in coordinate di piani della superficie non potrà contenere che le 2e o i multipli delle 2e potenze delle variabili. Ciò fa vedere pure, che se un punto o un piano tangente alla superficie è *singolare*, di questi punti o piani ce ne sono 96, almeno che il punto o piano non abbiano una posizione speciale rispetto ai tetraedri dei punti doppî, nel qual caso il ciclo V si riduce ad un ciclo di 16 o di 48 elementi.

Teorema LXXII. Il fascio di superficie di 4° ordine, che ha per base le rette h, riferito ad uno dei tetraedri del fascio della 2ª terna si mette sotto la forma:

$$i, k = 1, 2, 3, 4 \qquad \Sigma x_i - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 + (24 + \lambda) x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \qquad (1)$$

e riferito invece ad un tetraedro dei suoi punti doppî per es. (A) si pone sotto la forma:

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda + 1)(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0 \qquad (2)$$

Teorema LXXIII. Dato un punto P in una superficie del fascio, che ha per base le rette h, in essa è inscritto il ciclo V, a cui dà luogo P rispetto ai tetraedri dei punti doppî del fascio, e i piani tangenti alla superficie nei punti di V formano pure un ciclo V.

Teorema LXXIV. In generale una superficie del fascio è della 12ª classe.

37. Se nell'equazione (1) (Teor. LXXII) si pone

$$\lambda = -24$$

si ottiene la superficie $\qquad \Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (3)$

Cioè nel fascio c'è una superficie nella quale dato un punto, non solo il ciclo V corrispondente ad esso è inscritto nella superficie, ma bensì anche il ciclo V, che si ottiene da V trovando i conjugati di 1ª specie dei suoi punti rispetto a un tetraedro della 2ª terna. Di queste superficie nel fascio, che ha per base le rette h ce ne sono tre. Se nell'equazione (1) (Teor. LXXII) si pone $\lambda = -48$ si ottiene un tetraedro della 2ª terna, onde se ne conclude che le tre superficie (3) del fascio di rette h sono le conjugate armoniche dei tre tetraedri del fascio rispetto agli altri due.

Teorema LXXV. Se di uno dei tre tetraedri del fascio per es. (P') si determina la superficie conjugata armonica rispetto agli altri

([1]) Clebsch, *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Flächen* 2 *Ordnung*. Crelle 64. — Cayley, l. c. — Darboux, Comptes Rendus, LXX.

due riferita a quel tetraedro, essa si mette sotto la forma:

$$\Sigma x_i^4 - 2\Sigma x_i^2 x_k^2 = 0 .$$

Un punto di essa dà luogo ad un ciclo V rispetto ai tetraedri della 1ª terna, inscritto in essa, il quale dà luogo ad un altro ciclo V pure inscritto in essa, trovando i conjugati di 1ª specie di esso rispetto al tetraedro (P') (Teor. LXVIII).

38. Nell'equazione (2) (Teor. LXXII) per ottenere la conjugata armonica del tetraedro $P_{14}\,P'_{14}\;P_{23}\,P'_{23}$ basta porre $\lambda = 1$. Ora supponiamo invece $\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ si ottengono allora le due seguenti superficie immaginarie:

$$x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) = 0 \quad (1)$$

$$x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) = 0. \quad (2)$$

Queste due superficie passano rispettivamente ciascuna per 8 rette h_0 (Teorema XXXVII). Infatti supponiamo che la superficie del fascio passi per uno dei punti E'

$$0,\ -2,\ 1 \pm i\sqrt{3},\ \ -(-1 \pm i\sqrt{3})$$

della retta $h' \equiv P'_{23}\,P'_{34}\,P'_{24}$ (n. 11) allora si trova precisamente

$$\lambda = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}.$$

Se essa passa pel 1° punto E', è evidente che contiene tutte e due le rette h_0, che passano per E' e per i due punti E della retta h corrispondente, perchè esse hanno con la superficie 5 punti in comune. Ma una di queste rette h_0 si appoggia ad altre tre rette h' e quindi ad altre tre rette h_0 che sono ancora sulla superficie. Queste due superficie (1) e (2) rappresentano le superficie doppie dell' involuzione stabilita dai tre tetraedri del fascio e dalle loro conjugate armoniche rispetto agli altri due. Dunque:

Teorema LXXVI. Ci sono nel fascio di superficie di 4° ordine due superficie speciali immaginarie, che passano ciascuna per 8 rette h_0. Riferite ad un tetraedro dei loro punti doppî si mettono sotto la forma:

$$x_1^2\, x_3^2 + x_2^2\, x_4^2 + \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}(x_1^2\, x_2^2 + x_3^2\, x_4^2) + \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}(x_1^2\, x_4^2 + x_2^2\, x_3^2) = 0.$$

Esse rappresentano le superficie doppie dell'involuzione stabilita dai tre tetraedri del fascio e dalle loro conjugate armoniche rispetto agli altri due.

39. Un piano qualunque passante per una retta h incontra una superficie qualunque del fascio, che ha per base le rette h', in una curva del 3° ordine, la quale passa per i tre vertici di (A) (B) (C) situati in h e per i 6 punti d'incontro con le 6 rette h, che formano con la h due gruppi α (Teor. XXX), i quali 6 punti, come si sa, sono situati in una conica. Se il punto che determina la superficie del fascio è in questa conica, la curva del 3° ordine si riduce allora alla conica stessa ed alla retta h, onde l'iperboloide determinato dalle 6 ultime rette h, incontra la superficie

oltre che nelle 6 rette h, anche in una conica. Si deduce adunque, che in generale i 16 iperboloidi H incontrano una superficie del fascio, oltre che in 6 rette h, anche in una conica. I piani delle 16 coniche passano rispettivamente per le rette h corrispondenti ai 16 iperboloidi H. Siccome poi i 16 iperboloidi H formano un ciclo V ridotto (Teor. XLIX), così i 16 piani delle coniche e le coniche stesse formano un ciclo K speciale. Se la superficie del fascio è una delle superficie immaginarie del n. 36, le 16 coniche si riducono allora alle 16 coppie di rette h_0, che si ottengono dalle 8 rette h_0 della superficie. Dunque:

Teorema LXXVII. Uno qualunque dei 16 iperboloidi H, incontra una delle superficie del fascio, che ha per base le rette h, in 6 rette h e in una conica. I piani delle 16 coniche formano una configurazione K speciale. Uno di questi piani incontra ulteriormente la superficie in una retta, che cade sulla retta h, situata in esso. Le 16 coniche si riducono a 16 coppie di rette h_0, ottenute con le 8 rette h_0, situate in una delle superficie immaginarie del teorema precedente, se si tratta di queste superficie.

Si ha pure:

Teorema LXXVIII. Per un punto qualunque di uno spigolo qualunque dei tetraedri della sestupla fondamentale i piani polari rispetto alle superficie dell'uno o dell'altro fascio passano per lo spigolo opposto. Per un punto di una retta h' i piani polari rispetto alle superficie del fascio, che ha per base le rette h, passano per la retta h corrispondente.

40. Riprendo l'equazione (2), n. 36, cioè:

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda + 1)(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0 .$$

E si ponga
$$\mu x_i^2 = x_i' . \qquad (2)$$

Il fascio si trasforma nel fascio di coni seguenti:

$$x_1' x_3' + x_2' x_4' + \lambda (x_1' x_2' + x_3' x_4') - (\lambda + 1)(x_1' x_4' + x_2' x_3') = 0 .$$

Supponendo che il tetraedro di riferimento dello spazio Σ' sia lo stesso tetraedro fondamentale di (Σ) cioè (A), si vede che i coni hanno per vertice comune il punto $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ ossia B_1. Ad un punto P dello spazio Σ, come si vede da (2), corrisponde un solo punto P' di Σ' ma viceversa ad un punto P' di Σ' corrispondono 8 punti, che chiamo *associati armonici* e che formano un ciclo $(P)^8$ (Mem. I[a]), ossia due tetraedri fasciali complementari con (A). Essi sono, come già sappiamo, la completa intersezione di tre superficie di 2° ordine. Questo risulta anche dal fatto, che ai piani di Σ':

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' + a_4 x_4' = 0$$

corrispondono le superficie

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

dello spazio Σ. Queste superficie, come si vede, avendo il tetraedro (A) come conjugato, soddisfano a 6 condizioni e perciò appartengono ad un sistema triplamente infinito (Gebüsch). Reye considerò il caso generale di questa trasformazione, facendo corrispondere ad una superficie di 2° ordine di un sistema triplamente infinito di uno

spazio Σ il piano polare di un punto fisso O, preso rispetto ad essa. Ad un punto di Σ' corrispondono evidentemente 8 punti, intersezione di 3 superficie del sistema Σ, e che Reye chiama associati. Applica questa trasformazione con ammirabile maestria allo studio della superficie di Steiner e di altre superficie interessanti e considerando poi il caso in cui le superficie di 2° grado di Σ abbiano fino a 6 punti comuni, viene a considerare la superficie di Kummer ([1]). Per quanto so, il prof. Reye ha tralasciato il caso, che sto io qui studiando, in cui i risultati della trasformazione generale si modificano alquanto e divengono più semplici ed eleganti.

Si dimostrano con semplicità i seguenti teoremi, che riunisco in un solo.

Teorema LXXIX. Nella trasformazione $\mu x_i^2 = x'_i$ ai piani dello spazio Σ' corrispondono le superficie di 2° grado di Σ che hanno il tetraedro fondamentale (A) come conjugato. Ad una retta di Σ' corrisponde una C^4 di 1ª specie. Ad un punto di Σ' corrispondono in Σ, 8 punti di un ciclo $(P)^8$, che formano cioè 2 tetraedri fasciali complementari col tetraedro fondamentale (A). Ad una retta di Σ', che passa per uno dei vertici di (A), corrisponde una C^4, che si scompone in 4 rette passanti per lo stesso vertice di (A). Ad una retta di Σ', che si appoggia a due spigoli opposti di (A) corrisponde una C^4, che si spezza nei 4 lati di un quadrangolo gobbo, i cui vertici sono posti in quei due spigoli.

Ad una retta di Σ corrisponde in Σ' una conica, che tocca le facce del tetraedro (A). Ad un piano di Σ corrisponde in Σ' una superficie di Steiner che ha per piani doppî le 4 facce di (A) ecc.

Teorema LXXX. Alle superficie del 4° ordine, che passano per le rette h, corrispondono in Σ' i coni di un fascio, che passano per i 4 vertici di (A) e hanno per vertice il vertice B_1 del tetraedro (B). Ad una generatrice di uno di questi coni corrisponde una C^4 situata sulla superficie di 4° ordine corrispondente, che passa per i vertici di (B) e (C). A due fasci projettivi di piani, che generano il cono, corrispondono due fasci di superficie di 2° grado di Σ, che generano la superficie di 4° ordine. Ad un piano tangente al cono corrisponde una superficie di 2° ordine, toccante in una C^4 la superficie del 4° ordine. Alle 8 rette h_0 situate in una delle superficie immaginarie del teorema LXXVI corrispondono 8 coniche in Σ', che toccano le facce di (A) e il cono corrispondente ecc.

Si potrebbero facilmente trasportare i teoremi di Pascal e Biranchon e le proprietà polari del cono a queste superficie del 4° ordine.

41. Se consideriamo invece la trasformazione $\mu x_i = \frac{1}{x'_i}$, le superficie del fascio (1), n. 38, si trasformano in sè medesime. Dunque:

Teorema LXXXI. Mentre un punto percorre una delle superficie del fascio, che ha per base le rette h, i suoi conjugati rispetto ai

([1]) Nuova edizione della Geom. der Lage II Vol. e Vol. 85, Crelle.

tetraedri (A) (B) (C) si muovono pure nella superficie. Se un punto percorre una retta che tocca la superficie, i conjugati rispetto ad (A) (B) (C) si muovono in curve gobbe del 3° ordine, che passano rispettivamente pei vertici di (A) (B) e (C) e toccano la superficie. Alle 8 rette *ho* di una delle superficie immaginarie del teorema LXXIX corrispondono 24 cubiche gobbe situate sulla superficie ecc.

42. Se di un punto $y_1 y_2 y_3 y_4$ si trova la 1ª polare rispetto ad una qualunque delle superficie del fascio (2), n. 40, essa ha per equazione:

$$x_1 y_1 (x_3^2 + \lambda x_2^2 - (\lambda + 1) x_4^2) + x_2 y_2 (x_4^2 + \lambda x_1^2 - (\lambda+1) x_3^2)$$
$$+ x_3 y_3 (x_1^2 + \lambda x_4^2 - (\lambda + 1) x_2^2) + x_4 y_4 (x_2^2 + \lambda x_2^2 - (\lambda+1) x_1^2) = 0 .$$

Ora per uno dei punti doppî della superficie per es. A_1 (1, 0, 0, 0) si riduce la 1ª polare al piano $x_1 = 0$ ed al cono

$$x_3^2 + \lambda x_2^2 - (\lambda + 1) x_4^2 = 0$$

che come si vede passa per le 4 rette h passanti per A_1. Ciò vuol dire che le generatrici del cono toccano la superficie di 4° ordine in A_1 in 4 punti infinitamente vicini, onde le generatrici del cono hanno un contatto di 3° ordine con la superficie; questo succede evidentemente per ogni punto doppio della superficie ossia per ogni vertice dei tre tetraedri (A) (B) (C). I coni di due vertici di (B) e (C) allineati con A_1, devono essere per le proprietà sviluppate due coni corrispondenti nell'omologia involutoria determinata da A_1 e dalla faccia $\alpha_1 \equiv A_2 A_3 A_4$, vale a dire i due coni devono incontrarsi in una conica di α_1 e devono perciò avere lungo la retta h lo stesso piano tangente, che è il piano della conica, secondo la quale l'iperboloide H, corrispondente a quella retta h, incontra la superficie (Teor. LXXVII); quindi i tre coni triplamente tangenti alla superficie nei vertici di (A) (B) (C) di una retta h s'incontrano due a due in una conica, situata sul piano opposto del terzo. Dunque:

Teorema LXXXII. La 1ª polare di un punto doppio per es. di A_1 delle superficie del fascio (h) rispetto alle medesime si riduce ad un cono ed alla faccia opposta α_1. I coni corrispondenti ai tre vertici dei tetraedri (A) (B) (C) di una retta h hanno lo stesso piano tangente 0, che è pure tangente alla superficie lungo la h (Teorema LXXVII), e s'incontrano due a due in una conica situata sulla faccia opposta del terzo.

43. Se del fascio (2) costruiamo la schiera reciproca rispetto ad S è chiaro che si ottiene la schiera (h'). Una qualunque delle superficie di essa è la superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado. In una tale superficie c'è una curva doppia del 24° ordine [1] e pel Teorema LXXIII un punto tanto della superficie quanto della curva doppia dà luogo ad un ciclo V inscritto in essa. I punti singolari della curva doppia devono formare dei cicli V. Le 48 cuspidi di essa (*outcrops*) formano un ciclo V ridotto, e siccome la curva tocca le facce dei 3 tetraedri (A) (B) e (C) in 16 punti O situati rispettivamente sulle rette h', così formano un ciclo speciale V ossia in tal caso una configurazione speciale K (Teor. XLVI). Dunque:

[1] Clebsch e Cayley, l. c.

Teorema LXXXIII. I tre tetraedri, ove si trovano le 12 coniche cuspidali e le 12 rispettive evolute della superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado formano una terna di tetraedri fasciali (A) (B) e (C). Ogni piano passante per una qualunque delle 16 rette h' è tangente alla superficie nel punto O di essa (Teor. LXXXII), ma le 16 rette h' non sono situate sulla superficie. Un punto qualunque o della superficie o della curva doppia dà luogo ad un ciclo V inscritto in essa. I 16 punti di contatto O della curva doppia con le 12 facce dei tetraedri (A) (B) (C) formano quindi una configurazione speciale K. Analogamente per le 48 cuspidi e per gli altri 48 punti d'intersezione della curva con le 12 facce.

INDICE

MEMORIA I.

PARTE I.

PARTE II.

MEMORIA II.

PARTE I.

PARTE II.

PARTE III.

Le Ringicole italiane
ovvero
Ricerche speciologiche e stratigrafiche intorno alle Ringicole raccolte negli strati terziarî d'Italia.

Memoria del prof. G. SEGUENZA

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 4 maggio 1879.

(Con due tavole)

Studiando sin da lungo tempo i resti fossili di molti luoghi e di terreni varî per età e per condizioni, fui più volte colpito da diversi fatti correlativi, che si affacciavano alla mia mente, alloraquando mi faceva ad esaminare le graziose conchigliette offerte dal genere Ringicola, che più o meno abbondantemente trovansi associate alle spoglie di tanti altri molluschi.

Io mi accorgeva sempre meglio che i terreni terziarî somministrano forme numerose di tali piccole ed eleganti conchiglie; ma riconosceva altresì che la delimitazione delle specie è spessissimo assai difficile, sia per la variabilità di talune forme, come per la grande affinità di altre: quindi riesce malagevole l'apprezzamento dei loro caratteri differenziali.

Di fronte a questi fatti ed a queste difficoltà io notava una rimarchevole trascuranza da parte dei paleontologi nello studio delle Ringicole, dimodochè, escluse talune forme assai ben distinte, quali ad es. la *R. Bonellii*, la *R. costata* ecc. tutte le altre che nelle formazioni terziarie d'Italia raccoglievansi, venivano generalmente riferite a due specie, distinte coi nomi di *R. buccinea* e *R. striata*, rapportando alla prima tutte le forme levigate, ed alla seconda invece tutte le altre a superficie trasversalmente lineata. Così furono denominate, così vedonsi tuttavia figurare nelle pubbliche e nelle private collezioni, nei cataloghi generali e locali, nè mancarono scrittori, anco moderni, che vollero insieme associare tutte le forme levigate e striate riguardandole siccome modificazioni della mediterranea *R. auriculata*.

Mosso da tali fatti e premuroso sin da lungo tempo della ricognizione esatta delle Ringicole italiane, mi sono dato a raccogliere sin da oltre un *ventennio* quanti materiali mi venne fatto di procurarmi per mezzo di cambî di acquisti e di ricerche, e già mi trovo in possesso di una discreta collezione di Ringicole dei terreni terziarî di Europa e più specialmente d'Italia, la quale mi ha offerto il destro di fare uno studio comparativo accurato, minuzioso e coscienzioso insieme intorno alle forme diverse offerte dalle diverse regioni italiane non solo, ma più ancora dai varî piani geologici che si estendono da un capo all'altro della penisola e nelle isole adiacenti.

Ma prima che io avessi reso di pubblica ragione i risultamenti di tali mie ricerche, il sig. L. Morlet mandava alla luce una monografia di tal genere, nella quale

sono descritte le specie viventi di tutti i mari e le specie fossili di tutti i luoghi [1]; sembrerebbe quindi a prima giunta che tale lavoro avesse tolto ogni importanza alle mie ricerche, e che perciò dovesse riuscire superflua la loro pubblicazione; ma siccome dalla comparazione di numerosi individui di Ringicole di tanti diversi luoghi e terreni io sono stato sovente indotto a conclusioni ben diverse, e sovente opposte a quelle, alle quali pervenne il Morlet, così i miei studî devono necessariamente interessare il paleontologo dal lato delle ricerche che esse espongono e dei fatti che descrivono; quanto poi alle deduzioni, devono ancora richiamare l' attenzione degli uomini competenti, spettando loro a decidere sulla ammissibilità di talune mie vedute, che non concordano con quelle del sig. Morlet.

D'altronde a me sembra che debbano riuscire di non lieve interesse per la paleontologia italiana, più che le nuove forme da me descritte in questo lavoro, l'indicazione precisa dell' ubicazione e del giacimento di tutte le specie nostrali, per la quale ho messo ogni cura, affinchè riuscisse quanto è possibile esatta.

Il Morlet, per le specie note, ha adottato il sistema di riportare le descrizioni originali degli autori; ma in tal modo si hanno non pochi inconvenienti: la pluralità di forme descrittive, la grande disuguaglianza delle descrizioni, tra le quali talune estremamente insufficienti, non valgono affatto alla distinzione delle specie, potendosi ben adottare per molte di queste, il vario modo di denominare le stesse parti della conchiglia, e via dicendo. Tenendo presenti tutte queste irregolarità, io ho preferito di descrivere tutte le specie e le molte varietà che adotto, dagli esemplari che possiedo, ingegnandomi che esse descrizioni riuscissero accurate ed estese.

Ho voluto illustrare inoltre le nuove specie, e le più rimarchevoli varietà con figure molto ingrandite, affinchè accuratamente ritratte le diverse parti, possano esattamente apprezzarsi i caratteri. Per quanto precise possano essere e delicatamente eseguite le figure annesse alla Monografia del Morlet, per le loro piccole dimensioni non permettono una conoscenza esatta di tutti i caratteri delle specie.

Pria di venire intanto alla enumerazione e descrizione delle varie forme di Ringicole da me riconosciute nei terreni italiani, credo indispensabile esporre taluni risultamenti generali ed alcuni particolari fatti messi in evidenza dalle mie ricerche.

Ed ora mi faccio ad offrire pubblici ringraziamenti ai molti paleontologi italiani, i quali sono stati benevoli nel volermi permettere lo studio delle Ringicole esistenti nelle loro collezioni, comunicandomele appena fattane loro richiesta.

Tra i varî caratteri che contrasegnano il genere *Ringicula* quelli che derivano dalla conformazione della columella sono veramente rimarchevoli: conoscesi difatti che questo gruppo di specie, assai ben delimitato, offre tre distinte pieghe sul margine columellare, di cui due, d'ordinario più valide, sono ravvicinate e disposte alla regione anteriore estrema della columella, la terza più o meno allontanata da questa, affetta la regione posteriore dell'apertura.

Oggi conoscesi che talune Ringicole sono fornite d'una quarta piega, che

[1] Recentemente il sig. Morlet in un supplemento alla sua monografia ha fatto importantissime aggiunzioni: V. *Supplement à la Monographie du genre Ringicula.*

sviluppasi sempre interposta tra la posteriore e le due anteriori. Essa costituisce un carattere di molto rilievo, ma insieme molto variabile, essendochè in talune specie mostrasi costante, in certe altre invece varia immensamente, mostrandosi distintissima e prominente in taluni individui, appena discernibile e sino a mancare del tutto in altri; nel maggior numero delle specie poi essa manca completamente.

Fu primo il Pecchioli, per quanto mi sappia, che richiamò l' attenzione sulla quarta piega esistente nella *R. buccinea*, ne notò la grande variabilità, ed invece sostenne la costanza di tale carattere nella sua pretesa specie, la *R. elegans* (1).

Recentemente il Morlet nella sua Monografia, sulla presenza della quarta piega, fondava la sua *R. quadriplicata,* la quale, per la incostanza dei suoi caratteri, non è ammissibile.

In generale poi questo carattere venne dagli autori trascurato; così l'Hoernes non lo accenna per la specie comune del bacino di Vienna, erroneamente riguardata da lui siccome *R. buccinea*, il Mayer ed il Morlet lo trascurano nel descrivere la *R. gigantea* Doderlein, il Monterosato e lo stesso Morlet non l'hanno riconosciuto nella *R. conformis* (2).

Dallo esame che io ho fatto risulta invece che la nuova *R. crassa*, fornita della quarta piega, l'offre molto interna, ma pure costante e molto sviluppata.

Nella *R. conformis,* quantunque non sia stata indicata, io ve l'ho trovato costantissima in tutti gli esemplari da me esaminati sì viventi che fossili, e nella figura data dal Morlet v'ha qualche cosa che l'accenna, quantunque niente la ricordi nella descrizione.

La presenza della quarta piega nella *R. buccinea* è invece carattere di estrema variabilità; dimodochè essa piega si offre più o meno distinta o prominente, ovvero appena visibile o mancante del tutto, e tanta diversità ha luogo sin dallo stato giovanile della conchiglia. Nè tali variazioni concordano col variare in una maniera qualunque degli altri caratteri, che anzi ogni maniera di presentarsi della piega si associa alle numerose modificazioni che subisce la conchiglia, dimodochè la sua presenza o la sua assenza, siccome le sue modalità diverse si constatano nelle forme allungate e nelle brevi, come nelle globose; nelle varietà liscie ed in quelle ornate di cingoli spirali, siccome nelle altre in cui sono distinte delle costelle longitudinali; in quelle coll'apertura ristretta pei margini molto ingrossati, e nelle altre meno solide, nei giovani e negli adulti; insomma la presenza, l'assenza o il vario sviluppo della quarta piega non si connettono con verun carattere in particolare, ed invece si associano con tutti; il quale fatto è tra i più rimarchevoli per associare insieme le diverse forme, sovente riguardate siccome distinte specie. Così la *R. quadriplicata,* la *R. marginata* Morlet (non Deshayes), la *R. intermedia* Foresti, la *R. elegans* Pecchioli, elevate tutte al rango di specie dal Morlet ci offrono nei numerosi esemplari tutti i gradi di transizione, presentandoci inoltre variabili tutti i caratteri: non sono perciò che modificazioni della notissima *R. buccinea.*

(1) V. Pecchioli, *Descrizione di alcuni nuovi fossili delle argille subappennine toscane* pag. 11, Tav. V fig. 32, 33, 34.

(2) Il Morlet ha riconosciuto il quarto dente della *R. conformis* nel suo *Supplément à la Monographie du genre Ringicula.*

Pari variabilità della quarta piega ci viene offerta dalla *R. Hoernesii,* nella quale perviene anco sino a scomparire, mentre in taluni individui è molto sviluppata sino quasi ad uguagliare la piega posteriore.

Nella *R. gigantea* la quarta piega è sempre poco manifesta.

Nelle altre specie da me studiate, che sono in molto maggior numero, la quarta piega non esiste, nè vi si scorge indizio di sorta, se non in qualche individuo veramente rarissimo, il quale dimostra evidentemente un'anomalia, essendochè la quarta piega, avvicinatissima alla posteriore, mostrasi chiarissimamente costituita dallo sdoppiamento di quest'ultima.

Dai fatti qui enumerati a me sembra doversi conchiudere che il carattere della quarta piega è un carattere rilevante, il quale, costante in certe specie e variabile in altre, acquista pure l'importanza della distinzione specifica non solo, ma inoltre esso contrassegna un gruppo di specie, distinguendolo da un gruppo più grande molto in cui tal carattere manca.

Non è meno rimarchevole il caso opposto, in cui anzichè aggiungersi una quarta piega, alle tre che ordinariamente caratterizzano la maggior parte delle specie conosciute, se ne sottrae invece una che è la posteriore, in modo che le sole due anteriori restano a distinguere la sezione del genere cui quelle specie si appartengono.

Al rimarchevole carattere del completo difetto della piega o dente posteriore fu richiamata la mia attenzione da una specie che recentemente ho scoperto nel plioceno di Calabria, la *R. calabro-sicula,* la quale è distintissima per questo rilevante carattere. Tale distintivo la ravvicina molto alla *R. leptocheila* del Mediterraneo, nella quale sovente si osserva un lievissimo indizio della piega posteriore, che è parimenti scomparsa, pel quale carattere tale specie costituisce un anello intermedio di congiunzione tra le specie a tre pieghe e quelle a due.

Così a mio giudizio, da quanto ho detto, il numero delle pieghe columellari forma il distintivo più rimarchevole per dividere in sezioni le specie del genere *Ringicula* (¹).

Un altro carattere di molto rilievo, che a me pare essere stato pur troppo trascurato o malamente apprezzato nelle Ringicole, è quello della scultura; il quale, come ben si conosce, è assai importante e valevolissimo nella distinzione specifica dei resti di molluschi.

V'hanno Ringicole a superficie perfettamente levigata, e ve ne ha a superficie ornata di strie impresse trasversali o di solchi spirali regolarmente disposti.

Dallo esame di gran numero di Ringicole risulta per me evidente, che le forme le quali presentano la superficie levigata non offrono gradazioni o transizioni verso quelle altre che hanno una scultura costituita da strie impresse o da solchi spirali distribuite con regolarità; anzi queste e quelle formano dei gruppi di specie perfettamente distinte e che possono riconoscersi a prima giunta dalla presenza o dal difetto di solchi spirali.

Da quanto io conosco riesce quindi sempre inammissibile l'associazione in unica

(¹) Questo lavoro fu presentato all'Accademia nel marzo del 1879, ed il sig. L. Morlet proponeva il numero delle pieghe come carattere per dividere il genere in sezioni al 1880 nel suo *Supplément à la Monographie du genre Ringicula.*

specie di forme levigate con forme che abbiano solchi spirali. Così la riunione della *R. buccinea* colla *R. auriculata* proposta da taluni scrittori, ovvero colla *R. exilis* voluta da altri, o anche colla *R. Gaudryana*, come recentissimamente proponevano i sig.ⁱ De Stefani e Pantanelli (¹), sono associazioni che non possono affatto sostenersi, essendochè queste diverse forme oltrechè per le strie spirali impresse, si distinguono dalla *R. buccinea*, per molti altri caratteri, nè offrono transizioni di sorta verso quella specie.

Un altro fatto rimarchevole constatato in varie specie levigate si è quello, che mentre da un canto io non ho potuto riscontrare transizioni verso le forme spiralmente solcate, ho riconosciuto che esse passano gradatamente verso forme che offrono delle costole o dei cingoli spirali, i quali si presentano distribuiti con irregolarità. Così la *R. buccinea* e la sua Var. *cincta* For. che si collegano colla *R. quadriplicata* del Morlet, la *R. Grateloupii* che presenta delle varietà cingolate e così via.

Nella scultura delle Ringicole oltre le linee spirali notansi delle linee, delle costole, delle pieghe longitudinali, intorno alle quali fa d'uopo che io esponga talune osservazioni.

E primieramente le linee di accrescimento della conchiglia sono impercettibili ordinariamente nelle specie a superficie levigata, in certe specie sono esilissime e rilevate, in certe altre sono più appariscenti e grossolane, ma sempre irregolari, esse, non costituiscono un carattere specifico, ma invece variando anco col variare della conchiglia possono talvolta distinguere talune varietà come ad esempio la var. *messanensis* della *R. elongata,* la var. *crispata* della *R. auriculata.*

Le pieghe longitudinali e le costole sono poi dei caratteri molto rilevanti che distinguono un gruppo di Ringicole, che per tale scultura sembra che proprio si allontanino dalle altre, così la *R. costata,* la *R. cancellarioides,* la *R. plicatula* Mayer.

Ma pure molte Ringicole offrono certe costole longitudinali esilissime, le quali appena sporgono dalla superficie, anzi talvolta non sono che apparenze di costole. Questo carattere si comporta ben diversamente da quello delle vere costole: infatti esso incontrasi molto comunemente sia nelle specie levigate, come in quelle fornite di solchi spirali, ma più nelle prime che nelle seconde, e manifestasi molto variabile nella medesima specie, in modo che caratterizza solo talune varietà: non può quindi ritenersi come carattere specifico; difatti tali costicine offrono d'ordinario ogni maniera di gradazioni in tutte quelle specie che ne vanno fornite, sino a scomparire del tutto senza che la conchiglia offra altre apprezzabili modificazioni. Così manifestansi nella *R. buccinea,* nella *R. calabra,* nella *R. conformis,* nella *R. Tournoueri* ecc. ecc.

Dando poi un rapido sguardo agli altri caratteri delle Ringicole, dagli studî fatti sulle specie italiane e sopra non poche d'altre regioni europee parmi essere in dritto di conchiudere: Che il numero degli avvolgimenti, variabile da quattro a sette, è costante per ciascuna specie; la lunghezza dell'ultimo giro di spira, in rapporto alla lunghezza totale della conchiglia, è carattere anch'esso costante o pochissimo variabile in ogni specie; non così la forma più o meno allungata della conchiglia, variabile molto, in certe specie sopratutto, come nella *R. buccinea,* nella *R. auriculata,* nella

(¹) *I fossili di Siena* (Bull. della Soc. malac. italiana)

R. Calabro-sicula. Sono poi caratteri molto valevoli nelle distinzioni specifiche: la forma dell'apertura, la conformazione del labbro ed il suo inspessimento interno, come l'andamento del margine esterno; la conformazione, la posizione e l'andamento delle pieghe columellari; la forma del margine columellare e della callosità che lo investe, con tutti i caratteri di estensione, di conformazione e di spessore che la distinguono e che trovo abbastanza costanti in ciascuna specie.

Passando ora a dire qualche cosa intorno a talune specie in particolare, noterò dapprima, che talune forme specifiche sono tra loro molto affini, ed intanto per la costanza dei loro caratteri, pel difetto di forme intermedie si mantengono perfettamente distinte; così la *R. buccinea* e la *R. calabra;* la *R. auriculata* e la *R. placentina,* la *R. gigantea* e la *R. Hoernesii.*

Osserverò poi come talune specie sono variabili molto, e fanno un contrasto rimarchevolissimo a fronte di talune altre più rare, le quali si conservano costanti nei loro caratteri, ed esattamente uniformi, sempre identiche a se stesse. Così la *R. buccinea* varia moltissimo in grandezza e poi nei diversi caratteri tanto, che diede occasione alla proposta di varie specie, che uno studio accurato non può fare a meno di ricondurre ad una sola.

La *R. auriculata*, riproduce direi quasi le numerose variazioni della *R. buccinea.* Sono parimenti variabilissime la *R. Brocchii,* la *R. Gaudryana,* la *R. Grateloupii,* la *R. Bonellii,* la *R. Calabro-sicula* ecc. ecc.

Invece è veramente rimarchevole la costante uniformità della *R. Calabra*, la quale non varia in grandezza e modificasi lievissimamente nella forma: difatti con costantissimi caratteri presentasi nel tortoniano del Piemonte, del Modenese, delle Calabrie. Così abbastanza costante presentasi la *R. conformis*, come la *R. marginata* ed altre.

Vengo ora a dire qualche rilevante particolarità, che risulta dai miei studî, intorno a talune delle specie italiane.

La *R. gigantea,* la più grande specie del genere, fu descritta dal Mayer e dal Morlet colla superficie levigata; ed invece essa offre ad una semplice lente d'ingrandimento una scultura specialissima formata di strie impresse spirali. Tale carattere da se solo è sufficiente a distinguerla benissimo dalla *R. buccinea* alla quale l'associò il Coppi.

L'Hoernes rapportò alla *R. buccinea* una comune forma, che giace nel bacino di Vienna, la quale differisce moltissimo da tale specie ed invece è prossima alla *R. gigantea*, specialmente per una analoga scultura. Io la dissi *R. Hoernesii.*

La *R. buccinea*, come dimostrerò a suo luogo, ammette numerose varietà, tra le quali bisogna annoverare la *R. elegans* Pecch., la *R. intermedia* Foresti, che il Morlet elevò al rango di specie, la *R. quadriplicata* Morlet, la *R. marginata* Morlet (non Deshayes). Essa è dunque da ritenersi tra le specie più variabili.

La *R. marginata* Deshayes è stata generalmente sconosciuta, dappoichè in tutte le collezioni vi si rapportano delle forme che non è possibile di disgiungere dalla *R. buccinea.* Una di tali forme è quella che il Morlet ha rappresentato nell'atlante della sua monografia, riguardandola siccome la specie descritta dal Deshayes e riferendovi la descrizione originale, la quale si affà malamente alla conchiglia che vi rapporta. A rendere più evidente quanto sembrami abbastanza chiaro, mi faccio a

riferire le osservazioni dello stesso Deshayes (in Lamarck. *Hist. nat. des anim. sans vert.* 3e édition, tom. III, pag. 392). « Coquille ovale, ventrue; poche lisse, à spire « courte et pointue, dont les tours convexes sont réunis par une suture subca- « naliculée. Le bord gauche est très large et très-épais, il recouvre toute la face « inférieure, et ce qui distingue très-facilement cette éspèce, c'est une callocitè longi- « tudinale, placée sur la columelle, au-devant de l'ouverture dont elle cache en partie « l'angle postérieur; le bord droit est très-épais et garni à l'intérieur d'un bour- « relet saillant; la columelle a trois plis saillants et aigus, et d'aprés cela on doit « juger que l'ouverture est très-étroite et grimaçante ». Or tutti questi caratteri mancano nella *R. marginata* figurata dal Morlet, ed invece si riscontrano colla massima precisione nella Ringicola che ho rappresentato nella tav. I, fig. 5, 5*a*, 5*b*, e quantunque il Deshayes non abbia figurato la sua specie, pure io non dubito punto che quella da me illustrata sia proprio quella dal Deshayes descritta, l'una e l'altra d'altronde sono state raccolte nel plioceno dell'Astigiano.

Quanto alla *R. Grateloupii* io ho potuto riconoscerla al paragone con alcuni esemplari del mioceno di Bordeaux, aiutandomi alquanto la figura data dal Morlet, essendochè la descrizione del Grateloup, testualmente riportata dal Morlet stesso, conviene a tutte quasi le Ringicole che si conoscono o che si scopriranno.

Nelle specie descritte in questo lavoro ve ne ha sette che io credo di poter presentare come nuove, oltre le tre che erano state da me precedentemente descritte. Inoltre io propongo un considerevole numero di varietà più o meno rimarchevoli e distinte.

Quanto poi alla distribuzione stratigrafica delle specie, desunta dai materiali da me raccolti si hanno le seguenti conclusioni:

1. Le Ringicole, come gli altri generi di molluschi, presentano delle specie caratteristiche dei varî piani geologici, e delle specie che sono comuni a due o più piani.
2. Tutte le specie italiane sono terziarie.
3. Il piano acquitaniano ha per specie caratteristiche le seguenti:

   Ringicula taurinensis n. sp.
   » *Baylei* Morlet.
   » *Mariae* n. sp.
   » *Bonellii* Deshayes.
4. Il piano langhiano mi ha offerto dei frammenti indeterminabili.
5. Il piano elveziano mi presentò soltanto la *Ringicula doliiformis* n. sp. come specie caratteristica.
6. Il Tortoniano è caratterizzato dalle seguenti specie:

   Ringicula gigantea Doderl.
   » *Hoernesii* n. sp.
   » *Crossei* Morlet.
   » *elongata* Morlet.
   » *costata* Eichwald.
   » *cancellarioides* n. sp.
7. Il Plioceno antico mi ha offerto come caratteristiche le specie seguenti:

   Ringicula crassa n. sp.

Ringicula marginata Desh.
» *placentina* n. sp.
» *calabro-sicula* Seg.

8. Il Plioceno recente ed il Quaternario non presentano delle specie che sieno loro esclusive.

9. Sono comuni all'Elveziano ed al Tortoniano le
Ringicula Grateloupii D'Orb.
» *calabra* Seg.

10. La *Ringicula Tournoueri* Morlet passa dall'Acquitaniano al Tortoniano.

11. La *Ringicula buccinea* Brocchi, par che si rinviene nell'Acquitaniano e duri sino al Plioceno recente.

12. Fanno passaggio dal Tortoniano al Plioceno le
Ringicula Gaudryana Morlet.
» *Brocchii* Seg.
» *exilis* Eichwald.

13. La *R. africana* Morlet trovasi nel Plioceno antico e nel Plioceno recente.

14. La *Ringicula conformis* Monts. la *Ringicula auriculata* Menard e la *Ringicula leptocheila* Brugnone dal Plioceno antico passano sino ai mari attuali e vivono nel Mediterraneo.

Ordinamento delle Ringicole italiane fatto con metodo dicotomico.

Ringicole col margine columellare, che porta quattro pieghe. — I. Sezione. *A*.
Ringicole con tre pieghe alla columella. — II. Sezione. *B*.
Ringicole con due sole pieghe columellari. — III. Sezione. *C*.

I. Sezione.

A
Conchiglia a superficie levigata, ovvero con cingoli spirali, od esili costelle longitudinali appena discernibili 1
Conchiglia a superficie ornata da strie impresse o da solchi spirali regolari . 2

1
Apertura obliqua e molto stretta, labbro crassissimo, callosità columellare larghissima. *R. crassa* n. sp.
Forma gracile, spira acuta, apertura larga, callosità columellare spessa e stretta. *R. conformis* Monter.

2
Spira molto breve, ultimo avvolgimento grandissimo, tre quarti della totale lunghezza. *R. gigantea* Doderlein.
Ultimo avvolgimento pressochè due terzi della totale lunghezza. *R. Hoernesii* n. sp.

II. Sezione.

B
Conchiglia a superficie levigata, ovvero fornita di cingoli spirali 3
Conchiglia a superficie ornata da linee impresse o da solchi spirali regolari . 8

1	Ultimo avvolgimento grande, non minore di due terzi della totale lunghezza della conchiglia . . . . 4 Ultimo avvolgimento poco più lungo della metà della totale lunghezza della conchiglia 7
4	Apertura stretta per lo inspessimento del labbro e della callosità columellare . . 5 Apertura allargata specialmente alla regione anteriore 6
5	Pieghe bene sviluppate ed apparenti, ultimo avvolgimento globoso. *R. buccinea* Brocchi sp. Pieghe posteriori occultate dalla grande callosità columellare, ultimo avvolgimento ovato. *R. marginata* Deshayes.
6	Labbro regolarmente arcuato, ultimo avvolgimento tre quarti della lunghezza totale della conchiglia. *R. doliiformis* n. sp. Labbro quasi retto, ultimo avvolgimento circa il doppio della spirale. *R. Grateloupii* D'Orbigny.
7	Avvolgimenti ben convessi, ultimo globoso. *R. calabra* Seguenza. Avvolgimenti poco convessi, ultimo poco rigonfio. *R. africana* Morlet.
8	Conchiglia sfornita di vere costole longitudinali . . . . 9 Conchiglia con vere pieghe o costole longitudinali 20
9	Labbro semplicemente marginato . . . . 10 Labbro internamente crenato 19
10	Apertura anteriormente dilatata . . . . 11 Apertura non dilatata alla regione anteriore 15
11	Quattro avvolgimenti e mezzo al massimo . . . . 12 Maggior numero di avvolgimenti 13
12	Avvolgimenti convessi, spira prominente acuta, strie spirali ben distinte, callosità columellare stretta e spessa. *R. auriculata* Ménard. Avvolgimenti poco convessi, spira breve, ultimo avvolgimento grandissimo, globoso, tre quarti della totale lunghezza della conchiglia, strie esilissime. *R. placentina* n. sp.
13	Avvolgimenti fortemente convessi . . . . 14 Avvolgimenti quasi appianati, l'ultimo raggiunge i tre quinti della totale lunghezza della conchiglia, spira acuta. *R. Mariae* n. sp.
14	Spira breve, un terzo della totale lunghezza della conchiglia, ultimo avvolgimento grande globoso, callosità columellare sottile e larga. *R. taurinensis* n. sp. Spira lunga, ultimo avvolgimento piccolo globoso, callo columellare stretto. *R. Tournoueri* Morlet.
15	Ultimo avvolgimento ben arrotondato alla regione anteriore . . . . 16 Ultimo avvolgimento che si restringe anteriormente 17

16
- Apertura allungata col labbro protratto ed arcuato anteriormente 18
- Apertura larga di forma pressochè semicircolare pel labbro arcuato fortemente; avvolgimenti poco convessi. *R. Brocchii* Seguenza.

17
- Apertura quasi ugualmente larga anteriormente e posteriormente, spira circa un terzo della totale lunghezza della conchiglia. *R. Gaudryana* Morlet.
- Apertura allargata e protratta anteriormente, spira due quinti della totale lunghezza della conchiglia. *R. elongata* Morlet.

18
- Ultimo avvolgimento globoso, labbro molto prominente alla regione anteriore, callosità columellare elargata. *R. Baylei* Morlet.
- Ultimo avvolgimento meno rigonfio, labbro meno protratto, callosità ristretta. *R. exilis* Eichwald.

19
- Spira prominente, solchi spirali semplici, labbro e callosità columellare mediocremente inspessite. *R. Crossei* Morlet.
- Spira brevissima, solchi spirali a finissimo zig-zag, labbro e callosità columellare crassissimi con punteggiature impresse. *R. Bonellii* Deshayes.

20
- Costole longitudinali numerose, ultimo avvolgimento tre quinti della totale lunghezza della conchiglia. *R. costata* Eichwald.
- Costole longitudinali in minor numero e più grosse, l'ultimo avvolgimento uguaglia circa la metà della totale lunghezza della conchiglia. *R. cancellarioides* n. sp.

III. Sezione.

C
- Avvolgimenti spiralmente striato-puntati; apertura molto larga pel labbro fortemente arcuato; lievissimi indizî della terza piega. *R. leptocheila* Brugnone.
- Avvolgimenti lisci; labbro poco arcuato. *R. calabro-sicula.* Seguenza.

Opere varie in cui parlasi delle Ringicole italiane.

1811. Ménard de la Groye, Annales du Muséum. Vol. XVII, pag. 331.

1814. G. B. Brocchi, *Conchiologia fossile subapennina d'Italia.* Tom. 2, pag. 319, n. 23, tav. 4, fig. 9; pag. 642, tav. 15, fig. 10.

1815. Lamarck, *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres.*

1830. G. P. Deshayes, *Encyclop. méthodique.* Vol. II.

1831. Bronn, *Italiens tertiaere Gebilde.*

1836. R. A. Philippi, *Enumeratio mollusc. Siciliae.*

1838. G. P. Deshayes, *Traité élémentaire de Conchyliologie, avec l'application de cette science à la géognosie.*

1838. G. P. Deshayes in Lamarck, *Histoire natur. des anim. sans vert.* Vol. VIII, 2ª edizione.

1840. G. Michelotti, *Rivista di alcune specie fossili della famiglia dei gasteropodi.*

1841. P. Calcara, *Memoria sopra alcune conchiglie fossili rinvenute nella contrada d'Altavilla.*

1842. E. Sismonda, *Synopsis methodica animalium invertebratorum Pedemontii fossilium.*

1844. R. A. Philippi, *Enumerat. moll. Siciliae.* Vol. II.

1845. A. Aradas, *Prospetto della storia della Zoologia in Sicilia del secolo XIX.*

1847. A. Aradas, *Descrizione delle conchiglie fossili di Gravitelli presso Messina.*

1847. G. Michelotti, *Description des fossiles des terrains miocènes de l'Italie septentrionale.*
1847. E. Sismonda, *Synopsis methodica inv. Pedem. foss.* 2ª edizione.
1848. Bronn, *Index palaeontologicus.*
1852. A. D'Orbigny, *Prodrome de paléontologie universelle.* Tom. III.
1854. Rayneval, Van-den-Heck et Ponzi, *Catalogo dei fossili di Monte Mario.*
1855. F. J. Pictet, *Traité de paléontologie.* Tom. III.
1859. C. Lyell, *On the structure of lavas wich have consolidated on steep slopes; with remarks on the mode of origin of Mount Etna and on the theory of craters of elevation.*
1862. P. Doderlein, *Cenni geologici intorno la giacitura dei terreni miocenici superiori dell'Italia centrale.*
1862. G. Seguenza, *Sulla formazione miocenica di Sicilia. Ricerche e considerazioni.*
1862. G. Seguenza, *Notizie succinte intorno alla costituzione geologica dei terreni terziari del distretto di Messina.*
1864. V. Pecchioli, *Descrizione di alcuni nuovi fossili delle argille subapennine toscane.*
1868. A. Manzoni, *Saggio di conchiologia fossile subapennina. Fauna delle sabbie gialle.*
1868. P. Mantovani, *Sulla distribuzione generale della fauna fossile nel mare pliocenico paragonata con l'analisi dei sedimenti lasciati da quel mare. Studi geologici sulla campagna romana.*
1868. L. Foresti, *Catalogo dei molluschi fossili pliocenici delle colline bolognesi.*
1868. Weinkauff, *Die Conch. Mittelmeeres.* Vol. II.
1869. F. Coppi, *Catalogo dei fossili miocenici e pliocenici del Modenese.*
1869. A. Manzoni, *Della fauna marina di due lembi miocenici dell'alta Italia. Studi.*
1870. J. G. Jeffreys, *Mediterranean mollusca.*
1871. F. L. Appellius, *Catalogo delle conchiglie fossili del Livornese desunto dalle collezioni e dai manoscritti del defunto G. B. Caterini.*
1871. A. Conti, *Il Monte Mario ed i suoi fossili subapennini raccolti e descritti.*
1872. Msc. Monterosato, *Notizie intorno alle conch. foss. di Monte Pellegrino e Ficarazzi.*
1873. G. Seguenza, *Brevissimi cenni intorno la serie terziaria della Provincia di Messina.*
1873. G. Cocconi, *Enumerazione sistematica dei molluschi miocenici e pliocenici della provincia di Parma e di Piacenza.*
1873-78. G. Seguenza, *Studi stratigrafici sulla formazione pliocenica dell'Italia meridionale* (Bollettino del r. Comitato geologico d'Italia).
1874. C. Destefani, *Fossili pliocenici dei dintorni di S. Miniato (Toscana). Molluschi bivalvi ed univalvi. Studi.*
1874. F. Coppi, *Catalogo dei fossili mio-pliocenici modenesi.*
1874. O. G. Costa, *Osservazioni sulle conchiglie fossili di S. Miniato in Toscana e catalogo delle medesime.*
1875. A. Crespellani, *Nota geologica sui terreni e sui fossili del Savignanese* (Atti della Società).
1875. Mse. Monterosato, *Nuova rivista delle conchiglie mediterranee.*
1875. Th. Fuchs, *Die Gliederung der Tertiarbildungen am Nordhange der Apenninen von Ancona bis Bologna.*
1875. Th. Fuchs, *I membri delle formazioni terziarie nel versante settentrionale dell'Apennino fra Ancona e Bologna* (Boll. del r. Comitato geologico d'Italia).
1875. Th. Fuchs und Al. Bittner, *Die Pliocaenbildungen von Syrakus und Lentini.*
1876. G. Brugnone, *Miscellanea malacologica.*
1876. F. Coppi, *Frammenti di Paleontologia modenese* (Boll. del r. Comitato geologico).
1876. F. Sordelli, *La fauna marina di Cassina Rizzardi* (Atti della Società italiana di S. N. Vol. XVIII, fasc. 3° e 4°).
1876. L. Foresti, *Cenni geologici e paleontologici sul plioceno antico di Castrocaro.*
1877. D. Pantanelli, Regia Accademia dei fisiocritici. Direzione del Museo di geologia e mineralogia. Rapporto annuale.
1877. D. Pantanelli, *Dei terreni terziari intorno a Siena.*
1877. C. Destefani, *Molluschi continentali fino ad ora notati in Italia nei terreni pliocenici ed ordinamento di questi ultimi.*

1877. G. Seguenza, *Brevissimi cenni intorno le formaz. terziarie della Provincia di Reggio (Calabria).*
1877. C. Destefani, *Sulle tracce attribuite all'uomo pliocenico nel Senese.*
1877. Mse. Monterosato, *Catalogo delle conchiglie fossili di Monte Pellegrino e Ficarazzi* (Boll. del r. Comitato geologico).
1877. A. Issel, *Appunti paleontologici 1. Fossili delle marne di Genova.*
1877. G. Capellini, *Sulle marne glauconifere dei dintorni di Bologna* (Rendiconto dell'Accademia delle scienze di Bologna).
1877. G. Capellini, *Sulle marne glauconifere dei dintorni di Bologna* (Boll. del r. Comitato geologico).
1877. C. De Stefani, *Descrizione degli strati pliocenici dei dintorni di Siena.*
1878. Th. Fuchs, *Studien über die Gliederung der jungeren Tertiarbildungen ober Italien.*
1878. D. Pantanelli, *Sul plioceno dei dintorni di Chianciano.*
1878. A. Stoppani, *Carattere marino dei grandi anfiteatri morenici dell'alta Italia.*
1878. Mse. Monterosato, *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee*, pag. 48.
1878. A. Issel, *Crociera del Violante comandato dal capitano armatore Enrico.*
1878. L. Morlet, *Monographie du genre Ringicula.*
1878. C. De Stefani e D. Pantanelli, *Molluschi pliocenici dei dintorni di Siena.*
1878. S. Ciofalo, *Alcune oss. sul mioc. di Ciminna*, pag. 7.
1879. C. F. Parona, *Il plioceno dell'Oltrepò pavese* ecc. (Atti della Società italiana di scienze naturali. Vol. XXI).
1879. A. Mascarini, *Le argille marnose azzurre di Grottamare ed i fossili che vi si rinvengono.*
1879. A. Sartorio, *Il Colle di S. Colombano e i suoi fossili. Studio geo-paleontologico.*
1880. D. Pantanelli, *Conchiglie plioceniche di Pietrafitta.*
1880. L. Morlet, *Supplément à la Monographie du genre Ringicula.*
1880. G. Seguenza, *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio (Calabria).*

AVVERTENZE

Nella descrizione di ciascuna specie alla sinonimia siegue una dettagliata diagnosi, quindi le dimensioni, le varietà e poi le osservazioni e i caratteri differenziali dalle specie affini, e finalmente la distribuzione stratigrafica e topografica, coll'ubicazione delle forme viventi se la specie vive tuttavia.

Or nell'indicare la distribuzione stratigrafica e le località riporto prima i terreni e i luoghi che sono stati assegnati a ciascuna specie e gli autori che li indicarono, ricordando Morlet, che fa d'uopo ripetere assai sovente, con (M.).

Quindi sotto la categoria *Giacimenti riconosciuti* io indico i terreni e i luoghi dai quali io ho potuto procurarmi e riconoscere la specie. Col segno (!) che siegue una località significo che la specie l'ho io stesso raccolta sul luogo; i nomi dei dotti, che faccio seguire al nome dei luoghi, indicano che da tali scienziati ho ricevuto gentilmente esemplari della specie raccolti in quelle località.

Parimenti nel quadro sinottico finale indico con una croce (+) le località da me riconosciute e con una semplice linea (—) quelle da altri indicate.

Genere **RINGICULA** Deshayes 1838.

Descrizione delle specie terziarie italiane.

SEZIONE I. *Una quarta piega esistente sul margine columellare, tra le due anteriori e la posteriore.*

A. Colla superficie liscia, sfornita di solchi spirali.

Sp. 1. **Ringicula crassa** n. sp. 1879.

Tav. I, fig. 1, 1*a*, 1*b*.

Conchiglia ovato-conica, incrassata e molto solida, colla superficie levigata; spirale prominente, elongata, conica, acuta ; avvolgimenti al numero di sette, regolarmente crescenti, e convessi, l'ultimo globoso, lungo circa una volta e mezzo la spirale, molto convesso e gibboso sul dorso; l'apertura è molto ristretta, obliqua sinuosa con una lunga scanalatura posteriore e poco allargata anteriormente; il labbro è enormemente ingrossato, regolarmente curvo al margine esterno, con due prominenze molto ottuse e rotondate all'interno, la sua superficie esterna è quasi regolarmente lamelloso-striata, ed estendesi in forma di lamina sino quasi alla metà dell'antipenultimo avvolgimento; la columella s'incurva fortemente ed è quatriplicata; essa offre posteriormente una callosità spessa , che sporgendo obliquamente con un margine retto dal lato dell'apertura forma un angolo all'origine del canale, ed in gran parte occulta le tre pieghe posteriori, che sono molto profonde, d'altro canto essa si estende largamente sopra una gran parte dell'ultimo avvolgimento e si dilata sino all'avvolgimento penultimo; la piega anteriore è sottile, molto obliqua, flessuosa e contorta, la seconda più sottile, meno sporgente e quasi trasversalmente posta, la terza è più profonda, poco sporgente, ottusa, la posteriore somiglia alla seconda.

Esemplari.	Tortoniano Modenese	Astiano-Asti
Lunghezza	11^{mm}	$9,5^{mm}$
Larghezza	8^{mm}	7^{mm}

Questa nuova e grande specie è ben distinta dalla grande ristrettezza e particolare forma della bocca, dall'enorme ingrossamento del labbro, dalla callosità columellare a margine rettilineo, e sopratutto dalle quattro pieghe della columella, di cui le tre posteriori poco appariscenti perchè molto profonde e soverchiate dalla callosità columellare, percui soltanto la piega anteriore è la sola molto visibile.

Nella collezione paleontologica del Mioceno del prof. P. Doderlein, conservata nel gabinetto geologico dell'Università di Palermo trovansi varî esemplari di questa specie denominati *R. buccinea* var. *incrassata* Doderlein, e con tale nome ne ho ricevuto qualche esemplare raccolto nel Mioceno del Tortonese; e quantunque, secondo i miei apprezzamenti, non possa ritenersi questa forma di Ringicola siccome varietà della *R. buccinea*, pure è con essa che ha la maggiore affinità, e dai caratteri dell'apertura e dalla lunghezza molto maggiore della spira ne resta ben distinta; siccome i caratteri della bocca la differenziano dalla *R. marginata*, e dalla *R. conformis*, dalla quale differisce anco per la grandezza e per la minore gracilità.

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore (Tortoniano) Sassuolo, Tortonese (Bellardi). — Plioceno antico (Astiano). Astigiano (Issel).

Sp. 2. **Ringicula conformis** Monterosato 1875.

Tav. I, fig. 2.

Sinonimi.

1872. R. . . . . M. T. A. di Monterosato, *Notizie intorno alle conchiglie fossili di Monte Pellegrino e Ficarazzi*, pag. 34.
1875. R. auriculata var. *conformis* Monterosato, *Nuova rivista delle conchiglie mediterranee*, pag. 45.
1877. R. conformis. Monterosato, *Note sur quelques coquilles provenant des côtes d'Algérie* (Journal de Conchyliologie. Vol. XXVII, pag. 44, pl. XI, fig. 4).
1877. R. » Monterosato, *Catalogo delle conchiglie fossili di Monte Pellegrino e Ficarazzi presso Palermo*, pag. 13.
1878. R. » Monterosato, *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee*, pag. 48.
1878. R. » L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 19 e 50, tav. V, fig.15.
1880. R. » L. Morlet, *Supplément à la Monograph. da genre* Ringicula, pag. 2, 29, 30.
1880. R. » G. Seguenza, *Le formazioni terziarie della Provincia di Reggio*, pag. 351.

Conchiglia ovato-allungata, piccola, ma solida e colla superficie levigatissima; spira allungata, conica, acuta; cinque e mezzo avvolgimenti convessi costituiscono la conchiglia, l'ultimo è globoso e costituisce circa i tre quinti della lunghezza totale; l'apertura è ristretta, specialmente nella sua parte posteriore, dove connettesi con una scanalatura; il labbro è poco curvo nella sua lunghezza ed invece s'inarca alla parte anteriore e s'incurva posteriormente collegandosi colla callosità columellare che si estende sino al penultimo avvolgimento, ed inoltre esso s'inspessisce all'interno ed all'esterno e specialmente nella regione mediana; la columella è arcuata, fornita di quattro pieghe ed incrostata d'un callo abbastanza spesso, ma che si dilata poco cingendo l'apertura; le due pieghe anteriori sono sottili, alquanto oblique, parallele, prominenti, e ravvicinate, la posteriore meno sporgente è poco obliqua nel senso contrario delle precedenti, la quarta interposta tra queste e quella è ancor minore, molto profonda ed occultata da una sporgenza del callo che nella sua direzione vedesi sul margine columellare.

Esemplari.	Vivente	Vivente	Ficarazzi
Lunghezza	4^{mm}	$3{,}5^{mm}$	$5{,}2^{mm}$
Larghezza	$2{,}6^{mm}$	$2{,}5^{mm}$	$3{,}6^{mm}$

Var. 1. subcostata n. Costelle longitudinali sugli avvolgimenti precedenti l'ultimo.

Esemplari.	Ficarazzi	Vivente
Lunghezza	$5{,}1^{mm}$	$3{,}6^{mm}$
Larghezza	$3{,}5^{mm}$	$2{,}4^{mm}$

Var. 2. gracilis n. Tav. I, fig. 2. Forma più gracile, spira più prominente e più acuta.

Esemplare.	Altavilla
Lunghezza	5^{mm}
Larghezza	$3{,}1^{mm}$

Questa specie è molto ben distinta da quelle alle quali più somiglia, per la quarta piega interposta tra la posteriore e le due anteriori, che si presenta più o meno sviluppata e sporgente. Questo importante e valevole carattere non è stato ancora accennato da alcuno; nè il Monterosato nè il Morlet lo ricordano, ma la figura che dà quest' ultimo essendo abbastanza buona ed esatta mostra quella prominenza del callo, che sovrasta alla quarta piega, la quale essendo molto interna non può vedersi guardando la conchiglia di fronte. La *R. conformis* riproduce nelle sue piccole forme generali la *R. crassa*, ma da questa è ben distinta per la picciolezza, per la minore gibbosità, e specialmente pei caratteri tutti dell'apertura e delle pieghe.

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Superga. (M.). — Plioceno antico. Borzoli (M.). Zinoli presso Savona (M.). Villalvernia (M.). Masserano (M.). Viale presso Montafia (M.). — Plioceno recente. Monte Pellegrino (Monterosato. M.). Ficarazzi (Monterosato M.).

Giacimenti riconosciuti. — Plioceno antico. Altavilla! Piacentino (Dr Aragona). — Plioceno recente. Ficarazzi (Brugnone). Tra Cosenza e Luzzi (Lovisato). — Quaternario. Boveto!

Stazione. — Vive nel Mediterraneo. Palermo, S. Vito, Algeria (Monterosato). Nell'Atlantico. Cap. Breton (De Folin). Coste di Provenza (Sollier.).

B. Superficie ornata da strie spirali.

Sp. 3. **Ringicula gigantea** Doderlein 1862.

Sinonimi.

1838. R. buccinea Deshayes, *Traité élém. de Conchyliol.* tav. 77, fig. 10, 11, 12.

1862. R. gigantea P. Doderlein, *Cenni geologici intorno la giacitura dei terreni miocenici superiori dell'Italia centrale*, p. 17 (Atti del X Congresso degli scienziati italiani tenuto a Siena).

1869. Auriculina gigantula C. Mayer, *Description des coquilles fossiles des terrains tertiaires supérieurs* (Journal de Conchyliologie, 2 série, tom. IX, pag. 85, tav. III, fig. 7).

1869. R. buccinea var. *gigantea* F. Coppi, *Catalogo dei fossili miocenici e pliocenici del Modenese*, p. 22 (Annuario della Società dei naturalisti di Modena, anno IV).

1874. R. » » F. Coppi, *Catalogo dei fossili mio-pliocenici modenesi*, pag. 1.

1878. R. gigantula L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 40, tav. VII, fig. 7 (Journal de Conchyliologie. Vol. XXVII).

1880. R. » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g.* Ringicula, pag. 29 e 31.

Conchiglia ovato-globosa, incrassata e solida, colla superficie ornata da tenui solchi equidistanti e regolari, coi margini rialzati, delle linee impresse esilissime sovente s' interpongono negli spazî che li separano; oltre tale scultura a linee spirali v'hanno delle linee oblique di accrescimento irregolari, impresse o rilevate maggiori e minori insieme commiste; la spira è breve, conica; gli avvolgimenti cinque, stretti, convessi, che crescono con molta rapidità e sono disgiunti da suture profonde e scanalate; l' ultimo avvolgimento è grandissimo, globoso ed uguaglia circa i tre quarti della lunghezza totale della conchiglia; l' apertura è dilatata alla parte anteriore, si restringe posteriormente per terminarsi in un canale; il labbro è fortemente incrassato, all' interno specialmente nella regione mediana, all' esterno in

tutta la sua estensione, ed è longitudinalmente lamelloso-solcato, esso si estende quasi retto e poi s' incurva ad arco nella porzione anteriore, che sporge fuori; la columella è incurvata e presenta quattro pieghe ed una callosità che si estende ampiamente a ricuoprire buona parte della regione inferiore dell'ultimo avvolgimento, e collegandosi posteriormente col labbro s' inoltra sino alla sutura del penultimo giro di spira; la piega anteriore è più tosto sottile e molto obliqua, quella che immediatamente le succede è molto sporgente, la più grande, la più spessa e poco obliqua; la posteriore è distante dalle altre e meno sporgente, la quarta che precede quest'ultima è appena accennata e molto ottusa.

Esemplari.	Tortoniani-Tortonese			
Lunghezza	14,5mm	13,5mm	12,5mm	13,5mm
Larghezza	11mm	10,5mm	9,5mm	11,5mm

Questa è la più grande specie del genere e non già la *R. Bonellii* come opina il sig. Morlet; essa è stata semplicemente denominata dal Doderlein senza darne alcuna descrizione, il Coppi ha creduto trattarsi d' una semplice forma gigantesca della *R. buccinea*, il Mayer invece l' ha descritta come distinta.

A mio credere questa specie è ben distinta dalle affini per tutti i particolari indicati nella descrizione, la grande convessità degli avvolgimenti, la maniera delle suture scanalate, la conformazione del labbro, la sua natura lamellosa all'esterno, la grande espansione della callosità ombelicale, la forma delle pieghe e l' interposizione di una quarta pochissimo sporgente e molto ottusa, ma soprattutto è la tenuissima scultura della superficie che a mio credere differenzia questa dalle affini, essa è stata trascurata sinora, dimodochè il Mayer diceva la superficie *laevis*, e tale la dichiarava il Morlet; invece la scultura a strie spirali è distintissima e solo manca negli esemplari non ben conservati.

Fra gli esemplari da me posseduti ve ne ha uno coll'ultimo avvolgimento più globoso, colla spirale ancor più breve, costituendo così una rimarchevole variazione.

Devo aggiungere ancora che la *R. buccinea* figurata dal Deshayes nel suo *Traité élém. de Conchyl.* deve assolutamente rapportarsi a questa distinta specie, sopratutto per la scultura esattamente rappresentata.

Giacimenti indicati. — Mioceno superiore (Tortoniano). Monte Gibio presso Sassuolo (Doderlein, Mayer, Coppi, M.). Stazzano (M.).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore. (Tortoniano) Monte Gibio! (Coppi).

Sp. 4. **Ringicula Hörnesii** n. sp. 1879.

Tav. I, fig. 4, 4*a*, 4*b*.

Sinonimi.

1856. R. buccinea Hoernes (non Brocchi), *Die fossilen Molluscken des Tert.-beckens von Wien*, pag. 86, tav. IX, fig. 3, 3*a*.

1878. R. quadriplicata L. Morlet (parte), *Monographie du genre* Ringicula, pag. 56.

Conchiglia ovato-globosa, colla superficie ornata da tenui solchi regolarissimi ed equidistanti, ai quali s' interpongono sovente delle linee impresse d' una estrema

sottigliezza, e da rare ed irregolari linee di accrescimento; la spira è breve, conica; gli avvolgimenti cinque convessi, che crescono rapidamente e sono disgiunti da profonde suture; l' ultimo avvolgimento è assai grande, globoso, d' una lunghezza che supera il doppio di quella della spirale; l'apertura è dilatata alla parte anteriore e si restringe posteriormente terminandosi in un profondo canale; il labbro è fortemente incrassato dal lato interno e dallo esterno, dove presentasi lamelloso-solcato, esso è quasi retto nella sua maggior lunghezza, e quindi protendesi anteriormente incurvandosi in forma d'arco; la columella fortemente curva è quatriplicata, con una espansione poco spessa che molto si estende e va a ricongiungersi col labbro estendendosi sul penultimo avvolgimento; le due pieghe anteriori larghe, sottili, prominenti, lamelliformi sono alquanto divergenti; la posteriore è meno sporgente e la precede una quarta; variabile molto, che talvolta sporge abbastanza da raggiungere quasi la posteriore per lo più è poco prominente e talvolta diviene impercettibile.

Esemplari.	Tortoniano Vienna			M. Solliano
Lunghezza	9mm	8,8mm	9,3mm	9,2mm
Larghezza	6,4mm	6,4mm	6,7mm	6,8mm

La descrizione precedente è stata fatta sopra molti esemplari del Mioceno superiore di Baden, che mi furono da lungo tempo inviati dal chiarissimo prof. Hoernes col nome di *R. buccinea*, dappoichè tra le Ringicole italiane io non conosco che alcuni guasti, incompleti e perciò dubbî esemplari, che possano rapportarsi alla forma testè descritta.

Probabilmente questa importante forma è stata dal Morlet confusa colla sua *R. quadriplicata*; dappoichè tra i numerosi luoghi assegnati a questa sua specie leggesi anco Baden, dove questa sola par che sia la forma più comune e la sola che porti una quarta piega sulla columella.

L' Hoernes la riferì con sicurezza alla *R. buccinea*, nella sua celebre opera sul bacino di Vienna, essendochè i molti esemplari che possiedo mi furono da lui favoriti con tal nome. Eppure io sono perfettamente convinto che tale Ringicola non ha che fare colla specie del Brocchi, nè con quella del Morlet; invece i suoi caratteri l'avvicinano immensamente alla *R. gigantea*, della quale potrebbe benissimo essere una piccola varietà; difatti la scultura è somigliantissima, essendo fatta da linee impresse equidistanti e molto regolari, il colore della superficie è bruniccio come in quella specie, ma la forma è costantemente piccola in rapporto alla grandezza rimarchevole della *R. gigantea*, la spirale è un po' più prominente, la piega anteriore è meno obliqua e quasi parallela alla seconda, entrambe sottili e lamelliformi; la piccola piega tra le anteriori e la posteriore è d'ordinario molto più distinta e sporgente, oltrechè di forma ben diversa e stretta, quantunque scomparisca del tutto in taluni individui, il labbro è anteriormente molto sporgente e ben curvo.

Giacimenti indicati. — In Italia verun luogo. — Mioceno superiore (Tortoniano). Fuori d'Italia Baden (M. Hoernes).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore (Tortoniano). Baden, Monte Solliano presso Sassuolo ! ? (Esemplari incompleti).

Sezione II. *Tre pieghe sole sopra la columella.*

A. Colla superficie liscia, ovvero fornita di linee o di costole spirali sporgenti.

Sp. 5. **Ringicula buccinea** Brocchi sp. 1814.

Tav. I, fig. 3, 3*a*, 3*b*, 3*c*, 3*d*, 3*e*.

Sinonimi.

1814. Voluta buccinea Brocchi, *Conchiologia fossile subbapennina d' Italia.* Vol. II, pag. 93, tav. IV, fig. 9.

1814. » pisum Brocchi, *Conch. foss. sub.* pag. 642, tav. XV, fig. 10 (Giovane).

1825. Auricula buccinea Sowerby, *Min. Conchol.* Vol. V, pag. 100, tav. CCCCLXV, fig. 2.

1831. Marginella auriculata Bronn (parte), *Italiens Tertiär-Gebilde*, pag. 17.

1833. » » Deshayes, *Expéd. scient. de Morée.* Vol. II, pag. 170.

1838. Ringicula buccinea Deshayes, *Hist. natur. des animaux s. ver.* Lamarck 2e edit., vol. VIII, pag. 244.

1841. Marginella auriculata (Menard) (parte). Calcara, *Memoria sopra alcune conchiglie fossili rinvenute nella contrada d'Altavilla*, pag. 67.

1847. Ringicula buccinea E. Sismonda, *Synopsis methodica anim. inv. Pedemontii foss.* p. 52.

1848. » » Bronn, *Index palaeontologicus. Nomenclator*, pag. 52.

1852. » » D'Orbigny, *Prodrome de paléontologie universelle.* Vol. III, pag. 37, n. 542.

1855. » » F. J. Pictet, *Traité de Paléontologie.* Vol. III, pag. 100.

1862. » » P. Doderlein, *Cenni geologici intorno la giacitura dei terr. mioc. sup. dell'Italia centrale*, pag. 17.

1862. » » G. Seguenza, *Sulla formazione miocenica di Sicilia. Ricerche e considerazioni*, pag. 11.

1864. R. elegans V. Pecchioli, *Descrizione di alcuni nuovi foss. delle argille subap. toscane*, pag. 11, tav. V, fig. 32, 33, 34.

1868. R. buccinea L. Foresti, *Catalogo dei molluschi foss. pliocenici delle colline bolognesi*, pag. 48.

1869. » F. Coppi, *Catalogo dei fossili miocenici e pliocenici del Modenese*, pag. 22.

1869. » A. Manzoni, *Della fauna marina di due lembi miocenici dell'alta Italia*, pag. 9.

1871. » F. L. Appelius, *Catal. delle conchiglie foss. del Livornese*, pag. 115.

1873. » G. Cocconi, *Enumeraz. sist. dei moll. mioc. e plioc. della Prov. di Parma e Piacenza*, pag. 133.

1873-78. » G. Seguenza, *Studî stratigrafici sulla form. plioc. dell'Italia merid.* p. 152 (Boll. del r. Comit. geolog. vol. VI).

1874. R. buccinata C. Destefani, *Foss. plioc. dei dint. di S. Miniato* (*Toscana*), pag. 60.

1874. R. buccinea F. Coppi, *Catalogo dei fossili mio-pliocenici modenesi*, pag. 1.

1875. » Th. Fuchs, *I membri delle formaz. terz. nel versante sett. dell'Apennino fra Ancona e Bologna* (Bull. del r. Com. geolog.).

1875. » A. Crespellani, *Nota geologica sui terreni e sui fossili del Savignanese*, pag. 17.

1876. » F. Sordelli, *La fauna marina di Cassina-Rizzardi* (Atti della Soc. it. di S. N. Vol. XVIII, fasc. 3° e 4°).

1876. » L. Foresti, *Cenni geologici e paleontologici sul plioc. antico di Castrocaro*, pag. 22.

1876. R. buccinata D. Pantanelli, Regia Accademia dei Fisiocritici. Direzione del museo di geologia e mineralogia. Rapporto annuale, pag. 2.

1877. R. buccinea D. Pantanelli, *Dei terreni terziari intorno a Siena*, pag. 11.

1877. R. buccinata C. Destefani, *Moll. continent. fino ad ora notati in Italia nei terreni plioc.* pag. 10, 13.

1877. » C. Destefani, *Sulle tracce attribuite all'uomo pliocenico nel Senese*, pag. 4.

1877. R. buccinata A. Issel, *Appunti pal.* 1. *Fossili delle marne di Genova*, pag. 42.
1877. » G. Capellini, *Sulle marne glauconifere dei dintorni di Bologna*, pag. 9.
1877. » C. Destefani, *Descrizione degli strati pliocenici dei dintorni di Siena* (Bull. del r. Comitato geolog.) pag. 20, 39, 40.
1878. » Th. Fuchs, *Studien über die Gliederung der jungeren Tertiarbildungen ober Italien*, pag. 52.
1878. » D. Pantanelli, *Sul plioceno dei dintorni di Chianciano*, pag. 6.
1878. » A. Stoppani, *Carattere marino dei grandi anfiteatri morenici dell'alta Italia*, p. 43.
1878. » C. Destefani e D. Pantanelli, *Molluschi pliocenici dei dintorni di Siena*, pag. 41.
1878. R. buccinea S. Ciofalo, *Alcune osservazioni sul mioceno di Ciminna* pag. 7. (Bull. del r. Comitato geolog.).
1878. R. buccinata L. Morlet, *Monograf. du genre* Ringicula, pag. 48, tav. VIII, fig. 6.
1878. R. intermedia » Op. citata, pag. 54, tav. VIII, fig. 3.
1878. R. quadriplicata » Op. citata, pag. 56, tav. VII, fig. 1.
1878. R. elegans » Op. citata, pag. 51, tav. VII, fig. 8.
1878. R. marginata » (non Deshayes) Op. citata, pag. 56, tav. VIII, fig. 7.
1879. R. buccinea C. F. Parona, *Il plioceno dell'Oltrepò pavese* ecc. (Atti della Società italiana di scienze naturali. Vol. XXI) pag. 62, 108.
1879. » A. Mascarini, *Le argille marnose azzurre di Grottamare ed i fossili che vi si rinvengono*, pag. 7.
1879. » A. Sartorio, *Il Colle di S. Colombano e i suoi fossili. Studio geo-paleontologico*, p. 15.
1880. » D. Pantanelli, *Conchiglie plioceniche di Pietrafitta*, pag. 270.
1880. » L. Morlet, *Suppl. à la Mongr. du g.* Ring. pag. 29, 30, 31.
1880. » G. Seguenza, *Le form. terz.* ecc. pag. 253.

Conchiglia considerevolmente variabile nella grandezza e nella forma, la quale è globosa ovvero globoso-ovata colla spira sempre acuta, ma prominente in grado variissimo, siccome assai diverso presentasi l'inspessimento della conchiglia; la superficie è liscia ovvero presenta delle strie di accrescimento e delle costole spirali estremamente variabili e molto irregolari, essendo frammiste alcune più prominenti ad altre molto piccole, ed entrambe varie in numero, in distanza e moltissimo poi nel grado della sporgenza; gli avvolgimenti sono da cinque a sei, convessi, disgiunti da suture profondate, e crescono con celerità maggiore o minore secondo le diverse varietà; l'ultimo avvolgimento è grande e globoso e oltrepassa i tre quinti della totale lunghezza della conchiglia; l'apertura è ristretta posteriormente terminandosi in un ben lungo canale, è più o meno stretta alla regione anteriore; il labbro è molto incrassato; ma più o meno secondo le varie forme e maggiormente alla regione mediana, esso è incurvato poco nella sua lunghezza e più agli estremi, all'esterno striato longitudinalmente; la columella arcuata presenta tre pieghe di cui l'anteriore è molto obliqua, la seconda meno, la posteriore meno sporgente e tutte e tre bastantemente spesse, sebbene la media sempre di più; inoltre una quarta piega s'interpone tra la posteriore e le due anteriori, e ciò osservasi in taluni individui soltanto, e varia questa piega grandemente nel grado di sporgenza sino a divenire appena visibile e scompare poi del tutto nella maggior parte degli individui.

Esemplari.	Mioceno Superga		Plioceno Piacentino		Altavilla		Cornarè	Livorno	Savona	Pecchioli
Lunghezza	7,5mm	7,4mm	9,7mm	8mm	8,6mm	8,8mm	8,4mm	8mm	6,5mm	8,2mm
Larghezza	5,6mm	5,1mm	6,8mm	6mm	6,0mm	6,2mm	6mm	6mm	4,6mm	6mm

Questa comunissima specie nel modo che io la concepisco costituita è molto variabile, e presenta delle forme considerevolmente diverse, che io sono stato indotto a riunire insieme in unica specie per le insensibili graduatissime transizioni, che le legano insieme in modo naturalissimo. Tale concetto mi venne suggerito splendidamente dallo studio e dal paragone di molte centinaia di esemplari provenienti dai terreni miocenici e pliocenici di tutte le contrade d'Italia.

L'associazione di forme diverse, che io riunisco alla *R. buccinea*, mentre da un canto mi obbliga ad abolire varie specie proposte, mi dà l'agio a distinguere diverse varietà che vado tosto enumerando.

Var. 1. tipica n.

Superficie levigata, spira breve, apertura stretta, labbro molto ispessito, la quarta piega vi si osserva in taluni rari casi. La figura del Brocchi e la fig. 6 della tavola ottava del Morlet rappresentano assai bene il tipo della specie.

Esemplari.	Mioc. Modenose		Plioceno Savona	Piacentino	Cornarè	Bologna	Altavilla		
Lunghezza	9,5mm	7mm	7,5mm	8mm	8,6mm	9,2mm	9,8mm	9mm	9,5mm
Larghezza	5,8mm	5,5mm	6mm	6mm	6,6mm	7,4mm	7mm	7mm	7mm

Var. 2. globosa n. Tav. I, fig. 3*b*, 3*c*.

Spira più breve, ma molto acuta, forma generale della conchiglia più rigonfia, ma più piccola, callosità columellare molto estesa, levigata, semplicissima, ovvero divisa in due porzioni, di cui quella che cinge l'apertura più inspessita, come nella forma precedente. La quarta piega esiste o manca indifferentemente.

Esemplari.	Plioceno Altavilla		Genova			
Lunghezza	6,6mm	7mm	5,2mm	5,4mm	5,6mm	5,7mm
Larghezza	5,5mm	5,3mm	4mm	4,6mm	4,5mm	4,1mm

Var. 3. quadriplicata L. Morlet.

Sinonimi.

1878. R. quadriplicata L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 56, tav. VII, fig. 1.
1880. » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g.* Ring. pag. 13, 32.

Forma della conchiglia ovata, superficie spiralmente ma irregolarmente costata, ed ornata da strie di accrescimento; talvolta tenui ed irregolari costelle longitudinali, la quarta piega più o meno sviluppata o mancante del tutto.

Esemplari	Plioceno Altavilla			Modenese			Bologna		Livorno
Lunghezza	8mm	9mm	9mm	10mm	9,4mm	7,5mm	8,8mm	9mm	8,5mm
Larghezza	6,2mm	6,5mm	7mm	7mm	6,6mm	6,5mm	6,5mm	6,6mm	6mm

Il sig. L. Morlet fondandosi sul carattere della quarta piega e della superficie costata spiralmente ha distinto dalla specie del Brocchi questa forma, ma la quarta piega esiste o manca in questa come in tutte le altre varietà, e tutti gli altri caratteri, non meno che le costole spirali, offrono tutte le gradazioni e si associano al carattere della quarta piega o mancano.

Var. 4. simplex n.

Sinonimi.

1878. R. marginata L. Morlet (non Deshayes), *Monogr. du genre* Ringicula, pag. 56, tav. VIII, fig. 7, 7*a*.
1880. » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr.* pag. 29.

Forma della conchiglia ovata, spirale più prominente, acuta, apertura alla parte anteriore allargata, labbro meno ingrossato di quanto lo è nella forma tipica, callosità columellare meno estesa; la quarta piega vi esiste talvolta più o meno sviluppata ovvero rudimentaria; la superficie è levigata spesso con rudimenti di esili costelle longitudinali, ovvero cogl'indizî di costole spirali.

Esemplari.	Plioceno Siena	Altavilla				Pecchioli		Piacentino	Cornarè	Bologna
Lunghezza	3,8mm	6,4mm	7mm	7,7mm	7,8mm	8mm	8,8mm	7mm	8,5mm	7mm
Larghezza	2,8mm	4,5mm	5mm	5,6mm	5mm	5,5mm	5,5mm	5mm	6,2mm	5,1mm

Questa forma alquanto più costante delle precedenti presenta pure tutte le immaginabili transizioni verso le altre.

Questa forma non corrisponde menomamente alla *R. marginata* del Deshayes, che è una distinta specie; basta consultare difatti la descrizione che l'autore ne dà (vedi Lamarck, *Animaux sans vert.*) per convincersi pienamente che la forma da lui descritta è ben altra; la ristrettezza dell' apertura, la grande espansione della callosità columellare che ricuopre la regione posteriore della bocca, il cordone marginale all'interno del labbro molto spesso, la brevità della spira ecc. sono caratteri che non hanno nessun riscontro nella forma riferita dal Morlet.

Var. 5. intermedia Foresti.

Sinonimi.

1868. R. buccinea var. *intermedia* Foresti, *Catalogo dei molluschi fossili pliocenici delle colline bolognesi*, 1ª parte, p. 48, tav. II, fig. 7, 8, 9.
1875. » » Seguenza, *Studi stratigrafici intorno alla form. plioc. dell'Italia meridionale* (Bullett. del r. Comit. geolog. pag. 152).
1878. R. intermedia L. Morlet, *Monogr. du genre* Ringicula, pag. 54, tav. VIII, fig. 3.
1880. » L. Morlet, *Suppl. à la Monograph.* pag. 29.

Conchiglia più o meno globoso-ovata, colla superficie ornata di esili costelle longitudinali, che sono più o meno ravvicinate ed appariscenti, gl'interstizî sono levigati, la quarta piega columellare comparisce talvolta.

Esemplari.	Plioceno Altavilla			Modenese		Piacentino	Cornarè
Lunghezza	7,5mm	7,2mm	7mm	9mm	7mm	7mm	5,8mm
Larghezza	6mm	5,4mm	5mm	6mm	5,4mm	5mm	4mm

I caratteri assegnati a questa forma sono tutt'altro che invariabili, essi fanno graduata transizione verso quelli delle altre varietà.

Var. 6. elongata. Tav. I, fig. 3*a*, 3*e*.

Conchiglia ovato-oblonga, colla spirale elongata, assottigliata, acúta, la bocca più o meno ristretta per l'ingrossamento della callosità columellare, e per il grande

spessore del labbro, la quarta piega esiste o manca, la superficie è levigata ovvero fornita di costole spirali più o meno numerose e variamente prominenti e talvolta d'indizî di costole longitudinali.

Esemplari.	Tortoniano Ciminna	Pliocene Altavilla				
Lunghezza	10mm	8mm	10mm	8mm	7mm	7mm
Larghezza	6,5mm	5,1mm	7mm	5,2mm	5,4mm	5mm

Questa forma collegasi per transizioni graduali con tutte le altre.

Var. 7. elegans Pecchioli.

Sinonimi.

1864. R. elegans V. Pecchioli, *Descr. di alcuni nuovi foss. delle argille subap. toscane*, pag. 11, fig. 32 a 34.
1878. » L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula pag. 51, tav. VII, fig. 8.
1878. R. buccinea C. Destefani e D. Pantanelli, *Molluschi pliocenici dei dintorni di Siena* pag. 72.
1880. R. elegans L. Morlet, *Suppl. à la Monogr.* pag. 13 e 29.

Conchiglia ornata di costelle longitudinali e di linee spirali.

Esemplari. Plioceno	Siena		Modenese	Altavilla
Lunghezza	6,5mm	6,8mm	9mm	9mm
Larghezza	5mm	5,1mm	7mm	6,8mm

La figura data dal Morlet è alquanto diversa dal tipo descritto dal Pecchioli.

Io possiedo esemplari identici a quelli tipici ma variabili quanto alla quarta piega, la quale giunge sino a scomparire del tutto.

La *R. buccinea* Brocchi risulta naturalmente dall'associazione delle molte forme testè descritte, le quali si collegano insieme per graduate transizioni, e nessuna di esse potrà venire quindi disgiunta. Le forme diverse dell'apertura, del labbro, della spirale, dei varî aspetti della superficie, della quarta piega columellare si associano insieme in tutti i modi ed in tutte le gradazioni, di maniera che riesce impossibile trovare i limiti di una qualunque delle forme; è veramente il caso di una specie estremamente variabile, le cui estreme modificazioni sembrano altrettante distinte specie.

Il carattere della quarta piega, molto variabile e mancante del tutto nel maggior numero dei casi, forma di questa specie un anello intermedio tra questa e la precedente sezione.

La *R. buccinea* ha molta somiglianza colla *R. gigantea* e colla *R. Hoernesii*, ma io non posso affatto accordarmi col prof. F. Coppi che riunisce la seconda alla prima, nè col prof. Mayer che dice la *R. gigantea* a superficie levigata; è appunto la regolare scultura delle due ultime che le distingue soprattutto dalla *R. buccinea*, la quale ha la superficie o levigata, o ornata di costole più o meno sporgenti, e non da solchi o linee impresse regolari.

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Bacedasco (M.). — Mioceno superiore. Sassuolo (M., Doderlein, Coppi). Tortonese (Sismonda, M.), Sogliano (Manzoni). — Plioceno antico. Villavernia, Cortandone, Castelnuovo d'Asti, Castell'Arquato (Sismonda, M.), Albenga, Genova, Savona (Issel, M.), Masserano (Gastaldi), Piacentino (Brocchi, Cocconi), Volterra (Brocchi), Modenese (Coppi), Coroncina, Valle della Fine,

Vallon tenero, Siena (De Stefani, Pantanelli, M.), Livorno (Caterini, Seguenza), Bologna, Castrocaro (Foresti, Seguenza), Altavilla presso Palermo (Calcara, Seguenza).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Acquitaniano). Superga (Bellardi). — Mioceno superiore (Tortoniano) Monte Gibio! Ciminna (Ciofalo). — Plioceno antico (Astiano). Savona, Genova (Issel), Cornarè! Villavernia, Astigiano! (Bellardi), Osterla, Masserano, Piacentino (Dr Aragona), Modenese (Coppi, Bellardi, Bolognese (Foresti, Seguenza), Siena (Pantanelli), Orciano, Peccioli (Lawley), Livorno (Caterini), Altavilla! (Ciofalo) Gallina!

Le diverse varietà si trovano tutte insieme associate quasi in ogni località del Plioceno, offrendo tutte le gradazioni e transizioni.

Non credo questa specie vivente come dice il Morlet, sembra ben diversa dalla forma fossile la figura data nella sua Monografia.

Sp. 6. **Ringicula marginata** Deshayes 1830.

Tav. I, fig. 5, 5*a*, 5*b*.

Sinonimi.

1830. Auricula marginata Deshayes, *Encycl. méth. Vers.* Vol. II, pag. 95, n. 22.
1838. Ringicula marginata Deshayes, *Anim. s. vert.* in Lamarck. Vol. VIII, pag. 345, n. 4.
1847. » » Sismonda, *Synopsis meth. Pedem. foss.*, pag. 52.
1848. » » Bronn, *Index palaeontologicus Nomenclator*, pag. 1089.
1852. » » D'Orbigny, *Prodrome de paléontologie.* Vol. III, pag. 168, n. 72.
1855. » » Pictet, *Traité de paléontologie.* Vol. III, pag. 101.
1880. » » G. Seguenza, *Le formaz. terziarie della Prov. di Reggio*, pag. 101.

Conchiglia ovata, ventricosa, colla superficie levigata, ovvero segnata da leggiere linee di accrescimento; spirale breve assottigliata, conico-acuta; avvolgimenti cinque, moderatamente convessi e disgiunti da suture profonde e scanalate; l'ultimo grandissimo oltrepassa i due terzi della lunghezza totale della conchiglia ed ha forma globoso-ovata; l'apertura è molto ristretta ed angolosa, scanalata posteriormente; il labbro è molto inspessito e dilatato, sopratutto dal lato interno e nella regione centrale, presentando al margine un cordone rialzato, ed essendo interrotta tale sporgenza verso la regione posteriore da un incavo abbastanza considerevole, all'esterno è striato longitudinalmente e con regolarità; la columella è arcuata e triplicata, la callosità columellare è sviluppatissima, essa ricuopre in forma di leggiera incrostazione gran parte dell'ultimo avvolgimento estendendosi di unita al labbro sino a tutta l'altezza o quasi tutta del penultimo, alla regione anteriore è lamelloso-striata, dal lato dell'apertura forma un' espansione molto estesa quasi lamelliforme a margine curvo, la quale occulta la piega posteriore e quasi intieramente la regione posteriore dell'apertura, estendendosi in taluni individui in modo da occultare anco la piega mediana; le tre pieghe sono pressochè equidistanti e molto sporgenti, l'anteriore è la più grande, la più obliqua, e la più spessa.

Esemplari.	Plioceno dell'Astigiano				
Lunghezza	5,5mm	5,4mm	4,2mm	5,6mm	5mm
Larghezza	3,7mm	4mm	3,2mm	3,5mm	3,3mm

La *R. marginata,* a mio credere, è stata finora generalmente sconosciuta, ed in sua vece nelle collezioni trovasi con tal nome la forma della *R. buccinea* che io denomino var. *simplex,* ed è questa appunto la varietà descritta e figurata recentemente dal Morlet.

La vera *R. marginata* non fu illustrata sinora, e quella che io riguardo come tale risponde appuntino a tutto quanto ne dice il Deshayes nella descrizione e nelle osservazioni; inoltre essa proviene dal Plioceno dell'Astigiano da dove il Deshayes se la procurò.

Questa specie è ben distinta dalla *R. buccinea,* colla quale ha le maggiori affinità, la forma della conchiglia, della bocca, del labbro, della callosità e delle pieghe la caratterizzano benissimo, ed inoltre sono abbastanza costanti per non mostrare vere transizioni verso altre forme.

Giacimenti indicati. — Astigiano (Deshayes).

Le altre indicazioni devono essere omesse come quelle che sono o incerte, ovvero si riferiscono ad altra forma; tali sono quelle dateci dal Morlet, che si rapportano alla var. *simplex* della *R. buccinea.*

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore (Tortoniano). Benestare! Calabria. — Plioceno antico dell'Astigiano (Bellardi).

Sp. 7. **Ringicula doliiformis** n. sp. 1879.

Tav. I, fig. 6, 6*a*, 6*b*.

Conchiglia globoso-ovata, alquanto solida, colla superficie pressochè liscia, presentando leggiere costelle nel senso delle linee d'accrescimento, ed alla regione anteriore poche strie esilissime impresse spirali; spirale molto breve, conica, acuta; gli avvolgimenti sono cinque, convessi, crescenti con grande celerità, e disgiunti da suture profondamente impresse; l'ultimo è grandissimo, molto rigonfio ed oltrepassa i tre quarti della lunghezza totale della conchiglia; l'apertura è allargata specialmente verso la regione anteriore, restringendosi posteriormente dove si termina con una scanalatura; il labbro è curvo, specialmente all'estremo anteriore, esso è inspessito poco dal lato interno e molto dall'esterno dove è ornato da solchi longitudinali numerosi ed avvicinati; la columella è arcuata e triplicata, la callosità si estende abbastanza sull'avvolgimento ultimo, e va sino al penultimo associata al labbro; le due pieghe anteriori sono abbastanza prominenti e poco spesse, entrambe oblique ma la estrema molto più dell'altra, la piega posteriore è allontanata e poco sporgente.

Esemplari. Elveziano	Sciolze	
Lunghezza	8,4^{mm}	8,2^{mm}
Larghezza	6,5^{mm}	6,4^{mm}

La *R. doliiformis* è specie molto affine alla *R. gigantea* ed alla *R. Hoernesii* dalle quali distinguesi per molti caratteri e specialmente per la mancanza di una superficie striata spiralmente, per la grande brevità della spira e pel difetto della quarta piega. La grandezza dell'avvolgimento ultimo, la forma elargata dell'apertura, il moderato spessore del labbro distinguono questa dalla *R. buccinea.*

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Elveziano). Sciolze! (presso Torino).

Sp. 8. **Ringicula calabra** Seguenza 1879.

Tav. I, fig. 7, 7*a*, 7*b*, 8, 8*a*.

Sinonimi.

1880. R. calabra Seguenza, *Le formazioni terz. nella prov. di Reggio (Calabria)*, p. 101, tav. XI, fig. 3.

Conchiglia ovato-elongata, crassa e solida, colla superficie levigata e raramente con indizî di esilissime strie spirali, spira prominente conica acuta; avvolgimenti cinque e mezzo, convessi, l'ultimo grande, globoso, circa quattro settimi della lunghezza totale della conchiglia, apertura ristretta sopratutto verso la regione posteriore dove terminasi in un canale; il labbro è molto inspessito specialmente alla regione centrale dove forma una specie di prominenza allungata che restringe molto l'apertura; la columella è fortemente arcuata, triplicata; la callosità che la ricuopre si estende abbastanza sull'ultimo avvolgimento, ed associandosi al labbro incrosta anco l'avvolgimento penultimo; la piega anteriore è la maggiore e la più obliqua, la posteriore, la minore e viene quasi occultata da una prominenza angolosa del callo columellare, tutte tre sono quasi equidistanti.

Esemplari. Mioceno	Benestare			Modenese			Stazzano		Sciolze
Lunghezza	6mm	5,5mm	6mm	5,7mm	5,2mm	4,2mm	5,2mm	4,5mm	4,6mm
Larghezza	3,8mm	3,7mm	4mm	3,6mm	3,5mm	3mm	3,1mm	3,2mm	3,2mm

La nuova specie che propongo è distintissima per la grande costanza dei suoi caratteri, difatti essa è proprio invariabile nella forma ed anco nella grandezza. La conformazione della bocca l'avvicina in qualche modo alla *R. marginata,* ma la grande prominenza della spira ne l'allontana grandemente; la *R. buccinea* ha sempre maggiore l'ultimo avvolgimento di quanto non è nella *R. calabra;* la speciale gibbosità dell'ultimo giro della spirale e la mancanza della quarta piega di unita ad altri particolari la distinguono benissimo dalla *R. conformis.*

Quantunque molto costante nella sua invariabile picciolezza e nei suoi distintivi caratteri, pure esaminando parecchie centinaia di esemplari mi venne fatto di riconoscere talune varietà che qui descrivo.

Var. 1. contracta. n.

Questa forma è più breve coll'ultimo avvolgimento più grande. Essa accennerebbe ad un ravvicinamento verso la *R. buccinea,* ma questa forma è estremamente rara.

Esemplari. Mioceno	Modenese		Benestare	
Lunghezza	4,4mm	4,3mm	5,1mm	5,3mm
Larghezza	3,3mm	3,3mm	4mm	4,1mm

Var. 2. striolata. n.

L'ultimo avvolgimento presenta esilissime strie spirali sulla regione anteriore, e più raramente su tutta la superficie.

Esemplari. Mioceno	Modenese	
Lunghezza	4,6mm	4,5mm
Larghezza	3,1mm	3mm

Var. 3. ornata. n. Tav. I, fig. 8, 8*a*.

Tutti gli avvolgimenti presentano delle costelle longitudinali appena rilevate, l'ultimo con esilissime strie spirali.

Esemplari. Mioceno	Benestare		
Lunghezza	5,7mm	5,8mm	5,6mm
Larghezza	3,7mm	3,7mm	3,6mm

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Elveziano). Sciolze! (presso Torino). — Mioceno superiore (Tortoniano). Modenese! (Coppi, Bellardi) colla 1ª e 2ª varietà. — Stazzano! (Tortonese) (Bellardi), Benestare! (Calabria). Colle diverse varietà. — Plioceno. Modenese (Bellardi).

Sp. 9. **Ringicula africana** L. Morlet 1878.

Sinonimi.

1878. R. africana L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 61, tav. VII, fig. 10.
1880. » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr.* pag. 14, 29.

Conchiglia ovale-allungata, spessa, colla superficie levigata o raramente ornata da rari cingoli alquanto prominenti; spira conica acuta; avvolgimenti sei poco convessi, disgiunti da suture profondate, canalicolate, l'ultimo globoso, arrotondato alla regione anteriore, che supera i quattro settimi della lunghezza della conchiglia; apertura allargata anteriormente, ristretta alla regione posteriore dove si termina con una scanalatura; columella arcuata triplicata, callosità columellare alquanto estesa e prominente all'origine della piega posteriore, che è la minore, la anteriore è la maggiore e la più obliqua ed alquanto flessuosa; il labbro inarcato ed ingrossato, sopratutto alla regione centrale, s'innesta colla callosità del margine columellare estendendosi per una porzione del penultimo avvolgimento.

Esemplari. Plioceno	Altavilla		Piacent.		Astig.	Valleb.		Monte Mario	
Lunghezza	6mm	5,3mm	6mm	5,8mm	5mm	5,2mm	4,7mm	6mm	5,2mm
Larghezza	4mm	3,5mm	4,4mm	4mm	3,4mm	3,6mm	3,3mm	4mm	3,8mm

Questa specie per la sua forma più gracile, pegli avvolgimenti meno convessi, pel costante difetto d'una quarta piega alla columella distinguesi dalla *R. buccinea,* ma quest'ultima colle sue numerose variazioni par che vi si approssimi tanto da mostrare dei passaggi graduati, specialmente per mezzo della var. *elongata.*

La convessità maggiore di tutti gli avvolgimenti distingue benissimo la *R. calabra* dalla *R. africana.*

Giacimenti indicati. — Plioceno inferiore. Sidi-Daho, presso Oran, Donerah (Algeria) (L. Morlet).

Giacimenti riconosciuti. — Plioceno antico (Astiano). Astigiano, Piacentino (Dr Aragona), Altavilla! Buccheri (Brugnone). — Plioceno recente. Vallebiaia (Issel), Mte Mario (Rigacci)

Sp. 10. **Ringicula Grateloupi** D'Orbigny 1852.

Tav. II, fig. 12, 12*a*.

Sinonimi.

1838. Auricula ringens Grateloup, *Catalog. zool. des an. du bassin de la Gironde*, n. 63, var. A, n. 83 (non Lamarck).
1840. Auriculina ringens var. *major*. Grateloup, *Conch. foss. du bassin de l'Adour Plicacès*, n. 1, tav. VI, fig. 6-7.
1852. Ringicula Grateloupi D'Orbigny. *Prodrome de pal. universelle*. Vol. III, pag. 6, n. 76.
1855. » Pictet, *Traité de paléontologie*. Vol. III, pag. 101, tav. LX, fig. 9.
1878. » L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 54, tav. VIII, fig. 1.
1880. » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr.* pag. 13 e 29.

Conchiglia ovato-oblonga, incrassata, colla superficie ornata da costelle spirali più o meno prominenti; la spirale è sporgente ed acuta; gli avvolgimenti sono convessi, al numero di sei, e disgiunti da suture profondate e quasi scanalate; l'ultimo è globoso, considerevolmente dilatato verso l'apertura, e lungo oltre i due terzi della totale lunghezza della conchiglia; l'apertura si allarga molto alla parte anteriore e si restringe posteriormente dove è scanalata; il labbro è poco curvo nella sua maggior lunghezza, fortemente arcuato alla parte anteriore, più spesso alla regione centrale, con una marginatura esterna molto larga, e solcata longitudinalmente; il margine columellare è incurvato, triplicato, e la callosità che lo ricuopre si estende sopra gran parte dell'ultimo avvolgimento, e dal lato del labbro, col quale si connette, oltrepassa il penultimo avvolgimento; la piega anteriore è molto obliqua, la media la più sporgente, la posteriore piccola.

Esemplari. Mioceno	Tort.	Sciolze	Ciminna	Plioc. Mod.
Lunghezza	7,2^{mm}	6,6^{mm}	4,6^{mm}	8^{mm}
Larghezza	5,4^{mm}	5^{mm}	3,2^{mm}	5,2^{mm}

La forma che io rapporto alla specie del D'Orbigny comparata alla figura del Grateloup ed a quella del Pictet sembrerebbe non convenire bene, nè può chiamarsi in aiuto la descrizione che ne dà il Grateloup stesso, e che viene letteralmente trascritta dal Morlet, essendochè essa è tale che può benissimo riferirsi alla maggior parte delle Ringicole.

Intanto io possiedo molte Ringicole di Bordeaux, che raccolte nel Mioceno, senza dubbio spettano a quella forma che il D'Orbigny chiamò *R. Grateloupi*, ed esse convengono con quelle che io credo di dovere riguardare come tali.

A questa forma intanto se ne associano talune altre, che per graduati passaggi si collegano con essa e che perciò costituiscono altrettante varietà, tra le quali credo debbasi annoverare quella che il Morlet ha figurato nelle tavole della sua monografia, e che sembra pure tanto diversa dalla figura del Grateloup.

Var. 1. laevis. n. Tav. II, fig. 12, 12*a*.

La superficie manca di costole o di cingoli spirali ed è levigata.

Esemplari. Mioceno	Modenese		
Lunghezza	6,9^{mm}	6,8^{mm}	6^{mm}
Larghezza	4,8^{mm}	3^{mm}	4,4^{mm}

Var. 2. costulata. n.

Costole longitudinali rare, filiformi, alquanto sporgenti, cingoli mancanti del tutto.

Esemplari. Miocene	Modenese		
Lunghezza	6,2^{mm}	7,8^{mm}	7,4^{mm}
Larghezza	4,8^{mm}	5,8^{mm}	6,8^{mm}

Var. 3. italica. n.

L'ultimo avvolgimento è allungato considerevolmente, assumendo una forma pressochè cilindracea; la superficie è liscia.

Esemplari. Mioceno	Modenese			
Lunghezza	6,6^{mm}	7^{mm}	8,3^{mm}	7,5^{mm}
Larghezza	4,5^{mm}	4,6^{mm}	6^{mm}	5,3^{mm}

Anco questa, che è la più prossima alla figura data dal Morlet, si collega alla forma tipica per gradazioni.

Questa specie si distingue dalle affini per essere dilatata alla regione anteriore, e per avere l'apertura allargata anteriormente pel labbro che si protende verso l'esterno, come avviene nella *R. auriculata.*

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Superga (M.), Baldissero (M.).— Mioceno superiore. Sassuolo (M.), Stazzano (M.). — Plioceno inferiore. Perpignano (M.).

Giacimenti riconosciuti.— Mioceno medio (Elveziano). Sciolze !— Mioceno superiore (Tortoniano). M^{te} Gibio ! (Coppi, Bellardi), Tortonese (Bellardi), Ciminna (Ciofalo). — Plioceno antico (Astiano). Modenese (Bellardi).

B. Superficie ornata da solchi spirali.

Sp. 11. **Ringicula auriculata** Ménard sp. 1811.

Tav. I, fig. 9, 9*a*; Tav. II, fig. 1, 1*a*.

Sinonimi.

1811. Marginella auriculata Ménard, Ann. du Mus. Vol. XVII, pag. 331.
1836. » » Philippi, *Enum. mollusc. Siciliae.* Vol. I, pag. 231.
1844. Ringicula auriculata Philippi, *Enum. mollusc. Sic.* Vol. II, p. 198, t. XXVIII, fig. 13, 13*a*.
1844. » » E. Forbes, *Mollusca and radiata of the Aegean sea*, p. 141.
1848. » » Bronn, *Index paleontologicus. Nomenclator*, pag. 1088.
1854. » » Mac-Andrew, *Geograph. district of testaceous mollusca in the North Atlantic and neighbouring seas*, pag. 17, 22, 26, 41, 43, 47.
1862. » » C. Weinkauff, *Catalogue des coquilles marines*, *recuillies sur les côtes de l'Algérie*, pag. 367.
1862. » » Speyer, *Die Conch. des Casseler Tertiaebildunger*, p. 18, t.I, fig. 18 *a b c*.
1862-64. » » Speyer, *Ueber tertiaer Conch. von Westeregeln in Magdeburgischen.*
1867. » » Hidalgo, *Catalogue des mollusques testacés marins des côtes de l'Espagne et des îles Baléares*, pag. 109.
1868. » » Weinkauff, *Die Conch.-Mittelmeeres.* Vol. II, pag. 45.
1868. » buccinata (parte) A. Manzoni, *Saggio di conchiologia fossile subbapennina*, pag. 47.
1870. » auriculata J. G. Jeffreys, *Mediterranean mollusca*, pag. 19.
1872. » » Mse. Monterosato, *Notizie intorno alle conchiglie mediterranee*, pag. 29.

1873. Ringicula auriculata G. Seguenza, *Studî stratigrafici sulla formazione plioc. dell'Italia meridionale* (Bullettino del r. Comit. geolog. pag. 296).

1875. » » Monterosato, *Nuova rivista delle conchiglie mediterranee*, pag 45, n. 769.

1877. » » Mse. Monterosato, *Note sur quelques coquilles prov. des côtes d'Algérie* (Journal de Conchyliologie. Vol. XXV, pag. 44).

1877. » » Mse. Monterosato, *Catalogo delle conchiglie fossili di Monte Pellegrino e Ficarazzi presso Palermo* (Bullett. del r. Comitato geologico, p. 13).

1878. » » Mse. Monterosato, *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee*, pag. 48.

1878. » » Issel, *Crociera del Violante, comandato dal capitano armatore Enrico*, p.10.

1878. » » L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 46 e pag. 18, tav. V, fig. 14.

1880. » » G. Seguenza, *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio* (*Calabria*), pag. 101, 253, 318, 351.

1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr.* pag. 12, 29 e 30.

Conchiglia ovata, anteriormente dilatata, spiralmente e regolarmente striata; la spirale è conica, ma variabilmente sporgente ed acuta, di maniera che la conchiglia assume una forma che varia considerevolmente, ora ovato-elargata e per gradazioni ovato-oblonga; gli avvolgimenti sono quattro e mezzo, fortemente convessi e disgiunti da suture fortemente impresse; l'ultimo, è grande, convesso globoso o globoso-ovato, della lunghezza che oltrepassa i tre quinti della conchiglia, anco nelle forme più allungate; l'apertura è dilatata alla regione anteriore, stretta e scanalata posteriormente; il labbro negli adulti diviene molto ingrossato e specialmente verso la regione centrale, ma sopratutto all'esterno dove offre una marginatura spessa e molto allargata, esso è poco curvo nella sua lunghezza, ma si protende in forma di arco alla regione anteriore; la columella è molto incurvata; la callosità inspessita molto ma poco estesa, congiungendosi col labbro sul penultimo avvolgimento sul quale si estende per due terzi; la piega columellare posteriore è meno prominente delle due anteriori, che sporgono abbastanza, la prima delle quali è alquanto flessuosa e più obliqua.

Esemplari. Pliocene	Altavilla			Osterla	M. Pellegrino	Messina	Vallebiaia	Siena
Lunghezza	5^{mm}	6^{mm}	5^{mm}	4^{mm}	$4{,}3^{mm}$	$5{,}4^{mm}$	5^{mm}	$3{,}3^{mm}$
Larghezza	$3{,}4^{mm}$	$4{,}2^{mm}$	$3{,}8^{mm}$	3^{mm}	$3{,}4^{mm}$	$3{,}4^{mm}$	$3{,}8^{mm}$	$2{,}5^{mm}$

Non è da pensarsi menomamente all'associazione, da taluni proposta, di questa specie, colla *R. buccinea*, dappoichè da tutte le forme che io ho studiato, parmi risulti evidente che le specie le quali sono fornite d'una superficie spiralmente solcata, quantunque tal carattere varii nel grado, pure non fa mai difetto. La *R. buccinea* si presenta, in tutte le numerose forme che offre, colla superficie o del tutto levigata, ovvero ornata da costole o da cingoli più o meno spirali sporgenti, e non mai da strie impresse o da solchi.

La *R. auriculata* differisce inoltre dalla *R. buccinea* perchè costantemente costituita da quattro avvolgimenti e mezzo, e per la costante dilatazione anteriore dell'apertura, caratteri molto valevoli per la loro costanza.

In questa specie parmi si possano distinguere allo stato fossile le seguenti varietà:

Var. 1. brevis. n.

Conchiglia breve, globoso-ovata, coll'ultimo avvolgimento molto rigonfio e veramente globoso.

Esemplari. Plioceno	Osterla	
Lunghezza	3,8^{mm}	4,2^{mm}
Larghezza	3,1^{mm}	3,1^{mm}

Var. 2. incrassata. n. Tav. I, fig. 9, 9*a*.

Labbro estremamente ingrossato, specialmente al centro dove forma una prominenza rotondata abbastanza sporgente, ed all'esterno un margine assai largo e spessissimo; la callosità columellare è molto ingrossata, di maniera che l'apertura è molto ristretta.

Esemplari. Plioceno	Siena	Altavilla		
Lunghezza	4,2^{mm}	5^{mm}	5,2^{mm}	5,8^{mm}
Larghezza	3,1^{mm}	3,8^{mm}	3,7^{mm}	3,8^{mm}

Var. 3. crispata. Tav. II, fig. 1, 1*a*.

Forma piuttosto allungata, superficie increspata per numerose linee sporgenti longitudinali.

Esemplari. Plioceno	F. Oreto	
Lunghezza	3,5^{mm}	5^{mm}
Larghezza	2,8^{mm}	4^{mm}

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Superga (M.). — Mioceno superiore. Sassuolo (M.). — Plioceno inferiore presso Nizza e Casares (M.), Genova, Viale presso Asti, Montafia, Masserano, Villavernia (M.), Altavilla (Calcara). — Plioceno superiore. — Monte Mario (Vand Heche, Conti, M.), Ficarazzi (Monterosato, Seguenza, M.), M^{te} Pellegrino (Monterosato, Seguenza, Philippi, M.), Cefali (Aradas, Lyell, Philippi). Buccheri (Philippi), Militello (Philippi), Gravina (Philippi). — Quaternario. Messina (Aradas, Seguenza), Reggio (Seguenza).

Giacimenti riconosciuti. — Plioceno antico (Astiano). Modenese (Coppi, Bellardi), Osterla, Altavilla! Siena (Pantanelli) Gallina! (Reggio). — Plioceno recente. Vallebiaia (Issel), M^{te} Pellegrino! (Brugnone), F.^{e} Oreto (Brugnone), Militello (Brugnone), P^{te} Giannettello (presso Caltanissetta) (Brugnone), Monosterace! — Quaternario. Messina! Reggio! (Calabria), Catanzaro (Lovisato).

Stazione. — Vive nel Mediterraneo e nell'Oceano Atlantico.

Sp. 12. **Ringicula placentina** n. sp. 1879.

Tav. II, fig. 2, 2*a*, 2*b*.

Conchiglia globoso-ovata, dilatata alla regione anteriore, incrassata, e colla superficie segnata da linee impresse spirali, esilissime e regolari, che sono appena visibili, sulla regione anteriore; la spirale è conica e molto breve; gli avvolgimenti al numero di quattro non molto convessi crescono celeremente; l'ultimo grandissimo, globoso, una lunghezza pressochè tripla della spira; l'apertura è largamente dilatata alla parte anteriore, ristretta e canaliculata posteriormente; il labbro quasi retto

incurvasi alla regione anteriore, esso è inspessito ed offre una sporgenza dal lato interno verso la parte mediana, all'esterno è largamente marginato; la callosità columellare è molto spessa, ma si estende pochissimo sull'ultimo avvolgimento ed associasi al labbro andando sino al penultimo giro di spira; il margine columellare è curvo triplicato, la piega mediana è la più sporgente, l'anteriore alquanto più obliqua, la posteriore più allontanata, spessa, e delle altre meno sporgente.

Esemplari	Plioceno-Piacentino						
Lunghezza	4,5^{mm}	4,1^{mm}	4^{mm}	3,3^{mm}	3,7^{mm}	3,8^{mm}	4^{mm}
Larghezza	3,8^{mm}	3,7^{mm}	3,3^{mm}	2,9^{mm}	3^{mm}	3^{mm}	3,5^{mm}

La nuova specie che propongo parmi perfettamente distinta dalla precedente colla quale ha la maggiore affinità, difatti la brevità della spira e la grandezza proporzionale dell'ultimo avvolgimento sono caratteri molto rimarchevoli, le strie spirali esilissime la distinguono ugualmente, come la minore convessità degli avvolgimenti.

Nessuna delle varietà della *R. buccinea* potrebbe venir confusa con questa forma, da un canto il numero minore degli avvolgimenti, dall'altro la dilatazione anteriore dell'ultimo coll'allargamento dell'apertura ne la distinguono molto bene.

Giacimenti riconosciuti. — Plioceno inferiore. Piacentino (Dr Aragona).

Sp. 13. **Ringicula Gaudryana** L. Morlet 1878.

Tav. II, fig. 8, 8*a*.

Sinonimi.

1878. R. Gaudryana L. Morlet, *Monogr. du genre* Ringicula, pag. 53, tav. VII, fig. 12.
1880. R. » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g. R.* pag. 13, 29 e 31.

Conchiglia ovale-piriforme, rigonfia, sottile, finamente e regolarmente solcata in senso spirale; spira breve; avvolgimenti sei molto convessi, che si accrescono rapidamente e sono disgiunti da una sutura profondata e quasi scanalata; l'ultimo avvolgimento è assai grande, circa due terzi della totale lunghezza della conchiglia; la regione posteriore degli avvolgimenti è convessissima, specialmente nell'ultimo, ciò che gli dà sovente l'aspetto di carenato; apertura larga, di forma oblonga, poco ristretta posteriormente; il labbro è considerevolmente obliquo per rapporto all'asse della conchiglia, esso è quasi retto nella maggior parte della sua lunghezza e s'incurva ai due estremi, formando alla parte anteriore un angolo ben marcato, dal lato interno non è affatto inspessito dal che risulta sottile, essendo soltanto marginato all'esterno; il margine columellare è poco incurvato, incrostato d'una callosità sottile ristrettissima e fornito di tre pieghe, di cui la posteriore è molto piccola ed assai allontanata dalle altre due, le quali sono sottili, estese, flessuose ed oblique, specialmente l'anteriore.

Esemplari. Plioceno	Savona	Genova	Cornarè	Altavilla	Orciano	Peccioli	Bologna	Livorno	Siena
Lunghezza	7^{mm}	6,2^{mm}	7^{mm}	5^{mm}	7,5^{mm}	6,4^{mm}	7,3^{mm}	6,1^{mm}	6,2^{mm}
Larghezza	5,2^{mm}	5^{mm}	5^{mm}	3,9^{mm}	5,5^{mm}	5,2^{mm}	5,7^{mm}	4,1^{mm}	4,8^{mm}

Var. 1. longispira. n. Tav. II, fig. 8, 8*a*.

Spira più allungata e prominente; apertura un po' meno larga; labbro più ingrossato.

Parmi non potersi questa forma disgiungere dalla tipica.

Tra le Ringicole italiane da me studiate è questa varietà che più si approssima alla *R. ventricosa* Sowerby propria del Crag inglese, ma questa ne è diversa pegli avvolgimenti meno rigonfii, e per l'ultimo che è ovato.

Esemplari. Plioceno	Modenese			Cornarè		Mioc. Stazz.
Lunghezza	5,4mm	6mm	5mm	5,4mm	7mm	6,3mm
Larghezza	4mm	4,6mm	3,7mm	4mm	4,8mm	4,5mm

Questa specie è stata da taluni confusa colla *R. buccinea,* riguardandola come varietà striata, e dai sig. Pantanelli e De Stefani (*Molluschi pliocenici dei dintorni di Siena* (Bull. Soc. mal. ital. vol. IV) venne considerata recentemente siccome costituita dagli individui incompletamente sviluppati. Nè l'una nè l'altra maniera di vedere concorda con la natura dei fatti, i quali non manifestano transizioni di sorta tra questa forma e la *R. buccinea,* da cui sarebbe sufficiente la scultura a solchi spirali per distinguerla eminentemente.

I più hanno distinto questa forma col nome di *R. striata*, e così trovasi nominata nella maggior parte delle collezioni; ma la *R. striata* del Philippi è propria del Mioceno inferiore di Germania ed ha forma affatto diversa, molto allungata e gracile; la *R. striata* del Sismonda, è il *Pedipes striatus* del Bonelli e comprende probabilmente questa forma.

A mio giudizio invece la *R. Gaudryana* è molto più affine alla *R. marginata,* dalla quale se ne allontana per la forma dell'ultimo avvolgimento, dell'apertura e del labbro.

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Bacedasco (M.), Superga (M.). — Mioceno superiore. Stazzano (M.). — Plioceno inferiore. Orciano, Savona, Castell'Arquato, Masserano, Castelnuovo d'Asti, Viale, Bozzoli, Siena, dintorni di Bologna, Altavilla (M.).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore (Tortoniano). Stazzano! (Bellardi). — Plioceno antico (Astiano). Modenese! (Coppi), Bolognese (Foresti), Peccioli, Orciano, (Lawley), Livorno (Caterini), Savona, Genova (Issel), Osterla, Masserano, Altavilla (Brugnone), Pte Giannettello, Mte S. Giuliano (presso Caltanissetta) (Brugnone).

Sp. 14. **Ringicula Brocchii** Seguenza 1875.

Sinonimi.

1875. Ringicula Brocchii Seguenza, *Studi stratigrafici sulla formaz. plioc. dell' Italia meridionale* (Bullett. del r. Com. geolog. pag. 152).
1877. » » De Stefani, *Descriz. strat. plioc. dei dintorni di Siena,* pag. 16, 18, 19, 22, 31.
1877. » » De Stefani, *Molluschi continent.* ecc. pag. 10.
1878. » » D. Pantanelli, *Sul Plioceno dei dintorni di Cianciano,* pag. 8.
1878. » » L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 47, tav. VIII, fig. 2.
1879. » » De Stefani e Pantanelli, *Molluschi plioc. dei dintorni di Siena*, p. 74.
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monograph. du genre* Ring. pag. 29 e 31.
1880. » » D. Pantanelli, *Conchiglie plioceniche di Pietrafitta,* pag. 270.

Conchiglia ovata, più o meno breve e globosa, sottile e finamente solcata in senso spirale; spira più o meno sporgente composta di sei avvolgimenti circa, convessi, che crescono regolarmente, e sono disgiunti da sutura semplice, l'ultimo avvolgimento globoso raggiunge i tre quinti della totale lunghezza della conchiglia; l'apertura è larga pressochè ovata, si restringe posteriormente terminandosi in un largo canale; il labbro è arcuato regolarmente, ingrossato, sopratutto per la esterna varice, che è ben larga negli adulti, ma quasi di uguale spessore in tutta la sua lunghezza, essendo nullo affatto o minimo l'ingrossamento maggiore della regione mediana; il margine columellare è fortemente arcuato, coperto d'una callosità abbastanza spessa ma ristretta, che va a congiungersi posteriormente col labbro, estendendosi ben poco sul penultimo avvolgimento; delle tre pieghe columellari la posteriore è più allontanata e molto debole, le due anteriori sottili ed oblique abbastanza prominenti.

Esemplari. Pliocene	Mioc. Modenese	Siena	Altavilla			Monte Mario	Modenese	Patti
Lunghezza	6^{mm}	4^{mm}	5^{mm}	5^{mm}	$5{,}6^{mm}$	5^{mm}	$5{,}5^{mm}$	$5{,}8^{mm}$
Larghezza	$4{,}1^{mm}$	3^{mm}	$3{,}8^{mm}$	$3{,}7^{mm}$	4^{mm}	$3{,}4^{mm}$	4^{mm}	$4{,}1^{mm}$

Ritenendo come forma tipica la già descritta, ben rappresentata dalla figura del Morlet, bisogna ammettere talune varietà:

Var. 1. elongata. n.

Spira più sporgente ed assottigliata, apertura più stretta perchè il labbro è più ingrossato e meno curvo.

Esemplari. Pliocene	Altavilla		
Lunghezza	$4{,}5^{mm}$	5^{mm}	$4{,}5^{mm}$
Larghezza	3^{mm}	$3{,}4^{mm}$	3^{mm}

Var. 2. intermedia. n.

Apertura più allungata posteriormente e meno larga alla regione anteriore.

Questa forma segna una transizione tra questa e la precedente specie, avvicinandosi alla var. *longispira* di quella.

Esemplari. Pliocene	Altavilla		
Lunghezza	$5{,}8^{mm}$	5^{mm}	$4{,}4^{mm}$
Larghezza	$4{,}4^{mm}$	4^{mm}	$3{,}4^{mm}$

La *R. Brocchii* è forma tale che s'interpone tra la *R. auriculata* e la *R. Gaudryana*, le sue diverse modificazioni sono tutte ben distinte dalla prima, che ha l'apertura dilatata anteriormente; la forma tipica si allontana molto dalla *R. Gaudryana* per variati caratteri ben distinti, dimodochè le due specie sembrano assai diverse, ed invece esse offrono nelle graduali modificazioni presentate dalle descritte varietà delle forme che accennano ad anelli di congiunzione.

Giacimenti indicati. — Plioceno inferiore. Genova (M.), Altavilla (Seguenza, M.), Rinolgo presso Siena (M., De Stefani, Pantanelli), Castellarquato, Masserano (Seguenza, M.) Toscana, varî luoghi (Seguenza).

Giacimenti riconosciuti. — Plioceno inferiore (Astiano). Modenese (Coppi), Piacentino, Osterla, Cornarè! Altavilla! (Ciofalo, Brugnone), Calatabiano! Patti! Buccheri (Brugnone), Siena (Pantanelli). — Plioceno recente. M^te^ Mario (Rigacci).

Sp. 15. **Ringicula taurinensis** n. sp. 1879.

Tav. II, fig. 3, 3*a*, 3*b*.

Sinonimi.

1878. Ringicula ventricosa? L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 38.

Conchiglia ovato-ventricosa, abbastanza solida, colla superficie ornata da eleganti e sottili linee spirali, impresse e molto regolari; la spirale è breve; gli avvolgimenti sono cinque molto convessi e crescono rapidamente; l'ultimo è grande, ovato-ventricoso, ed oltrepassa in lunghezza i due terzi della totale lunghezza della conchiglia; l'apertura è dilatata anteriormente e si restringe e si allunga posteriormente terminandosi in un breve canale; il labbro è abbastanza ingrossato, pressochè retto nella porzione posteriore, prominente ed arcuato alla regione anteriore, fortemente marginato all'esterno; il margine columellare è curvo ed offre una callosità sottile, molto dilatata, che collegandosi col labbro si estende sino al penultimo avvolgimento; le tre pieghe columellari sono disuguali, l'anteriore è la più obliqua, la posteriore la più piccola.

Esemplari. Mioceno	Superga	
Lunghezza	6^{mm}	6,5^{mm}
Larghezza	4,5^{mm}	5^{mm}

Dai caratteri descritti parmi che questa specie del Mioceno medio sia proprio ben distinta. È probabile che essa sia stata dal Morlet riguardata dubitativamente siccome identica alla *R. ventricosa* del Crag inglese, ma da tale specie essa è distintissima pegli avvolgimenti tutti molto convessi e per la grandezza massima dell'ultimo, come anco per la grande estensione della tenue callosità columellare.

D'altronde la sua forma generale è quella di una *Cassis*, e l'estensione e la conformazione dell'apertura la distinguono assai bene dalle affini.

Giacimenti indicati. — Mioceno medio? Superga (M.).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Acquitaniano). Colline di Torino (Bellardi).

Sp. 16. **Ringicula exilis** Eichwald sp. 1829.

Sinonimi.

1829. Voluta exilis Eichwald, *Zoologia specialis potiss. Rossica et Poloniae.* Vol. I, p. 298, tav. V, fig. 15.
1850. Marginella exilis Eichwald, *Naturhist. Skizze von Lithauen, Volhynien, a, s, w.* Vol. I, p. 221.
1852. Ringicula exilis D'Orbigny, *Prodrome de pal.* Vol. III, pag. 37, n. 541.
1855. » » Pictet, *Traité de paléont.* Vol. III, pag. 102.
1855. » buccinea Eichwald, *Lethaea Rossica (Paléontologie de la Russie).* Vol. III, p. 258.
1862. » exilis Seguenza, *Sulla formazione miocenica di Sicilia*, pag. 11.
1878. » » L. Morlet, *Monogr. du genre* Ringicula, pag. 51, tav. VII, fig. 5.
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g.* Ringicula pag. 13, 29, 31.

Conchiglia ovata, poco spessa, colla superficie spiralmente striata; la spirale è prominente, conica, acuta, gli avvolgimenti sono convessi al numero di cinque e crescono con molta regolarità; l'ultimo globoso-ovato raggiunge quasi i due terzi della lunghezza della conchiglia; l'apertura è di forma allungata, ristretta e canaliculata alla regione posteriore; il labbro quasi retto nella maggior parte della sua lunghezza

s'inarca sporgendo anteriormente, ma inspessendosi ben poco; il margine columellare è alquanto inarcato, la callosità che lo investe poco estesa, s'inspessisce molto nella regione anteriore, e va a connettersi posteriormente col labbro, non estendendosi oltre la metà del penultimo avvolgimento; la piega anteriore è spessa, la seguente è abbastanza avvicinata ad essa, ma più sottile e meno obliqua, la posteriore è più lontana e meno sporgente.

Esemplari. Pliocene	Modenese		Altavilla	Mioceno Ciminna
Lunghezza	6,2^{mm}	5,2^{mm}	6^{mm}	4^{mm}
Larghezza	4^{mm}	3,3^{mm}	3,9^{mm}	2,5^{mm}

Var. minor. n.

Piccola forma col labbro e colla callosità columellare più inspessite, cogli avvolgimenti meno convessi.

Esemplari. Mioceno	Modenese		Stazzano
Lunghezza	3,5^{mm}	4,2^{mm}	4,3^{mm}
Larghezza	2,3^{mm}	3^{mm}	3^{mm}

La Ringicola del Mioceno e del Plioceno, che io riferisco alla specie dell'Eichwald, lascia in me dei dubbî rispetto alla sua determinazione, essendochè troppo incompleta ed insufficiente è la descrizione data dall'autore e riportata dal Morlet.

Questa forma si avvicina a talune modificazioni della *R. Brocchii* ed alla varietà della *R. Gaudryana.* Da entrambe distinguesi per l'ultimo avvolgimento più allungato, per la forma della bocca e per varî particolari.

Giacimenti indicati. — Mioceno superiore. Tortona, Stazzano, Sassuolo (M.). — Plioceno inferiore. Castelnuovo d'Asti, Castell'Arquato (M.), Altavilla (Seguenza). — Plioceno superiore? Girgenti (M.).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Acquitaniano). Superga (Bellardi). — Mioceno superiore (Tortoniano). Stazzano (Bellardi), Modenese (Coppi), Ciminna (Ciofalo). — Plioceno antico (Astiano). Modenese (Bellardi), Altavilla!

Sp. 17. **Ringicula elongata** L. Morlet. Var. Messanensis 1879.

Tav. II, fig. 5, 5*a*.

Sinonimi.

1878. Ringicula elongata L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 34, tav. VII, fig. 2.
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g.* Ringicula, pag. 11, 29 e 31.

Conchiglia ovato-elongata, sottile, regolarmente striata; avvolgimenti cinque e mezzo, poco convessi, e disgiunti da suture impresse; l'ultimo avvolgimento rigonfio, attenuato alquanto alla regione anteriore, della lunghezza circa di tre quinti della lunghezza totale della conchiglia; l'apertura è allungata e ristretta; il labbro è quasi retto e si protende incurvandosi ad arco alla regione anteriore, ed è poco incrassato nell'interno; il margine columellare è leggermente curvato ed incrostato da leggiera callosità assai ristretta che si estende sino sul penultimo avvolgimento associandosi al labbro; delle tre pieghe columellari la posteriore è piccola e molto obliqua, e ben allontanata dalle altre; le due anteriori sono molto sporgenti e solide.

Var. messanensis. Tav. II, fig. 5, 5*a*.

Avvolgimenti più convessi, suture profondate e quasi scanalate, labbro leggermente incavato all'esterno e più sporgente alla regione anteriore, superficie più fortemente striata, alla regione anteriore strie sottili raddoppiate, piega posteriore più allontanata.

Esemplari.	Tortoniano	Messina
Lunghezza	7,5^{mm}	7^{mm}
Larghezza	5^{mm}	4,6^{mm}

Pei caratteri indicati, la forma che io ho riferito a questa specie si allontana abbastanza dal tipo descritto dal Morlet e ne costituisce una insigne varietà.

Giacimenti indicati. — Plioceno antico. Altavilla (M.).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore (Tortoniano). Gravitelli presso Messina !

Sp. 18. **Ringicula Baylei** L. Morlet 1878.

Sinonimi.

1878. Ringicula Baylei L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 41, tav. VI, fig. 11.
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr.* ecc. pag. 12, 29 e 31.

Conchiglia ovale, spessa, globulosa alla parte anteriore, regolarmente striata in senso spirale; la spira è abbastanza sporgente, prominente e conica; gli avvolgimenti sono da sei e mezzo a sette, non molto convessi e disgiunti da suture semplici abbastanza impresse; l'ultimo avvolgimento considerevolmente rigonfio porta alla parte anteriore una smarginatura abbastanza pronunziata, e raggiunge i due terzi della conchiglia; l'apertura è oblonga, allargata e sporgente alla regione anteriore, ristretta posteriormente; il labbro è molto spesso e più verso la regione mediana, con un bordo esterno assai prominente, è pochissimo curvo nella sua maggior lunghezza, ma lo è fortemente ai due estremi, e specialmente alla regione anteriore dove si protende molto in forma d'arco; il margine columellare è curvo, la callosità che lo investe è più tosto sottile e dilatata, ma diviene più spessa alla regione anteriore, e va a congiungersi posteriormente col labbro incrostando il penultimo avvolgimento; la piega posteriore è meno prominente delle altre ed obliqua, le due anteriori sono larghe, sottili, e poco oblique.

Esemplàri.	Mioceno Bordeaux	Bordeaux	Torino
Lunghezza	7,8^{mm}	6,9^{mm}	8,2^{mm}
Larghezza	5,4^{mm}	5^{mm}	5,7^{mm}

L'unico esemplare italiano che io vi rapporto ho potuto compararlo con due esemplari della mia collezione, provenienti dal Mioceno di Bordeaux, che sono d'una conservazione perfettissima e sembrano usciti or ora dal mare, tanto da conservare tuttavia un bel colorito, leggermente grigio-ceruleo su tutta la conchiglia, ed un roseo chiaro sui margini dell'apertura, specialmente sul labbro. L'esemplare italiano è del Mioceno medio di Torino: esso conviene esattissimamente colle figure e la descrizione dell'autore, e quantunque abbia la spira alquanto più prominente degli esemplari di Bordeaux, pure esso conviene con essi sino in tutti i minimi particolari, ed

il labbro conserva un colorito roseo, che viene un po' mascherato da una leggiera tinta gialliccia acquistata da tutta la conchiglia per la fossilizzazione.

Questa specie per la forma generale ricorda alquanto la mia *R. Hoernesii,* ma ne è diversissima per la mancanza della quarta piega, per la spira più lunga e per tante altre particolarità.

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Acquitaniano). Torino (Bellardi).

Sp. 19. **Ringicula Mariae** n. sp. 1879.

Tav. II, fig. 6, 6*a*, 7, 7*a*.

Conchiglia ovato-oblonga, anteriormente dilatata, solida ed incrassata, colla superficie striata spiralmente; la spirale è conica, acuta; gli avvolgimenti quasi appianati, sono al numero di 6-7; l'ultimo ovato convesso supera i tre quinti della totale lunghezza della conchiglia; l'apertura è larga anteriormente e ristretta molto alla regione posteriore, dove si termina con una scanalatura; il labbro è molto incrassato internamente, poco curvo ed invece s'inarca alla regione anteriore, formando una smarginatura profonda là dove si connette col margine columellare, il margine esterno abbastanza spesso è inoltre molto largo; il margine columellare è poco curvo, la callosità che lo investe è sottile, ma si allarga molto, e s'ingrossa alla regione anteriore, posteriormente si connette col labbro incrostando il penultimo avvolgimento sin presso alla sua sutura posteriore; la piega posteriore è poco sporgente, le due anteriori, abbastanza allontanate, poco oblique, sono molto prominenti.

Esemplari. Mioceno	Torino	Torino
Lunghezza	$7{,}7^{mm}$	7^{mm}
Larghezza	5^{mm}	$5{,}4^{mm}$

Questa specie della collina di Torino è molto ben distinta per la sua spira prominente, molto acuta ed esattamente conica, costituita d'avvolgimenti quasi piani o leggermente convessi. Essa ha l'apertura dilatata anteriormente come nella *R. auriculata,* dalla quale è d'altronde distintissima per gli altri suoi caratteri, i quali la differenziano benanco dalla *R. exilis,* che per la figura data dal Morlet cui risponde la forma che vi riferisco è più breve, più rigonfia, cogli avvolgimenti più convessi.

Var. gracilis. Tav. II, fig. 7, 7*a*.

Forma della conchiglia più snella, ultimo avvolgimento proporzionalmente più breve.

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio. Torino (Bellardi). Forma tipica e varietà.

Sp. 20. **Ringicula Crossei** L. Morlet 1878.

Sinonimi.

1878. Ringicula Crossei L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 43, tav. VII, fig. 11.
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du genre* Ringicula, pag. 29 e 31.

Conchiglia ovale, sottile, finamente ed elegantemente striata in senso spirale; spira acuta, composta di sei giri un poco convessi, che si accrescono gradualmente, separati da una sutura ben distinta; l'ultimo avvolgimento forma i tre quinti della

totale lunghezza della conchiglia; l'apertura è obliqua; i bordi sono riuniti da un deposito calloso assai forte; il bordo columellare, guarnito da tre pieghe, è un poco dilatato alla parte superiore, le pieghe sono sottilissime; il bordo destro è dilatato, appiattito leggermente al di sotto, guarnito sopra i quattro quinti della sua lunghezza da crenature finissime che s' immergono nell' interno della conchiglia, ed è munito d'un leggiero cercine esterno (L. Morlet).

Esemplare.	Tortoniano-Tortona
Lunghezza	4,5^{mm}
Larghezza	2,7^{mm}

Questa specie che non conosco in natura, perchè manca nei materiali da me raccolti, par che sia distintissima dalle specie affini mioceniche e plioceniche italiane sopratutto pel labbro internamente crenato.

Giacimenti indicati. — Mioceno superiore (Tortoniano). Tortona (Morlet).

Sp. 21. **Ringicula Tournoueri** L. Morlet 1878.

Tav. II, fig. 4, 4*a*, 4*b*.

Sinonimi.

1878. Ringicula striata S. Ciofalo, *Alcune osservazioni sul Mioceno di Ciminna*, pag. 7.
1878. Ringicula Tournoueri L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 57, tav. VI, fig. 10.
1880. » » Seguenza, *Le formazioni terziarie di Reggio* (*Calabria*), pag. 50.
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g.* Ring. pag. 13, 29 e 32.

Conchiglia elongata, ovvero ovato-oblonga, sottile, regolarmente striata in traverso; i giri di spira, al numero di sei, sono mediocremente convessi e disgiunti da suture assai ben distinte, costituendo una spirale conica, acuta; l'ultimo avvolgimento arrotondato anteriormente e globoso ben raramente appena raggiunge i quattro settimi della conchiglia; apertura larga anteriormente che si restringe alla regione posteriore; il labbro è quasi retto, ingrossato, specialmente alla parte mediana, e con un forte margine esterno, sovente molto largo; il margine columellare è arcuato, la callosità che lo ricuopre è poco allargata, ma spessa, sopratutto sulla regione anteriore, posteriormente si connette col labbro incrostando appena il margine anteriore del penultimo avvolgimento; la piega posteriore distante è poco sporgente, le due anteriori sono pressochè parallele, molto sporgenti ed oblique.

Esemplare. Mioceno	Stilo
Lunghezza	4,9^{mm}
Larghezza	3^{mm}

Var. 1. sicula. n. Tav. II, fig. 4, 4*a*, 4*b*.

Il labbro alla parte posteriore si allontana dal margine columellare più di quanto lo è nella forma tipica; gli avvolgimenti sono più convessi, le suture più profonde; le strie spirali che ornano la superficie sono più rade o mancano del tutto sopra una parte della regione posteriore degli avvolgimenti.

Esemplari. Tortoniano	Ciminna			
Lunghezza	4,5^{mm}	3,8^{mm}	4,7^{mm}	4,2^{mm}
Larghezza	2,5^{mm}	2,6^{mm}	2,5^{mm}	2,6^{mm}

Var. 2. gracilior. n.

Forma più snella della precedente, suture profondate e quasi scanalate, strie spirali più numerose e ravvicinate, rarissime sulla regione posteriore degli avvolgimenti, che sono di forma più allungata.

Esemplare. Tortoniano	Rometta
Lunghezza	3,5^{mm}
Larghezza	2,2^{mm}

Var. 3. subcostulata. n.

Forma abbreviata, superficie ornata dagli indizî di costole longitudinali.

Esemplare. Tortoniano	Ciminna
Lunghezza	3,7^{mm}
Larghezza	2,2^{mm}

La *R. Tournoueri* è specie che si approssima alla *R. elongata* ed alla *R. Paulucciae:* dalla prima sopratutto distinguesi per essere più piccola, di forma più allungata, e colla spira proporzionalmente più lunga; il labbro quasi retto e varî altri particolari la distinguono dalla seconda.

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Superga (M.), Termo-Foura (M.). — Mioceno superiore. Sassuolo (M.). — Plioceno antico. Castelnuovo d'Asti (M.).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Acquitaniano). Stilo! (Prov. di Reggio). — Mioceno superiore (Tortoniano). Ciminna! (Prov. di Palermo) Var. 1. e var. 3. (Ciofalo), Rometta! (Provincia di Messina) Var. 2.

Sp. 22. **Ringicula Bonellii** Deshayes 1838.

Sinonimi.

Auricula punctilabris Bonelli, *Denominationes ineditae Testaceorum Musei Zoologici Taurinensis*, n. 167.

1838. Ringicula Bonellii Deshayes. Lamarck, *Anim. sans vertèbres*, 2 édit. vol. VIII, pag. 344, n. 546.

1840. Pedipes punctilabrum Michelotti, *Rivista di alcune specie foss. della fam. dei Gasteropodi*, pag. 6.

1847. Ringicula Bonellii Michelotti, *Précis de la faune miocénique de la Haute Italie*, pag. 152. tav. V, fig. 11, 12.

1847. » punctilabrum Sismonda, *Synopsis meth. invert. Pedemontii foss.* pag. 52.

1848. » Bonellii Bronn, *Index palaeontologicus Nomenclator*, pag. 1089.

1850. » » Deshayes, *Traité élémentaire de Conch.* tav. LXXXVII, fig. 4, 6.

1852. » » D'Orbigny, *Prodrome de paléont. univ.* Tom. III, pag. 27, n. 546.

1855. » » Pictet, *Traité de paléontologie.* Tom. III, pag. 101.

1873. » » G. Cocconi, *Enumeratione sistematica dei molluschi miocenici e pliocenici della provincia di Parma e di Piacenza*, pag. 134.

1878. » » T. Fuchs, *Studien über die Gliederung der jungeren Tertiarb.* pag. 52.

1878. » » L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, pag. 32, tav. VI, fig. 13.

1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g.* Ringicula, pag. 29, 31.

Conchiglia ovata, incrassata, e solida; colla superficie ornata da solchi spirali abbastanza profondi, i quali sembrano retti ad occhio nudo, ma sotto l'ingrandimento d'una lente si presentano finissimamente flessuose formando un tenuissimo *zig-zag* molto regolare; spira brevissima, convessa, coll'apice acuminato; avvolgimenti quattro e

mezzo, convessi, crescenti con grande celerità e disgiunti da suture profondate e più o meno scanalate; l'ultimo avvolgimento è grandissimo, globoso, ovato e supera talvolta i quattro quinti della totale lunghezza della conchiglia; l'apertura molto allungata è abbastanza larga alla regione anteriore e si restringe assottigliandosi gradatamente verso la parte posteriore; tutto il peristoma è segnato da disuguali, piccoli ed irregolari incavi; il labbro è curvo e s'inspessisce gradatamente all'interno nella sua porzione centrale, dove per una porzione più o meno lunga si presenta crenato; il margine columellare è leggermente curvo, la callosità che lo investe è spessa e bastantemente estesa, alla parte posteriore incrosta il penultimo avvolgimento congiungendosi al labbro; la piega anteriore è molto obliqua e flessuosa, la seconda è più spessa e più prominente, la posteriore molto vicina alla precedente sporge in forma stretta ma spessa.

Esemplari. Mioceno	Torino			
Lunghezza	10^{mm}	$9{,}4^{mm}$	9^{mm}	8^{mm}
Larghezza	$7{,}3^{mm}$	$7{,}4^{mm}$	7^{mm}	$6{,}8^{mm}$

Specie distintissima per tutti quanti i suoi caratteri, ma insieme abbastanza variabile nella sua forma generale, che suole presentarsi più o meno oblonga, siccome la crenatura della porzione mediana interna del labbro è più o meno estesa e variabilissima nella grandezza e forma dei dentelli, giungendo in taluni esemplari sino a scomparire del tutto.

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Superga (M. Sismonda, Michelotti), Termo-Foura (M.), Baldissero (M.).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno medio (Acquitaniano). Colline di Torino (Bellardi, Michelotti, Rovasenda).

C. Superficie ornata
da solchi spirali e da costole o pieghe longitudinali.

Sp. 23. **Ringicula costata** Eichwald sp. 1830.

Tav. II, fig. 9, 9*a*, 9*b*, 10, 10*a*.

Sinonimi.

1830. Marginella costata Eichwald *Naturhist. Skizze von Lithauen, Volhynien u. s. w*, pag. 221.
1831. » cancellata Dubois, *Conch. foss. du plat. Volhynien Podol.* Vol. I, pag. 24, tav. I, fig. 17-18.
1848. Ringicula costata Bronn, *Index paleontologicus Nomenclator*, pag. 1089.
1852. » » D'Orbigny, *Prodrome de paléont. univ.* Vol. III, pag. 37, n. 545.
1855. » » Eichwald, *Lethaea Rossica ou paléontologie de la Russie.* Vol. III, pag. 259, tav. X, fig. 44, *a*, *b*, *c*.
1855. » » Pictet, *Traité de paléontologie.* Vol. III, pag. 101.
1856. » » Hörnes, Abhandl. der kaiserl. köning. geolog. Reichsanstalt. Vol. I, pag. 88, tav. IX, fig. 5, *a*, *b*, *c*, *d*.
1862. » » G. Seguenza, *Notizie succinte intorno alla costituzione geolog. dei terr. terz. del distr. di Messina*, pag. 11.
1862. » » P. Doderlein, *Cenni geologici intorno la giacitura dei terreni miocenici superiori dell'Italia centr.* pag. 17.
1878. » » L. Morlet, *Monographie du genre* Ringicula, p. 33 (esclusa la figura che evidentemente non appartiene a questa specie).
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr. du g.* Ringicula, pag. 29 e 31.

Conchiglia piccolissima, ovata ovvero ovato-oblonga, longitudinalmente costata e trasversalmente striata da forti e profonde strie; spira prominente alquanto ottusa; avvolgimenti quattro, convessi; l'ultimo circa tre quinti della totale lunghezza e di forma globosa; l'apertura è larga verso la parte mediana e si restringe ai due estremi assumendo una forma specialissima quasi semicircolare; il labbro è incurvato fortemente ingrossato all'interno verso la regione mediana, marginato esternamente; il margine columellare è fortemente arcuato, la callosità che lo ricuopre è assai ristretta e ben limitata; le due pieghe anteriori sono pressochè uguali e molto oblique, la posteriore acuta e molto spessa assume una direzione obliquissima e pressochè perpendicolare alle altre due.

Esemplari. Tortoniano	Ciminna	
Lunghezza	1,4^{mm}	1,5^{mm}
Larghezza	1^{mm}	1,1^{mm}

Var. sicula. n. Tav. II, fig. 9, 9*a*, 9*b*.

Conchiglia di forma breve e molto globosa alla regione anteriore, avvolgimenti angolosi e quasi carenati ed appianati posteriormente, il margine del labbro porta un distintissimo angolo alla parte posteriore.

Esemplari. Tortoniano	Ciminna	Rometta	
Lunghezza	1,5^{mm}	1,7^{mm}	1,7^{mm}
Larghezza	1^{mm}	1,2^{mm}	1,1^{mm}

Var. tenuis. n. Tav. II, fig. 10, 10*a*.

Forma della conchiglia più snella, costole longitudinali e strie spirali più numerose e quindi più ravvicinate, perlochè formano una sottile scultura reticolata.

Esemplare. Tortoniano	Ciminna
Lunghezza	1,6^{mm}
Larghezza	1^{mm}

La *R. costata* è specie distintissima per la sua scultura nonchè pei caratteri tutti dell'apertura. Le due forme da me raccolte in Sicilia sono da riportarsi, come io ho fatto, a varietà della forma tipica raccolta in Volhynia ed a Vienna. Le figure date dall'Hoernes mostrano una forma più allungata di quella della Volhynia siccome viene rappresentata dal Dubois; quella si avvicina di più alla mia var. *tenuis*, questa somiglia meglio alla mia var. *sicula*, entrambe d'altronde presentano tale insieme di caratteri da andar bene associate in unica specie.

Il Morlet intanto nella sua Monografia pur riportando testualmente la diagnosi dell'Eichwald, e la località della Volhynia dà una figura che non conviene affatto con quelle conosciute, nè tampoco cogli esemplari da me descritti. Sarebbe quella forse la figura di un individuo giovane? A me sembra che nemmeno questa benevola interpretazione possa essere esatta, dappoichè la forma dell'apertura ed i varî particolari che tanto bene la caratterizzano non si riscontrano affatto nella figura del Morlet: il labbro che in questa si protende tanto anteriormente sotto forma d'arco, è uno dei più rilevanti caratteri affatto estranei alla *R. costata*.

Giacimenti indicati. — Mioceno superiore (Tortoniano). Modenese (Doderlein).

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore (Tortoniano). Rometta! (Prov. di Messina) Var. 1, Ciminna! (Prov. di Palermo) Var. 1. e 2.

Sp. 24. **Ringicula cancellarioides** n. sp. 1879.

Tav. II, fig. 11, 11*a*.

Conchiglia ovato-elongata, piccola, assottigliata alquanto verso l'apice, ma un po' ottusa, colla superficie ornata di costole longitudinali considerevolmente prominenti, pressochè uguali in larghezza agli interstizî che le separano, e da solchi spirali abbastanza profondi; la spirale è prominente, lunga, conica; gli avvolgimenti sono al numero di cinque molto convessi e disgiunti da suture profonde; l'ultimo è rigonfio, globoso, e presenta una varice alla parte inferiore, la lunghezza sua supera appena la metà della totale lunghezza della conchiglia; l'apertura è di forma alquanto allungata e variamente angolosa; il labbro è arcuato e fortemente inspessito nella porzione mediana all'interno, all'esterno offre un margine molto spesso e largo; il margine columellare è poco curvo, la callosità che lo ricuopre è poco estesa; la piega anteriore è più grossa della media, la posteriore è sporgente ed acuta.

Esemplare. Mioceno	Sassuolo
Lunghezza	3mm
Larghezza	1,7mm

Questa specie è prossima alla precedente, ma parmi ben distinta per la proporzione in lunghezza dell'ultimo avvolgimento, per le costole meno numerose e più prominenti, per le differenze dell'apertura ecc.

Neanco questa specie, della sezione delle costate come la precedente, può rapportarsi alla figura del Morlet, riferita alla *R. costata;* anzi la nuova specie parmi che non abbia alcun rapporto di somiglianza con quella figura.

Giacimenti riconosciuti. — Mioceno superiore (Tortoniano). Sassuolo! (Modenese).

Sezione III. — *Due sole pieghe columellari.*

A. Colla superficie spiralmente striata.

Sp. 25. **Ringicula leptocheila** Brugnone 1876.

Sinonimi.

1870. Ringicula ventricosa J. G. Jeffreys (non Sowerby) *Mediterranean mollusca*, pag. 20.
1872. Ringicula . . . . . . sp. Mse. Monterosato. *Notizie intorno alle conchiglie fossili di Monte Pellegrino e Ficarazzi.* pag. 34.
1873. » leptocheila Brugnone, *Miscellanea malacologica*, 1ª parte, pag. 11, tav. 1. fig. 18.
1875. » » G. Seguenza, *Studi stratigrafici sul plioc. dell'Italia merid.* (Bull. del r. Com. geol. Vol. VI, pag 152).
1875. » » Mse. Monterosato, *Poche note sulla Conchiologia mediterr.*, p. 14. n. 120.
1875. » » Mse. Monterosato, *Nuova rivista delle conchiglie mediterr.* p. 45, n. 761.
1877. » » Mse. Monterosato, *Catalogo delle conchiglie foss. di Monte Pellegrino e Ficarazzi presso Palermo,* pag. 13.

1878. Ringicula leptocheila Mse. Monterosato, *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee*, pag. 48.
1878. » » L. Morlet, *Monogr. du genre* Ringicula p. 20 e p. 56, t. V, fig. 17.
1880. » » L. Morlet, *Suppl. à la Monogr.* pag. 2, 28 e 30.
1880. » » G. Seguenza, *Le formaz. terz.* pag. 253.

Conchiglia ovato-acuminata, ventricosa, sottile, colla superficie levigata ed ornata trasversalmente da strie spirali sottili e puntate e da esili linee di accrescimento; la spirale è poco prominente; gli avvolgimenti sono cinque, molto convessi; l'apertura è grande ed allargata, poco ristretta alla parte posteriore; l'ultimo avvolgimento rigonfio e di forma globosa non raggiunge i tre quinti della totale lunghezza della conchiglia; il labbro è curvo e poco ingrossato pel margine esterno ben poco spesso e pochissimo largo; la columella offre un margine fortemente curvo incrostato d'una callosità esilissima ed estremamente ristretta; le due pieghe columellari sono ravvicinate, prominenti, sottili ed alquanto oblique, la posteriore manca del tutto, ovvero v'ha un lievissimo indizio molto allontanato dalle precedenti due pieghe.

Esemplari. Plioceno rec.	M.te Pellegrino	Ficarazzi		
Lunghezza	4^{mm}	5^{mm}	5^{mm}	$4{,}6^{mm}$
Larghezza	$2{,}8^{mm}$	$3{,}7^{mm}$	$3{,}6^{mm}$	3^{mm}

Questa specie è molto distinta pei suoi avvolgimenti rigonfii e quasi globosi, per l'apertura larga, e per il margine pochissimo ingrossato, i quali caratteri dànno a questa Ringicola tale una fisonomia da non potersi confondere con veruna altra.

Giacimenti indicati. — Mioceno medio. Superga (M.). — Plioceno superiore. Ficarazzi e Monte Pellegrino (M. Brugnone).

Giacimenti riconosciuti. — Plioceno antico (Astiano). Rometta! (Prov. di Messina), Gallina! (presso Reggio). — Plioceno recente. Ficarazzi (Brugnone), Monte Pellegrino! (Brugnone), Fiume Oreto (Brugnone).

Stazione. — Mediterraneo, Atlantico.

B. Colla superficie levigata e sfornita di linee spirali.

Sp. 26. **Ringicula calabro-sicula** n. sp. 1880.

Sinonimi.

1880. Ringicula biplicata Seguenza, *Le formazioni terziarie nella Prov. di Reggio (Calabria)*, pag. 252, tav. XVI, fig. 13, 13*a*. (Non Sow.).

Conchiglia di forma ovata più o meno allungata, colla spira abbastanza prominente ed acuta; avvolgimenti sei alquanto convessi e disgiunti da suture impresse; l'ultimo rigonfio raggiunge circa i due terzi o poco più della lunghezza totale della conchiglia, che è poco solida e colla superficie levigata, mostrando appena lievissime linee di accrescimento; la bocca larga si restringe molto ma gradatamente verso l'angolo acuto posteriore; il labbro è ben arcuato, poco spesso perchè la marginatura esterna e l'inspessimento interno sono poco considerevoli; il margine columellare è incurvato, la callosità che lo ricuopre, poco spessa, si estende poco al di fuori dell'ambito dell'apertura, e talvolta, pel tenue spessore sembra mancare del tutto.

Le due pieghe columellari sono solide, prominenti e considerevolmente allontanate; della terza piega, la posteriore, non v'ha alcun menomo indizio.

Esemplari. Astiano	Gallina			
Lunghezza	8,7^{mm}	8,3^{mm}	7,7^{mm}	8^{mm}	7,8^{mm}
Larghezza	5,8^{mm}	5,7^{mm}	5^{mm}	5^{mm}	5^{mm}

Var. 1. inflata. Seg.

1880. R. biplicata var. *inflata* Seguenza, *Le formazioni terziarie* ecc. pag. 253, tav. XVI, fig. 13.

Questa forma differisce soltanto dalla tipica per essere più rigonfia, e quindi di forma più globosa. Talvolta ha anco il labbro più inspessito e sovente più ingrossato verso la regione mediana.

Esemplari. Astiano	Gallina		
Lunghezza	10^{mm}	8,7^{mm}	8,6^{mm}
Larghezza	7^{mm}	6,2^{mm}	6^{mm}

Var. 2. elongata. Seg.

1880. R. biplicata var. *elongata* Seguenza, *Le formazioni terziarie* ecc. pag. 253, tav. XVI, fig. 13*a*.

Questa varietà è considerevolmente più gracile, ha inoltre la bocca più stretta e l'ultimo avvolgimento più breve. Del resto fa graduatissimo passaggio, come la precedente, alla forma tipica.

Esemplari. Astiano	Gallina			
Lunghezza	8^{mm}	8,3^{mm}	7,8^{mm}	8,5^{mm}
Larghezza	4,8^{mm}	5^{mm}	5^{mm}	5,2^{mm}

Questa specie è distintissima da tutte le conosciute.

A prima giunta potrebbe sembrare una delle tante varietà della *R. buccinea*, ma basta il solo carattere del difetto della piega posteriore per renderla distintissima; inoltre ha la spira più lunga e più acuminata, la superficie levigatissima, il labbro poco spesso, ed è molto più sottile nella sua consistenza.

Più vicina assai è la mia specie alla precedente, ma quella ha gli avvolgimenti più convessi ed è spiralmente striata. Le altre specie a due pieghe columellari, riportate dal Morlet nella sua Monografia e nel supplimento, spettano al Mioceno inferiore, all'eoceno ed al cretaceo e differiscono dalla mia per le linee spirali, oltrechè per le varie note distintive di ciascuna.

Giacimenti riconosciuti. — Plioceno antico (Astiano). È comune a Gallina presso Reggio (Calabria). Rara invece a Calatabiano (Sicilia).

Qualche frammento par che accenni anco l'esistenza di questa specie nel territorio di Messina.

Quadro sinottico della distribuzione geografic[a]

Num.	NOMI DELLE SPECIE	PIAN[O]																
		Miocene																
		ACQUITANIANO					LANGHIANO	ELVEZIANO	TORTONIANO									
		Superga	Bacedasco	Baldissero	Termo-Foura	Stilo	Stilo	Sciolze	Monte Gibio	Stazzano	Sogliano	Benestare	Ciminna	Rometta	Messina	Cassina-Rizzardi	Osterla	M[illegible]
1	Ringicula crassa Seguenza	.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	
2	» conformis Monterosato	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—
3	» gigantea Doderlein	.	.	.	.	.	.	.	+	—	.	.	.	.	.	.	.	
4	» Hörnesii Seg.	.	.	.	.	.	.	.	+?	.	.	.	.	.	.	.	.	
5	» buccinea Brocchi sp.	+	—	.	.	.	.	.	+	—	—	.	+	.	.	—	+	—
6	» marginata Deshayes	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	
7	» doliiformis Seg.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
8	» calabra Seg.	.	.	.	.	.	.	+	+	+	.	+	.	.	.	.	.	
9	» africana Morlet	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
10	» Grateloupii D'Orbigny	—	.	—	.	.	.	+	+	+	.	.	+	.	.	.	.	
11	» auriculata Ménard	—	.	.	.	.	.	.	—	.	.	+	.	.	.	.	+	—
12	» placentina Seg.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
13	» Gaudryana Morl.	—	—	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	+	+
14	» Brocchii Seg.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	—
15	» taurinensis Seg.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
16	» exilis Eichwald	+	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	+	.	.	.	.	
17	» elongata Morl.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	
18	» Baylei Morl.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
19	» Mariae Seg.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
20	» Crossei Morl.	.	.	.	.	.	.	.	.	—	.	.	.	.	.	.	.	
21	» Tournoueri Morl.	—	.	.	—	+	.	.	—	.	.	.	+	+	.	.	.	
22	» Bonellii Desh.	+	.	+	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
23	» costata Eichw.	.	.	.	.	.	.	.	—	.	.	.	+	+	.	.	.	
24	» cancellarioides Seg.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	
25	» leptocheila Brugnone	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
26	» calabro-sicula Seg.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

stratigrafica delle Ringicole italiane.

OLOGICI E LUOGHI

	Pliocene																													Quaternario					Mari attuali	
	Pliocene antico																					Pliocene recente														
Villalvernia	Astigiano	Cornarè	Savona	Albenga	Genova	Piacentino	Modenese	Bolognese	Castrocaro	Sienese	Peccioli	Orciano	Livorno	Gallina	Altavilla	M.te S. Giuliano	Messina	Girgenti	Calatabiano	Patti	Buccheri	Vallebiaia	Monte Mario	Cosentino	Ficarazzi	F.e Oreto	M.e Pellegrino	P.e Giannettello	Messina	Gravina	Catanzaro	Reggio	Messina	Cefalù	Mediterraneo	Atlantico
.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	—	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+	+
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+	+	+	+	—	+	+	+	+	—	+	+	+	—	—	+	.	.	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	—	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
—	—	.	.	.	—	.	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	—	+	—	+	—	+	.	+	.	—	+	+	+	—	+	+
.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	—	.	+	.	+	—	+	+	.	+	+	+	+	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	+	.	.	—	+	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	+	+	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	—	.	.	.	.	—	+	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	+	+
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Quadro sinottico della distribuzione geografica e stratigrafica delle Ringicole italiane.

Num.	NOMI DELLE SPECIE	PIANI GEOLOGICI E LUOGHI																																																					
		Miocene																	Pliocene																																		
		ACQUITANIANO					LANGHIANO	ELVEZIANO	TORTONIANO										PLIOCENO ANTICO																						PLIOCENO RECENTE								QUATERNARIO					MARI ATTUALI	
		Superga	Bacedasco	Baldissero	Termo-Foura	Stilo	Stilo	Sciolze	Monte Gibio	Stazzano	Sogliano	Benestare	Ciminna	Rometta	Messina	Cassina-Rizzardi	Osteria	Masserano	Villalvernia	Astigiano	Cornarè	Savona	Albenga	Genova	Piacentino	Modenese	Bolognese	Castrocaro	Sienese	Peccioli	Orciano	Livorno	Gallina	Altavilla	M.te S. Giuliano	Messina	Girgenti	Calatabiano	Patti	Buccheri	Vallebiaia	Monte Mario	Cosentino	Ficarazzi	F.e Oreto	M.e Pellegrino	P.o Giannettello	Messina	Gravina	Catanzaro	Reggio	Messina	Cefalù	Mediterraneo	Atlantico
1	Ringicula crassa Seguenza	.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	» conformis Monterosato	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—	.	.	.	—	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+	+
3	» gigantea Doderlein	.	.	.	.	.	.	.	+	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	» Hörnesii Seg.	.	.	.	.	.	.	.	+?	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	» buccinea Brocchi sp.	+	—	.	.	.	.	.	+	—	—	.	+	.	.	—	+	+	+	+	+	+	—	+	+	+	+	—	+	+	+	+	+	+	.	.	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	» marginata Deshayes	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	» doliiformis Seg.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	» calabra Seg.	.	.	.	.	.	.	+	+	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	» africana Morlet	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	» Grateloupii D'Orbigny	—	.	—	.	.	.	+	+	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	» auriculata Ménard	—	.	.	.	.	.	.	—	.	.	+	.	.	.	.	+	—	—	—	.	.	.	—	.	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	—	+	—	+	—	+	.	+	.	—	+	+	+	—	+	+
12	» placentina Seg.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	» Gaudryana Morl.	—	—	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	+	+	.	—	.	+	.	+	—	+	+	.	+	+	+	+	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.
14	» Brocchii Seg.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	—	.	.	+	.	.	—	+	+	.	.	+	.	.	.	.	+	.	.	.	+	+	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	» taurinensis Seg.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	» exilis Eichwald	+	.	.	.	.	.	.	+	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	—	.	.	.	.	—	+	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	» elongata Morl.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	» Baylei Morl.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	» Mariae Seg.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	» Crossei Morl.	.	.	.	.	.	.	.	.	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	» Tournoueri Morl.	—	.	.	—	+	.	.	—	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	» Bonellii Desh.	+	.	+	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	» costata Eichw.	.	.	.	.	.	.	.	—	.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	» cancellarioides Seg.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	» leptocheila Brugnone	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+	.	.	.	.	.	.	.	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	+	+
26	» calabro-sicula Seg.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	+	.	+	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE.

Tavola I.

Ringicula crassa n. sp. — 1. 1*a*. Un esemplare dell'Astiano d'Asti veduto in due posizioni. - 1*c*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula conformis Monterosato. Var. *gracilis* n. — 2. Un esemplare dell'Astiano d'Altavilla. - 2*a*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula buccinea Brocchi sp. var. *globosa* e var. *elongata* n. — 3. Un esemplare giovine dell'Astiano d'Altavilla. - 3*d* Sue dimensioni. - 3*a*. Var. *elongata*. Un esemplare della stessa provenienza. - 3*e*. Sue dimensioni. - 3*b*. Var. *globosa* del medesimo giacimento. - 3*c*. Dimensioni del precedente esemplare.

Ringicula Hoernesii n. sp. — 4. 4*a*. Un esemplare veduto in due posizioni, proveniente dal Tortoniano di Baden (Bacino di Vienna). - 4*b*. Sue dimensioni.

Ringicula marginata Deshayes. — 5. 5*a*. Un esemplare dell'Astiano d'Asti veduto in due posizioni. - 5*b*. Sue dimensioni.

Ringicula doliiformis n. sp. — 6. 6*a*. Un esemplare del Mioceno medio di Torino figurato in due posizioni. - 6*b*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula calabra. Seguenza. — 7. 7*a*. Un esemplare del Tortoniano di Benestare veduto in due posizioni. - 7*b*. Dimensioni dello stesso. - 8. Var. *ornata*. Un esemplare del Tortoniano di Benestare in due posizioni. - 8*a*. Grandezza dello stesso.

Ringicula auriculata Ménard. sp. Var. *incrassata*. n. — 9. 9*a*. - Un esemplare dell'Astiano d'Altavilla. - 9*b*. Dimensioni dello stesso.

Tavola II.

Ringicula auriculata Ménard. sp. Var. *crispata* n. — 1. Un esemplare del Plioceno recente di Oreto della collezione dell'Ab. Brugnone. - 1*a*. Grandezza dello stesso.

Ringicula placentina n. sp. — 2. 2*a*. Un individuo dell'Astiano del Piacentino veduto in due posizioni. - 2*b*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula taurinensis n. sp. — 3. 3*a*. Un esemplare del Mioceno medio della collina di Torino rappresentato in due diverse posizioni. - 3*b*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula Tournoueri Morlet. Var. *sicula*. n — 4. 4*a*. Un esemplare del Tortoniano di Ciminna veduto in due posizioni. - 4*b*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula elongata Morlet. Var. *messanensis*. n. — 5. Un esemplare del Tortoniano presso Messina. - 5*a*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula Mariae n. sp. — 6. Un esemplare del Mioceno medio di Torino. - 6*a*. Dimensioni dello stesso. - 7 Var. *gracilis*. Esemplare dello stesso giacimento. - 7*a*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula Gaudryana Morlet. Var. *longispira*. n. — 8. Esemplare dell'Astiano del Modenese. - 8*a*. Dimensioni dello stesso.

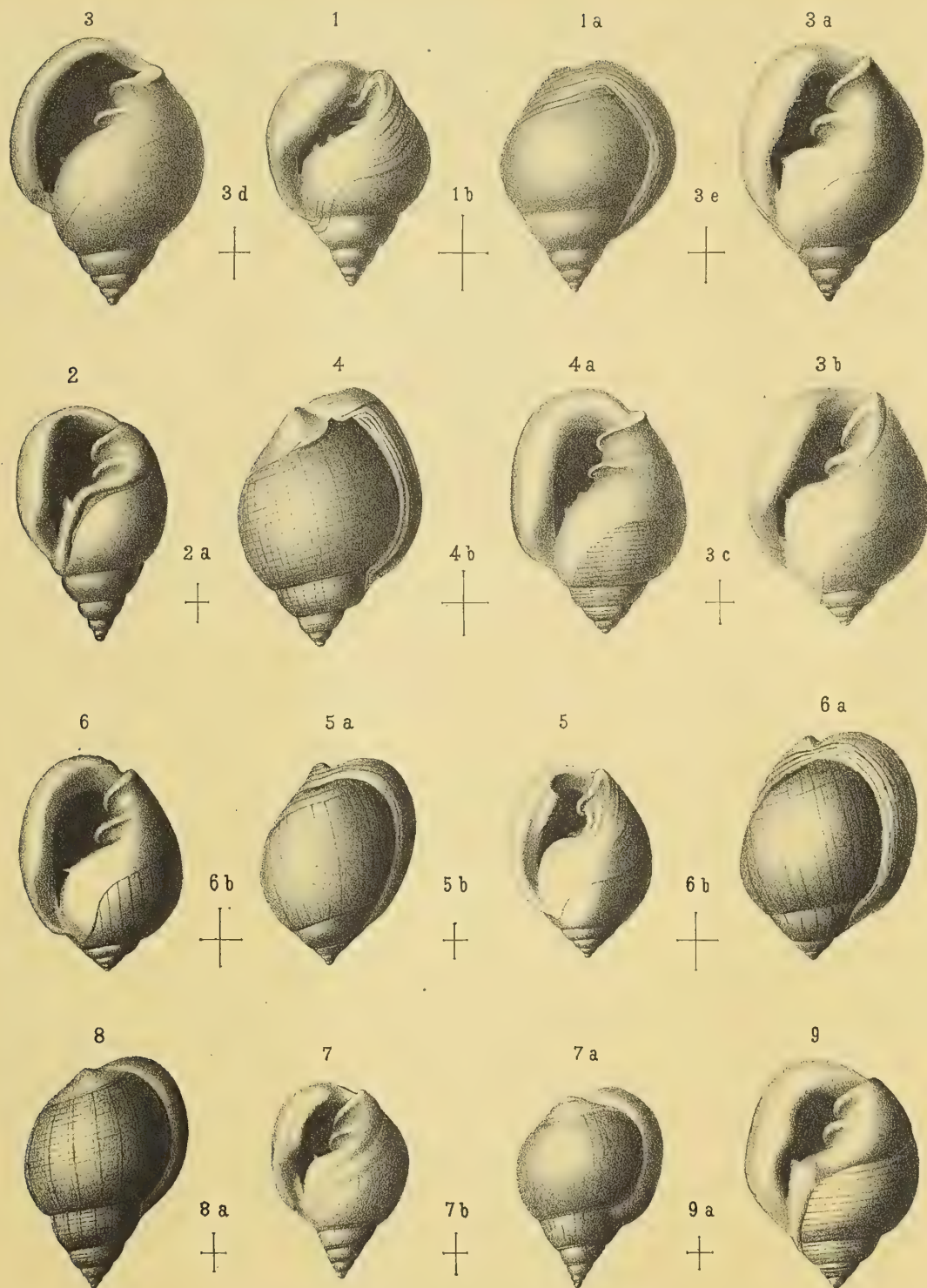
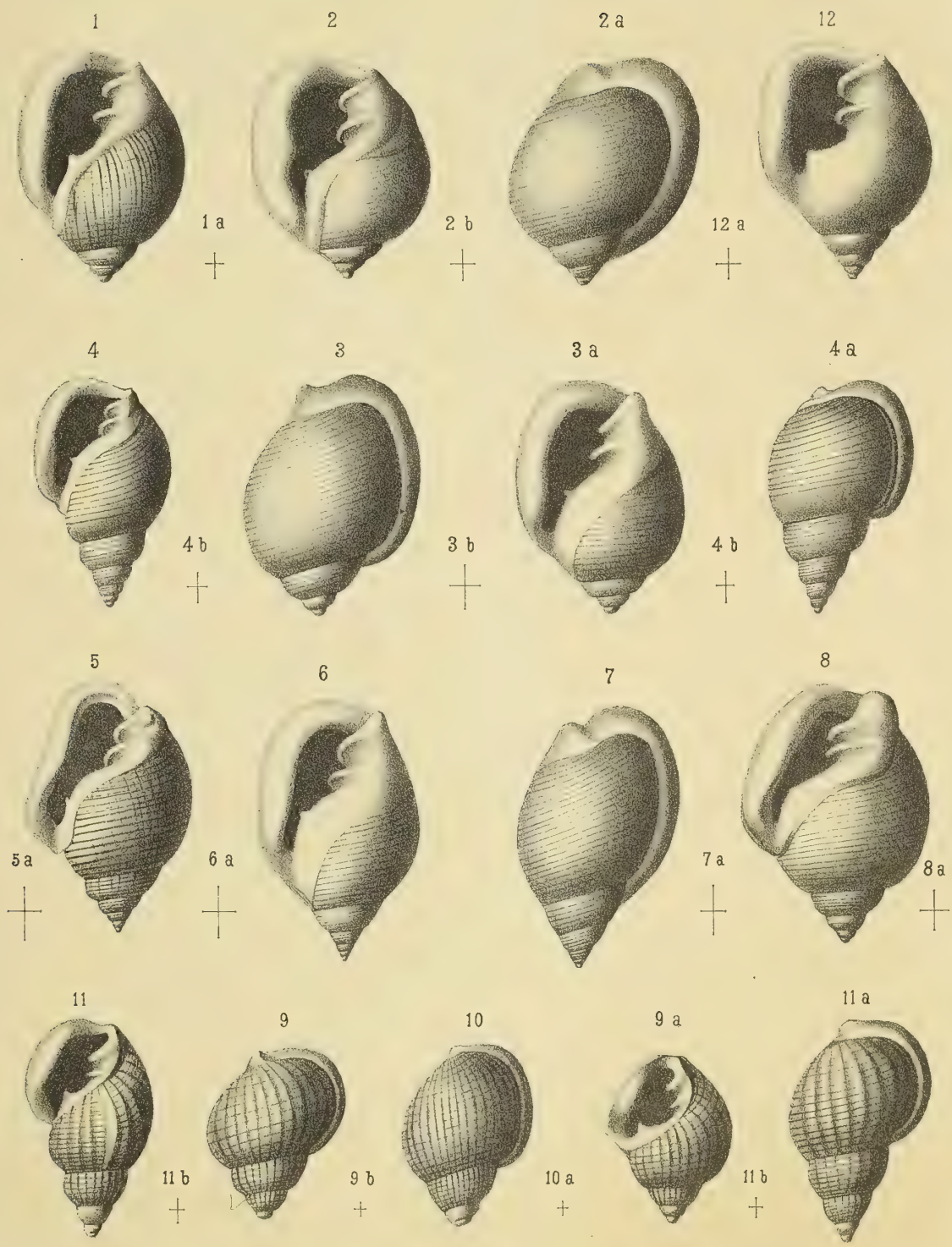
Ringicula costata Eichwald. Var. *sicula* e *tenuis*. n. — 9. 9*a*. Var. *sicula*. Un esemplare in due posizioni del Tortoniano di Rometta. - 9*b*. Dimensioni. - 10. Var. *tenuis*, dal Tortoniano di Ciminna (provincia di Palermo). — 10*a*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula cancellarioides n. sp. — 11. 11*a*. Un esemplare in due posizioni del Tortoniano del Modenese. - 11*b*. Dimensioni dello stesso.

Ringicula Grateloupii D'Orbigny. — 12. Un esemplare del Tortoniano di Ciminna (provincia di Palermo) - 12*a*. Dimensioni dello stesso.

G. Seguenza dis.

Lit. Bruno e Salomone Ro...

G. Seguenza dis.

Cenni critici sulla preistoria calabrese.

Memoria del dott. DOMENICO LOVISATO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 aprile 1881.

Quando nei primi mesi del 1879 dal Liceo di Catanzaro fui promosso all'Università di Sassari mi balenò per un momento il pensiero di fare una visita ai principali fra i nostri musei di archeologia, di etnografia ed anche di mineralogia, allo scopo di vedere in quali si trovassero strumenti, armi, idoli, scarabei, amuleti, ecc., persuaso da qualche visita anteriore, fatta alla sfuggita qua e là, che tutti questi oggetti non erano studiati dal punto di vista mineralogico. A ciò mi persuadevano, oltrechè la parola sempre incoraggiante dell' illustre ed onorevolissimo professore Fischer, il grande numero di tali oggetti, ch'egli toglieva dai nascondigli dei musei tedeschi, come si può vedere nel suo mai abbastanza lodato libro sulle *nefriti* e *giadeiti* (¹), e la compiacenza, che mi riprometteva in pari tempo col togliere anch'io qualcuna di queste rarità archeologiche dalla loro secolare oscurità. E già in questo Museo colla fantasia vedeva strumenti preistorici lavorati in nefrite, in giadeite ed in cloromelanite; in quello scarabei fenici con figurine incise e con lettere della maggiore perfezione, scarabei che destavano il massimo interesse per la sostanza di cui erano composti, cioè se d'un minerale naturale o di argilla cotta ed ottenuta sotto grande pressione; qua scorgeva oggetti non ancora conosciuti, e là attirava tutta la mia attenzione una collezione di roba di Calabria, che, dovunque si trovi, ha sempre le mie maggiori simpatie: già nella mia mente andava ruminando una specie di rapporto circonstanziato sopra gli oggetti da me visitati. Quanto io vagheggiassi l'idea di una tale visita, qui non mi è possibile il ripetere!

Ma con tutta la miglior volontà di questo mondo, di cui era armato, non ho potuto realizzare il mio progetto, nè chi mi conosce attribuirà certamente a mia colpa questa mancanza! Non ho potuto esaminare le preziose collezioni del Museo nazionale di Napoli, che sovra tutte cose mi interessavano; e fu allora che, persuaso poco o nulla avrei fatto nel mio giro, declinai il pensiero ed il progetto tramontò.

Ho dovuto allora limitarmi alle poche cose che grossolanamente avrei visto a Napoli (escludendo il Museo nazionale) ed a Roma, facendo delle brevi annotazioni, che ora penso di premettere ad altra Memoria sulle Calabrie, nella quale prendendo argomento dei lavori finora fatti sopra soggetto paletnologico di quelle contrade, passo alla illustrazione di 68 nuovi oggetti litici, che assieme ai 232 già descritti fanno il numero rotondo di 300.

(¹) H. Fischer, *Nephrit und Jadeit nach ihren mineralogischen Eigenschaften*, etc. Stuttgart, 1875.

Vidi le poche cose di paletnologia conservate in una vetrina del Museo paleontologico-geologico dell' Università di Napoli. Riconobbi l'azzina verde descritta nel « *Congrès international d'antrophologie et d'archéologie préhistoriques* » che contiene il resoconto della quinta sessione del congresso stesso, tenuta in Bologna nel 1871, e compilato tanto bene dall' illustre prof. G. Capellini. Mi diede nell'occhio ancora una sgorbia di media grandezza, con foro doppiamente conico, di color verde, con macchie e grani d'altro verde chiaro, e tanto somigliante ad una mia di Calabria: porta la scritta di Capri e va accompagnata da molti frammenti di coltellini d'ossidiana. Superba, magnificamente conservata e levigatissima, è grossa azza, comperata per 30 lire dall' egregio prof. Guiscardi e proveniente da località ignota fra Basilicata e Calabria. Di quest'ultima regione non c'è che una grande azza mal conservata, che sembra di diorite schistosa, perchè come a straterelli giallastri rossigni oscuri.

Era naturale che trovandomi in quel Museo vedessi giganteggiare la figura di *Leopoldo Pilla*, del grande uomo, che dopo aver regalato alla scienza tanti lavori, sapeva nel modo che noi tutti conosciamo compire il suo dovere verso la patria. Richiesi quindi tosto ed ottenni dal gentilissimo prof. Guiscardi di poter vedere la collezione di roccie e di minerali, che l'illustre Venafrano avea fatto nelle Calabrie.

Ho potuto così finalmente ammirare quella raccolta, che il fiero patriota faceva nel 1835 e della quale nel 1837 pubblicava il catalogo, ch'egli dice ordinato secondo l'ordine in che le roccie sono le une alle altre sovrapposte e secondo le loro mutue relazioni di giacitura.

Infatti noi troviamo tutta la collezione di 131 campioni, distribuita in 7 categorie: nella prima con 16 campioni è collocata la *formazione dello gneis indipendente*, ch'egli calcola roccia fondamentale delle Calabrie e quindi sopportante tutte le altre *roccie subordinate allo gneis* con 47 campioni; nella seconda categoria abbiamo la *formazione del granito indipendente* coll'osservazione che il *granito nelle Calabrie è evidentemente una roccia di formazione posteriore allo gneis, al quale trovasi o soprapposto o addossato ne' fianchi* con 13 campioni di graniti ed 8 di rocce subordinate al granito; nella terza è collocata la *formazione degli schisti cristallini indipendenti*, ch' egli dice sovrapposti allo gneis ed al granito, ovvero si elevano in montagna senza visibile sovrapposizione, con 10 campioni, più altri 12 di *roccie subordinate agli schisti cristallini*, fra le quali colloca le roccie serpentinose ed i serpentini dei quali cita soltanto due località al Reventino, cioè Platania e presso Suveria; la quarta comprende le *formazioni di transizione* con 6 campioni; la quinta le *formazioni secondarie* colle due sottocategorie di *formazione carbonifera*, che riposa in parte sul granito, in parte sul calcare di transizione delle vicinanze di Agnana, e di *formazione giurassica* comprendendovi il monte di Tiriolo, con 5 campioni la prima e 4 la seconda; la sesta comprende le *formazioni terziarie* con 6 campioni e la settima con 4 campioni la *formazione del salgemma di Lungro nella Calabria Citeriore*, coll' asserzione, che *questa formazione giace al di sotto e nel grembo di un vasto terreno diluviale* (Diluvium), *di cui evidentemente sembra far parte*: e però è una delle più recenti formazioni delle Calabrie.

È così che ho potuto identificare alcuni di quei campioni con quelli raccolti da

me e che ora, superando di molto il numero di mille, si trovano depositati nelle sale d l r. Comitato geologico in Roma: così la *chinzigite* passa nella collezione del Pilla, coi n. 13, 14, 15 sotto il nome di *omfacite grigio verdiccia; l'affanite tenace* (pietra cornea) n. 11 o 51, in piccoli letti nel torrente di S. Agostino vicino a Catanzaro, corrisponderebbe alla roccia da me descritta come *diorite micacea oscura a grana abbastanza fina, che contiene titanite in piccolissimi grani,* facilmente confondibile con granito a minutissimi elementi o col gneis amfibolico ([1]). Il n. 70 chiamato dal Pilla *granito rosso* corrisponde alla mia *diorite porfirica* e *diorite porfirica quarzifera* delle fiumarelle di Catanzaro, ma specialmente di quella di S. Agostino ([2]). Il n. 72 detto *granito rosso porfirico* corrisponde alla roccia che si trova in special modo sulle sponde della Fiumarella propriamente detta e che passa nella mia collezione col nome di *porfido dioritico*; il n. 73 *granito grigio* in grande ammasso corrisponde alla *diorite quarzifera,* di color verdognolo, al *porfido dioritico* del vom Rath, composto di plagioclasio, di quarzo, di mica, di orniblenda e di augite, sparsi in grani ed in cristalli in una pasta grigio verdastra e soltanto talvolta rossastra. Si vede questa stupenda roccia, che forma il nucleo centrale dell'altipiano di Catanzaro, affiorare in forma di filone della potenza di 30 metri circa alla sponda sinistra della Fiumarella, dove serve di solidissimo appoggio alla spalla del ponte sulla strada, che da Catanzaro conduce a Tiriolo. Il Pilla fa notare che queste ultime specie di granito (le nostre dioriti) hanno questo di particolare, che i cristalli di mica in essi contenuti sono in forma di prismi assai allungati e simili affatto a quelli dell'amfibolo, a distinguerli dai quali addimandasi un attento esame.

Chiamò poi il Pilla col nome di *diorite compatta* il n. 74, la stessa della precedente, quando la pasta è chiara e tendente al verdognolo. Non saprei poi proprio distinguere il n. 75, chiamato da lui *diorite porfirica*, se non col nome di *porfido dioritico* del n. 72, colla differenza, che quello è rossigno e questo verdognolo.

Dopo tal confronto non posso passar oltre senza far voti perchè la collezione del Pilla sia tirata fuori dal nascondiglio, in cui si trova attualmente ([3]). A me sembra che sia ben degna della migliore esposizione una collezione di roccie calabresi, fatta specialmente da quella veneranda figura di Leopoldo Pilla, il quale dopo aver dimostrato alla patria quanto l'amasse nel campo della scienza, le affermava il 29 maggio 1849 quanto fosse anche insuperabile, grande e valoroso capitano in quello della rivoluzione!

A Roma sono stato alquanto più fortunato. Ho potuto vedere al Museo Kircheriano nella vetrina di mezzo della stanza così detta dei vetri gli scarabei ed i camei. Il n. 2, colle dimensioni di 28 per 20 millimetri, portante la testa di Pescennio laureata, mi sembra di serpentino con diallaggio: non mi parve fra que' graziosi oggetti di vedere alcuna nefrite, nè giadeite, nè cloromelanite.

Nel corridoio dei bronzi, nella prima vetrina egiziana e divisione terza, quasi abbandonati trovai un grosso scarabeo di minerale durissimo di color verde-oliva

([1]) D. Lovisato, *Cenni geognostici e geologici sulla Calabria settentrionale* (Bollettino del r. Comitato geologico n. 9 e 10, 1878, pag. 354).

([2]) Ibidem, pag. 354-56.

([3]) Essa si trova in scaffali abbandonati nella loggia sopra il ricchissimo gabinetto di Mineralogia.

chiaro, senza foro, con scritta e portante il n. 48*b*: giacevagli accanto altro scarabeo di color nero col n. 48 con mirabile incisione di figurina e scritta nella parte inferiore e che il temperino non potè scalfire, come non potè l'altro. Il n. 46, tentativo di scarabeo, con lunghissima scritta e graziosissime figurine e geroglifici, mirabilmente distribuiti, è di color verde chiaro, pellucido agli spigoli, a grana abbastanza fina, con macchiette rosse, dovute forse a granuli in decomposizione: ha tutta l'apparenza del quarzo plasma o di una smaragdite, ma nulla posso dire di positivo, per quella semplice ispezione, nè di questo pezzo e degli altri due superiormente enunciati, nè di altri tre scarabei che passano sotto il n. 47, uno verde e probabilmente della stessa sostanza del n. 48*b*, sebbene più oscura e a grana fina; il secondo è nero della medesima grandezza; il terzo più piccolo di color chiaro, ma coperto di smalto. Questi oggetti assieme a 3 pezzetti oscuri ed a piccoli vasi col n. 50 ed a qualche testina, che si trovava nello scaffale II, sono degni di raccomandazione pegli studiosi di paletnologia e di mineralogia.

Il vero *sancta sanctorum* però è nella stanza II del Museo Preistorico, ove sono raccolte le più belle reliquie litiche di tutta la terra: l'Italia v'è benissimo rappresentata, meglio di quello che si creda, nè troppo amore m'inganna affermando che le nefriti, le giadeiti, le cloromelaniti, ecc. non fan difetto in quella bellissima collezione.

Di *Capitanata* sono: un' accettina verde, trasparente, delle dimensioni relative di 30, 27 e 7,5 mm., probabilmente di *nefrite*, due altre verosimilmente di *cloromelanite* con alcune, che sembrano di *variolite* assieme a bel scalpellino bianco-latteo con tendenza al verdognolo, che io vorrei credere di *giada-nefrite* o di *giadeite*. Ma l'occhio cade tosto sopra un' azzina schiacciata di color verde cupo, probabilmente di *cloromelanite* colla scritta: *Arezzo Cortona — località ignota — dono del marchese C. Strozzi;* regalo dello stesso signore e proveniente da Livorno, buca delle fate di Montignoso, è grossa azza di color verde pomo oscuro, rotta nel taglio, ma bellissima. Della provincia di Lecce (Terra d'Otranto) è magnifica azza di color verde oscuro, verosimilmente di *cloromelanite* o di *eclogite* della grandezza approssimativa della mia portante il n. 145 e proveniente da Borgia [1]: dell' una o dell' altra di queste sostanze sarebbero verosimilmente un' azzina allungata di Campobasso (Venafro, dono Lucentoforte), ed altra pur di Campobasso (San Biase, dono del prof. L. Gamberale): di *cloromelanite* mi sembrano un' azzina del Beneventano, dono del prof. F. Corazzini ed altra proveniente dall'Umbria. Non posso poi passare inosservata l'azza proveniente da Ascoli Piceno, di località ignota, e che raggiunge la bella lunghezza di 275 mm.: questa azza, che è la più grande di tutte quelle del Museo Preistorico, magnificamente levigata, cilindrico-conica, un po' rotta nel taglio, è probabilmente di roccia dioritica od eufotica.

La nostra Calabria è rappresentata da 16 scheggie di selce, delle quali due lunghissime, da un ciottolo, dalla penna d'un martello di roccia dioritica, dalle parti inferiori di 4 azze della stessa roccia e dalla parte superiore d'altra, che potrebbe essere ciottolo piuttosto che accetta. E qui mi si permetta di dubitare fortemente

[1] D. Lovisato, *Nuovi oggetti litici della Calabria*. Atti della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. III. p. 346.

sulla provenienza delle 16 scheggie di selce: interrogato, direi francamente essere di Basilicata o di Capitanata, o di qualche provincia dell'Italia centrale, ma mai di Calabria, dove non solo non ho potuto trovare in nessuna località scheggie di quel tipo, ma neppure la selce di quella specie fra tutte quelle che conosco.

Colla menzione fatta superiormente ho creduto solo di raccomandare agli appassionati cultori di paletnologia e di mineralogia lo studio specialmente degli oggetti citati, perchè degni di tutta la loro attenzione, persuaso che colle diagnosi esatte di quelle reliquie aiuteranno molto la soluzione del difficile problema sui minerali rarissimi di nefrite, di giadeite e di cloromelanite, che tanto interesse oggi destano nello studio della preistoria umana. Non ho inteso certamente, con un *verosimilmente*, che questo oggetto sia di *nefrite*, quello di *cloromelanite*, l'altro di *giadeite* o di diversa sostanza pur rara, di affermare dei giudizi, di pronunziare una definitiva sentenza; sono stato ben lungi dal far ciò io che conosco quanto sia difficile una esatta diagnosi mineralogica, specialmente degli oggetti preistorici, sui quali i secoli impressero una patina sacra, che rende talvolta così difficile la determinazione delle sostanze componenti, da ingannare il più esperto mineralogista.

La mancanza di determinazione di tutta quella roba preziosa proviene forse dal non avere alcuno pensato prima d'ora all'importanza ed all'interesse, che potevano presentare le qualità di minerali adoperati nella fabbricazione di armi, di strumenti, di amuleti litici, ecc. In talune collezioni invece è avvenuto l'opposto: così all'azzardo e senza analisi si denominarono quarzi, giade, serpentini, ecc., non tenendo conto del peso specifico di gran lunga minore pei quarzi e pei serpentini che per le giade, senza punto abbadare alla durezza assai maggiore pei quarzi e per le giade che pei serpentini, senza punto abbadare alla fusibilità od al carattere contrario: allo stesso modo e quindi senza analisi si classificarono come graniti o come sieniti molti oggetti preistorici, senza tener conto oltrechè di alcuni caratteri superiormente enunciati e di altri relativi alla composizione di quelle roccie, che talvolta da soli colla scorta soltanto dell'occhio nudo bastano a determinarle, senza pensare, che l'esperienza dimostra dappertutto aver l'uomo preistorico fatto uso del granito (e roccie affini) e del porfido solo in via affatto eccezionale, in maggior quantità delle dioriti, dei gneis, dei serpentini, come se non più duri, almeno assai più tenaci: altro fatto cui bisogna prestar molta attenzione è quello della densità molto bassa dei graniti.

Relativamente alla fusibilità, superiormente menzionata, non posso a meno di raccontare un fatto il quale dimostra quanto sia utile e fino un certo punto necessaria anche questa qualità per una diagnosi esatta, la quale deve essere sempre fondata sopra un esame mineralogico, che nulla lasci a desiderare, tale insomma che possa essere ritenuta esatta anche dal controllo di altri mineralogisti, ai quali può essere mandato campione analogo. In una città di Germania fu mandato a un distinto professore da uno de' suoi corrispondenti grosso frammento di roccia che si trovò come masso erratico in una contrada di quel paese. Il professore pei fenomeni al cannello e per l'esame microscopico della sezione levigata fece la diagnosi per *quarzo*. Ma il possessore del blocco non volle credere e mandò nuovi frammenti ad altri professori, fra i quali più d'uno fece la diagnosi, pronunciandosi nettamente per la *saussurite*. Si decise allora l'incredulo messere a far fare un'analisi quantitativa, che

gli dava il 76 per cento di SiO_2 = acido silicico ed il resto alluminio, sodio, ferro, ecc. che traggono l'origine loro da particelle specialmente di feldispato disseminato. Ora, se i professori s'ingannano nelle diagnosi di sostanze infusibili e fusibili, che cosa domanderemo noi dai profani?!

La nostra coscienza scientifica deve essere scevra di diagnosi inconsiderate, e se non conosciamo qualche sostanza, dobbiamo lasciarla in sospeso, come ho fatto per alcune armi preistoriche già illustrate e come farò per alcune nuove, che in questo lavoro intendo di illustrare. Se si vuole far prosperare la scienza, bisogna procedere colla maggiore serietà, rimuovere qualunque leggerezza ormai inescusabile in quel campo cotanto fecondo, esaminare e studiare i campioni, che ci sono offerti, ed avere coscienza delle diagnosi fatte. Gravi errori si commettono anche oggigiorno nella questione delle false nefriti e delle giade coi serpentini; in quella delle ossidiane coi quarzi: quelle non si presentano mai opache sui margini quando sieno ridotti abbastanza tenui, come avviene nei quarzi neri, i quali per soprappiù non sono fusibili, mentre lo sono le ossidiane.

Però prima di entrare in queste disquisizioni aggiungerò che a Roma ho voluto visitare tutti i rivenditori di antichità per esaminare le loro collezioni, persuaso che anche questo fosse ottimo mezzo per trovare delle rarità. Ma se trovai queste collezioni ricche di marmi, di terre cotte e relativamente anche di bronzi, poco o nulla in esse rinvenni di armi e strumenti litici. E la causa di tutto ciò? La troviamo nei prezzi favolosi, che vengono fatti per quegli oggetti, e nelle somme rispettabili che per essi vengono versate dagli stranieri e particolarmente dagli inglesi e dagli americani; così noi lasciamo portar via pei musei d'America e d'Inghilterra le reliquie della nostra preistoria e concorriamo a ritardare la luce sulle prime età dell'uomo! Alle molte domande, che mossi ai diversi rivenditori di cose antiche, per qual ragione lasciassero scappare quelle cose preziose dalla nostra patria, ebbi sempre la stessa risposta: « In Italia il nostro spaccio è nullo: se abbiamo qualche cosa di buono, la serbiamo per qualche inglese od americano, che ce la paga quanto vogliamo, oppure la mandiamo in Francia od in Inghilterra, dove la roba nostra è venduta a prezzi veramente favolosi! »

Si aggiunga che molti di questi rivenditori sono malfidenti e possedendo qualche cosa di veramente raro, che si riferisca quindi anche alle prime età, la tengono nascosta e non la mostrano se non a chi inspira loro fiducia od a chi ritengono possa possedere delle migliaia di lire.

Vidi però parecchie azze, ma d'ignota provenienza, e come ben s'intende senza alcuna determinazione. In via Bonella dal rivenditore Francesco Martinelli ebbi ad ammirare superbo scarabeo, verde oscuro, magnificamente lavorato e conservato, probabilmente di *cloromelanite*; ma per questo il proprietario mi domandava 100 lire! Se le avessi avute disponibili gliele avrei date, tanto era bello quell'oggettino! Ora probabilmente sarà nelle mani del sig. F. v. Hochstetter, direttore del Museo imperiale di Vienna.

Nell'ultima mia Memoria ([1]) sopra oggetti preistorici calabresi lasciai 7 pezzi

([1]) D. Lovisato. *Nuovi oggetti litici della Calabria.* Atti della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. III. p. 340.

indeterminati, quelli che portano i n. 165, 175, 182, 203, 209, 222 e 223, perchè non conosceva la loro sostanza componente. Ora per 4 d'essi sono al caso di dare un cenno diagnostico.

Il 165, del quale oltre che le dimensioni relative furono dati anche il peso specifico, il colorito, la durezza, la forma, è uno *schisto amfibolico.*

Nulla per ora posso dire di sicuro intorno ai n. 175, 182 e 203. L'azza 209, che esternamente è oscura, che si manifestava internamente rosso cupo, ben dissi essere costituita d'un minerale omogeneo, non di roccia, giacchè rotto un pezzo maggiore per poter fare la lamina levigata per l'esame microscopico, a 3 millimetri e mezzo dalla crosta superficiale — straterello nel quale l'azza sembra di roccia, anzichè di un minerale omogeneo, perchè rosso cupo e come seminato di granelli verdi — essa si manifestò nel suo interno d'un latteo sporco tendente al verde chiaro pomo, come una vera nefrite, nè diversa da questa rara sostanza la ritengo, corrispondendovi oltrechè il peso specifico che è di 2,9477, anche la durezza = 6 . . . 6, 5 e l'esame della lamina levigata. Ecco quindi un nuovo pezzo da aggiungersi alle preziose *nefriti* della mia collezione colle dimensioni relative di 86, 47 e 23 millimetri.

Il n. 222 rispondente a bellissima azza schiacciata, larga, rotta nella parte superiore, di color verde con macchie d'altro verde più chiaro, proveniente da Triparni, villaggio di Monteleone, è giusta l'esame microscopico della piastrina levigata un bellissimo *glaucofano*, roccia esotica per l'Italia, giacchè finora non si trovò che nell'isola di Syra (Grecia). Le dimensioni relative della parte conservata sono 69, 56 e 16 mm., la durezza = 6, il peso specifico = 3, 1642.

L'azza n. 223, superbamente conservata e lisciata con macchie bianche e verdi chiare, proveniente da Monteleone e regalo di Pignatari, colle dimensioni relative di 95, 48 e 27 mm., colla durezza = 5 e col peso specifico = 3,0564, è verosimilmente un'*eufotide*, con cristalli bianchi e verdi dai contorni ben determinati, che manifestano maggior durezza della massa. A primo entro avea preso questo pezzo per una roccia serpentinosa.

Ed ora veniamo ai 68 nuovi pezzi raccolti negli ultimi tempi assieme ad altri, che tengo in serbo per futura pubblicazione, perchè non ancora determinati.

Di questi 68 ben 49 sono di roccia dioritica, nessuno mi sembra di granito, solo taluno potrebbe essere d'eufotide, ma molto difficilmente se ne troverà fra essi di sienite o di granito amfibolico, meno tenaci certamente delle dioriti, che possono essere di molte varietà. Anche questi oggetti come gli illustrati e come gli altri, che descriverò dopo i 49 dioritici, furono rinvenuti sporadicamente nel lavorare il terreno, nel diboscare le pendici e non a grande profondità del suolo coltivabile; per lo più furono raccolti in alto sui monticoli o sulle pendici, assai raramente nelle alluvioni. Sono per la maggior parte azze levigate in tutta la loro estensione, molte con tendenza a quella forma, che taluni chiamano *coni*, altri hanno decisamente la forma di *scalpello* e per ora solo un *martello*, che debbo alla cortesia del carissimo amico Carlo De Nobili di Catanzaro, che lo ebbe da Gimigliano.

Talune di queste accette, sono grossissime, arrivando quella che mi fu regalata dall'amico Luino, e proveniente da Crichi nel circondario di Catanzaro alle dimensioni

relative di 204,82 e 51 mm., e l'altra di S. Agata d'Esaro, avuta dal sig. Pasquale Campanile a 178,73 e 64 mm.

In ogni modo sotto questo nome generale di *roccia dioritica* intendo di abbracciare non solo le vere dioriti, che sono le più, ma anche le schistose, le micacifere, le eufotidi, qualche rara diorite-sienite, taluna altra assai più rara e forse di sienite, senza però che fra queste azze ve ne sia alcuna di diorite porfirica o porfirica quarzifera o di porfido, essendovene due di porfido micaceo, delle quali una col peso specifico di 2,689.

Ecco le prime 49:

1 (233) Grossa azza di Crichi, regalo del maestro Folino al provveditore Luino; 1 (234) grossa azza regalatami da don Pasquale Campanile a S. Agata d'Esaro; 2(235) parte inferiore di grossa azza di Migliuso, regalatami da Fragale e (236) grosso ciottolo-azza della stessa località che sembra di granito amfibolico; 8 (237, 238, 239, 240, 241, 242, 243 e 244) di Serrastretta, che debbo alla gentilezza dei sigg. Tommaso Fragale (la 1ª), del sindaco (la 2ª), del sig. Orazio de Fazio (la 3ª e 4ª), di don Tommasino Singlitico (la 5ª e 6ª), del padre del mio scolaretto Gaetano Fragale (la 7ª) e l'ultima comperata; 3 (245, 246 e 247) dovute all'egregio don Antonio Ciacci di Belcastro, notando che l'ultima è di porfido micaceo; 6 (248, 249, 250, 251, 252 e 253) di Girifalco, delle quali sono riconoscente alla cortesia dei sigg. Daniele Levato per le tre prime e Giuseppe De Gattis per le tre ultime, osservando che la 252 è un bellissimo porfido micaceo e la 253 un ciottolo colle sue belle faccie levigate, cui non manca che il taglio per essere superba azzina; 1 (254) di Sorbo S. Basile; 1 (255) di Borgia dovuta a don Fabio Rhodio; 1 (256) azza-ciottolo comperata a Nicastro da un ciabattino, che la teneva sopra il suo bischetto; 1 (257) di Monteleone (Pignatari); 2 (258 e 259) di Nicotera per le quali rendo grazie al dott. Diego Corso, che mi comunica esser stata trovata la prima nello scavare un fosso nel fondo Monte presso Nicotera di sua proprietà: dei due ciottoli che queste accompagnavano non credo doverne tener conto; 9 (260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267 e 268) di Cicala, regalo del distinto maestro don Giuseppe Asturino; 3 (269, 270 e 271) di Ajello, delle quali vo riconoscente al mio ottimo amico Gaetano Solimena (la 1ª fu trovata nella *pianura Barbara*, la 2ª nel *piano di Giampaolo* e la 3ª mi fu portata in Sardegna dall'egregio avv. Antonio Tealdi); 6 (272, 273, 274, 275, 276 e 277) di Cleto, vendutemi le prime quattro dal sig. Giuseppe Briglia e le ultime due da un contadino di quei dintorni; 1 (278) di Lago, della quale rendo mille grazie al gentilissimo sig. Vincenzino Palumbo, che la trovò nella *Piana dei Troni* in territorio di Grimaldi; 1 (279) comperata per mezza lira a Laghicello; 1 (280) d'ignota provenienza, dovuta al sig. Giuseppe Belmonte di Ajello; 1 (281) bellissimo martello.

282. Azzina più larga che lunga, molto grossetta, rovinata alquanto nella parte superiore molto ingrossata, di color verde chiaro sporco; mostra magnificamente la roccia schistosa come difatti la sua sostanza è uno *schisto amfibolico,* tendente al gneis. Mi fu regalata dal maestro Giuseppe De Gattis, che l'ebbe a Girifalco. Le sue dimensioni relative sono 30, 31 e 10 mm.; la sua durezza = 5....5,5; il suo peso specifico = 3,0162 circa.

283. Azzina superba schiacciata della stessa provenienza della precedente, mostra nel suo colore due verdi, uno oscurissimo ed uno chiaro bellissimo, d' una lavorazione e conservazione magnifica; è di *schisto argilloso*; ha le dimensioni relative 48,37 e 6 mm.; la durezza superiore a 6, ed il peso specifico = 2,9612 circa.

284. Grossa azza verde con punti bianchi e macchie verdi più grosse, durissima, di *verde-antico*. Ha il taglio un po' inclinato, ma egregiamente conservato. È benissimo levigata nella sua parte inferiore, ma scabra nella sua parte superiore, mostrando molto bene in complesso il ciottolo di fiume; ha le dimensioni relative di 88,42 e 27 mm.; la durezza generale 5, ma superiore al 6 nelle grosse macchie verdi; il peso specifico = 3,1694. Mi fu regalata dal sig. Francesco Campanile di S. Agata d'Esaro. Ho trovato il verde antico sopra i serpentini di S. Severino Lucano, nel circondario di Lagonegro in Basilicata, e ben lo ricordo, perchè ruppi due martelli per staccarne campioni convenienti.

285. Frammento inferiore di sgorbia discretamente grande di color verde-azzurrognolo lionato, con intaccatura verso una delle coste, con grossa macchia rossa, che va sfumando alla frattura, di *tremolite*. Nel centro di questa macchia rossa vi deve essere della pirite, che colla decomposizione cagiona quel color rosso aranciato. Questo frammento di sgorbia, magnificamente levigato, assai bene conservato nel taglio, e che dovea avere originariamente la lunghezza di 75 mm., mi fu regalato da don Giuseppe De Fazio di Serrastretta, il quale l'ebbe dalla contrada Minazzo sopra Serrastretta stessa. Nella stessa località di Minazzo furono pure trovate le tre azze, che mi vennero regalate dal Sindaco e da don Orazio De Fazio e che entrano nella categoria di quelle a roccia dioritica, come pure la maggior parte delle altre, che nella mia collezione hanno la provenienza da Serrastretta. Prima che sorgesse quella borgata, cioè tre secoli fa, le pendici di quei monti erano tutte coperte d'alberi. La durezza va da 5,5 a 6 ed il peso specifico = 2,9478.

286. Scalpello graziosissimo a doppio taglio di *eclogite* oscura, avuto per mezza lira da Francesco Genovese fu Stefano di Motta S. Lucia, che dopo tante domande dissemi di averlo portato da Caltanissetta, a pochissima distanza dalla qual città l'avea trovato nei lavori che si facevano per una strada. Questa provenienza serva a mettere in avvertenza quelli che credono ciecamente ai cartelli, oppure ritengono come articoli di fede, tutto quello che loro viene detto da coloro che regalano o vendono qualcuna di queste reliquie. Ha le dimensioni relative 61,16 e 7 mm.; la durezza = 7,5; il peso specifico = 3,4182.

287. Sgorbia giallo-verdognola rossigna, trasparente agli spigoli, di *giada-nefrite*, regalatami dal maestro Giuseppe De Gattis, che l'ebbe a Girifalco senza indicazione di località di ritrovamento. Mostra nella sua parte superiore e sopra la faccia più convessa verso la parte inferiore la scheggia-ciottolo di fiume. Il taglio è bene conservato e la sgorbia levigatissima nell'assieme; ha le dimensioni relative 58,34 e 9 mm., colla durezza = 6,5 e col peso specifico = 2,9712.

288. Parte inferiore di grossa azza di *fibrolite* con mica, regalatami dal gentilissimo amico Luigino Corapi di Soverato, il quale l'ebbe da un mandriano, che la raccolse nel territorio di Satriano, dopo che questo *fulmine* caduto gli avea ucciso due capre. Colà a proposito dei pregiudizi sopra questi oggetti litici si racconta che

una persona teneva religiosamente in casa un *cu no di truono*, credendolo capace di scongiurare i fulmini: ma un bel giorno visto che una saetta visitava propria la casa sua, credette il contrario, lanciò fuori di casa il *truono* e così fecero tutti quelli della borgata, che tenevano degli oggetti litici, credendo che quelle pietre anzichè scongiurare i fulmini, li chiamassero. Peccato che non tocchi a me la fortuna di trovarmi presente a qualcuno di questi sperperi sacrileghi per la scienza! Il taglio di questo frammento è superbamente conservato, in esso vi abbonda la bianchiccia fibrolite; la roccia in generale è di color grigio rossastro per l'abbondanza della mica e forse di qualche altra sostanza; è di considerevole durezza arrivando a 6,5 col peso specifico = 3,1615. Intiera doveva avere la lunghezza di 120 mm. circa, la grossezza di 26, avendo la larghezza di 52.

289. Graziosissima sgorbia di *fibrolite* assai più chiara della precedente, mostrandosi sopra una faccia bianco madreperlaceo sporca, e perciò con minor quantità di mica, che spicca però dal colore generale. È stupendamente levigata con costole piane, mostra una piccola frattura al taglio e sulle faccie delle scabrosità, denotanti il ciottolino di fiume. Mi fu regalata dall'egregio amico ing. Antonio Izar, che l'ebbe da Cortale: le sue dimensioni relative sono 58,37 e 14 mm.; la sua durezza = 6,5....7; ed il suo peso specifico = 3,1.

290. Azzina molto schiacciata in forma quasi di triangolo isoscele, finendo in punta acuta nella parte superiore, di *saussurite*; magnifico il taglio, leggerissimamente incurvato, stupendo il lavoro, ma colle superficie in parecchi punti erose mostra la scheggia-ciottolo di fiume; le costole sono bene conservate. È di color verdognolo con macchiette e pentecchiature d'un verde olivo abbastanza cupo. Ha le dimensioni relative di 48,35 e 6 mm.; la durezza = 5...5,5; il peso specifico = 2,9746. Proviene da Girifalco e mi fu regalata dal Sindaco sig. Antonio Migliaccio.

291. Azzina larga quasi quanto lunga, molto grossa relativamente alle altre due dimensioni, di *saussurite*, rovinata dalle due parti, superiore ed inferiore, nel resto conservatissima e magnificamente levigata, colle dimensioni relative 38, 36 e 10 mm., colla durezza 5,5 e col peso specifico = 3,023. Vi predomina il color verde, che va dal più cupo al più chiaro, divenendo quasi bianco giallognolo, specialmente sopra una delle superficie: si osservano ancora delle macchie rossigne: il taglio è grosso perchè rovinato e rotto. Sopra una delle costole e sulle estremità si vede la schistosità della roccia, che non è tanto dura, perchè intaccata leggermente dal temperino. È una *saussurite* impura, che converrebbe esaminare per vedere quale sostanza la rende così tenera. Regalo di De Gattis, di Girifalco.

292. Azzina di *saussurite* regalatami dall'amico Izar, che l'ebbe da Cortale: superbamente levigata, specialmente sulla faccia piana; lo è ancora sulla convessa, ma mostra su questa delle fratture e dei segni di sua provenienza da ciottolo di fiume, che manifesta anche in due punti del taglio e nella parte superiore. È di un bellissimo verde chiaro; ha le dimensioni relative 47,39 e 10 mm., la durezza da 6,5.... 7 ed il peso specifico = 2,9692 circa, alla temperatura di poco superiore ai 5° centigradi, che fu conservata approssimativamente la stessa pei pesi specifici di tutti gli oggetti in questa Memoria accennati.

293. Azzina stupendamente conservata, della maggiore perfezione, di *saussurite*,

regalatami pure dall'amico Izar, che la ricevette da Cortale. Ha il taglio quasi diritto, in un solo punto fa un leggero zig-zag. Verde chiaro rossigna nella massa, è attraversata come da zone d'un verde olivo cupo, formate da chiazze o macchie grossette. Le costole sono egregiamente conservate, differenti però nelle loro curvature, essendo una molto pronunciata: le dimensioni relative sono 44,37 e 9 mm.; la durezza = 6.... 6,5, ed il peso specifico = 3,0267.

294. Grossissima azza-sgorbia, verde chiaro rossigna, chiazzata d'un verde più cupo splendente, comperata a Pedavoli, nella provincia di Reggio, dall'armiere Domenico Augimeri e trovata nel bosco Moio nella cosidetta Piana Mamertina, dove questi arnesi sono conosciuti coll'appellativo di *cugni di lampo*. È quasi perfettamente piana sopra una delle sue superficie e ben convessa sull'altra, continuandosi la convessità nelle costole, superbamente conservate, come in generale la levigatura è sorprendente, manifestandosi solo una frattura nel mezzo del taglio ed altra nella parte superiore che finisce quasi acuta, nonchè delle fratture sinuose sulle due faccie, che chiaramente alludono al ciottolo di fiume. Internamente la massa è azzurro-verdognola con punti metallici qua e là e dappertutto mostra la struttura fibrosa: sotto il microscopio presentasi d' una sostanza cripto-cristallina, fibrosa, ma le fibre sono troppo poco sviluppate per farne un esame ottico: potrebbe essere una *tremolite*. Ha le dimensioni relative di 205,85 e 27 mm., la durezza = 5,5.... 6 ed il peso specifico = 2,84779 alla temperatura di 5° centigradi.

295. Azzina ben conservata, stupendamente lisciata, rotta nella parte superiore, esteriormente di colore bianco-verdognolo rossigno, internamente e sotto la prima crosta di decomposizione verde-azzurro bellissimo; inoltre le laminette come tante piccole squame lucenti, che compariscono esteriormente, appariscono internamente come fibre della tessitura. Mi fu regalata dall'egregio signor Vincenzino Palumbo di Lago, che la trovò alla così detta *Piana dei Troni*, in territorio di Grimaldi, assieme ad altra di roccia dioritica già citata ed a terza assai piccola, nera, d'una perfezione senza pari, che mi fu portata via a Castrovillari, assieme a fossili preziosissimi, che m'aveano costato tante fatiche! Ha le dimensioni relative 64,42 e 20 mm., la durezza = 5 ed il peso specifico = 3,02209. Sembra *tremolite*, le cui fibre sono più sviluppate che nel pezzo precedente.

296. Sgorbia superba oscura, manifestante qua e là, specialmente se umettata, parti verdi rossastre; fa pensare alle roccie oscure *basaltiche* od alle *amfiboliche*, alle quali appartiene sicuramente. In maniera stupenda lisciata e conservata, manifesta solo qualche leggera frattura nel taglio e sopra una delle costole. Quest'azza, mi fu regalata dal distinto sig. don Raimondo De Siena, che la raccolse in un suo fondo nella campagna di Presinaci nel Monteleonese, ha le dimensioni relative 57,35 e 10 mm., la durezza = 6 ed il peso specifico = 3,07967.

297. Altra azzina oscura, che deriva pure dal Monteleonese e che mi fu regalata dall'ottimo mio collega Pignatari, fa pensare alle stesse roccie *basaltiche* od *amfiboliche*: ha il taglio ad arco di cerchio, le superficie tutte due convesse, che vanno a finire quasi in altro taglio, sebbene più ristretto nella parte superiore; sopra una delle superficie mostra nettamente il ciottolo di fiume da cui proviene. Ha le dimensioni relative 63,39 e 17 mm., la durezza = 5 ed il peso specifico = 3,0408.

298. Azza irregolare di *serpentino* oscuro con venuzze di crisotilo, con diallaggio e qualche altro minerale ancora, che complessivamente porta a pensare al serpentino ranocchiaia. È benissimo levigata e conservata, ha il taglio inclinato e fatto a zig-zag. Mostra il ciottolo di fiume, ha le dimensioni relative 66,45 e 20 mm., la durezza = 4 ed il peso specifico = 2,68398. Mi fu venduta da Giuseppe Briglia di Cleto (Pietramala) assieme alle due seguenti: questa fu trovata nella contrada *Terreno Barbara*.

299. Scalpellino di *serpentino* striato chiaro, azzurro-verdognolo con diallaggio od altro minerale in decomposizione. Fu trovato nella contrada *Terreno Pianeta* di Cleto; questo gingillo ha le dimensioni relative di 43,24 e 6,5 mm., la durezza = 4.... 4,5 ed il peso specifico = 2,6425.

300. Superbissima azza, mancante del taglio e ridotta quindi da questa parte a piano ellittico, di *cloromelanite* con cristalli bianchi, stupendamente lisciata e conservata, di forma quasi conica, alquanto scabra nella parte superiore, per aver maggiore aderenza al manico. È del più bel verde oscuro che si possa vedere ed è resa ancora più superbamente bella dalle sezioni dei cristalli bianchi che si osservano. In taluni punti ha macchie rossigne dovute forse a pirite in decomposizione e che si vede ancora in granuli giallo lucenti sopra una delle faccie. Ha la provenienza di Cleto, la durezza = 7,5 ed il peso specifico = 3,469. L'illustre Fischer, cui inviai questo bellissimo oggetto, veramente curioso, mi scrive: « Esso è doppiamente interessante sia per la forma avendo in luogo di un margine un piano ellittico, sia per le piccole particelle bianche (cristalli?) d'una sostanza per me ancora dubbiosa, ma che vidi già in due azze di giadeite in maniera perfettamente identica: cosicchè la circostanza di vedere adesso queste particelle per la prima volta anche nella cloromelanite parla tanto più per l'idea, che la cloromelanite si trovi nel medesimo paese della giadeite, ciò che ho pensato già da lungo tempo ».

Ed ora che brevemente ho esposto de' nuovi pezzi preistorici calabresi, da me raccolti e determinati, senza aggiungere che altri oggetti litici mi restano a descrivere, vediamo la serie numerosa di tutti gli arnesi litici preistorici finora raccolti ed illustrati, passando quindi brevemente in rivista i lavori di coloro, che per le Calabrie di questo importantissimo argomento si occuparono.

Il signor Giustiniano Nicolucci fu il primo a descrivere alcuni oggetti litici (38) di quelle provincie nel 1871 in un lavoro, che intitolava: *L'età della pietra nelle provincie pugliesi e calabresi* e stampava a Firenze nell'Archivio per l'Antropologia e la Etnologia, anno I, del quale nel medesimo anno ne faceva comunicazione nel resoconto della quinta sessione del Congresso internazionale d'Antropologia e d'Archeologia preistoriche, tenuta in Bologna. Nel 1874 (1) e nel 1876 (2) illustrava altri oggetti, che andarono ad arricchire la sua collezione e nel 1877 (3) stampava catalogo generale di tutti gli oggetti preistorici dell'età della pietra da lui posseduti.

(1) G. Nicolucci, *Ulteriori scoperte relative all'età della pietra nelle provincie napoletane*. Napoli, 1874 (Rendiconto R. Acc. sc. fis. e naturali).

(2) G. Nicolucci, *Nuove scoperte preistoriche nelle provincie napoletane*. Napoli, 1876 (Rend. Acc. sc., 7°-8°).

(3) *Catalogo della collezione di oggetti preistorici dell'età della pietra, posseduta da Giustiniano Nicolucci*. Napoli, 1877, 42 pagine in 8°.

Nei primi mesi del 1877 io pure preparava brevi cenni sopra alcuni oggetti da me raccolti nei dintorni di Catanzaro, ma la pubblicazione relativa non usciva a Trieste che al principio del 1878 [1].

In seguito, ma sempre nel 1878, il sig. cap. Giuseppe Ruggero pubblicava Memoria [2] sullo stesso argomento per le provincie di Catanzaro e di Cosenza: la faceva seguire in capo a pochi mesi da una *lettera al Chierici* [3], nella quale erano accennati nuovi oggetti, mentre d'altra parte negli Atti dell'Accademia dei Lincei usciva una seconda mia Memoria sulla preistoria calabrese [4] ed il prof. Pio Mantovani colla data del 2 maggio stampava alcune notizie paletnologiche [5] sulla Calabria Ultra 1ª, cioè sulla provincia di Reggio.

Nel 1879 uscivano nuova Memoria del sig. Nicolucci [6] assieme ad altra mia [7].

Nel 1880 il prof. Mantovani in due lettere dirette al Chierici [8] trattava molto succintamente di alcuni oggetti di pietra raccolti e trovati nella provincia di Reggio.

Che io sappia, non vennero fatte altre pubblicazioni per le Calabrie sopra questo soggetto.

Ho accennato qua e là nelle mie Memorie ai lavori del sig. Nicolucci fino al 1877; non ritornerò perciò su quelli che nel riepilogo dei pezzi illustrati e solo per qualche osservazione generale, m'occuperò invece delle Memorie uscite in proposito dal 1878 fino ad oggi.

Il signor Ruggero lamentando [9] la mancanza della selce, dice ch'essa « abbonda in noduli ed arnioni nei sedimenti cretacei e giuresi, terreni che mancano in Calabria ». Come si fa ad affermare un tale principio quando non si è visitata la imponente massa calcare, che occupa tutta la parte settentrionale e specialmente occidentale della provincia di Cosenza?

« Solamente verso il litorale », dice egli, « all'altezza di Squillace comincia a mostrarsi la selce in certi calcari, che aumentano poi in estensione nella provincia di Reggio, ed anche ad ovest di Cosenza se ne trova alquanto ». Io posso assicurare

[1] D. Lovisato, *Di alcune azze, scalpelli, martelli e ciottoli dell'età della pietra, trovati nella provincia di Catanzaro.* Estratto dal Bollettino delle scienze naturali n. 3, annata III. Trieste, 1878.

[2] G. Ruggero, *Oggetti preistorici calabresi del Catanzarese e del Cosentino.* (Atti R. Accademia dei Lincei, ser. 3ª, vol. II. p. 457).

[3] G. Ruggero, *Arnesi lapidei del Calabrese.* Lettera al Chierici del 30 giugno 1878 (Bull. di Paletnologia italiana, anno 4°, n. 5 e 6).

[4] D. Lovisato, *Strumenti litici e brevi cenni geologici sulle provincie di Catanzaro e di Cosenza.* (Atti R. Accademia dei Lincei, ser. 3ª, vol. II. p. 770).

[5] P. Mantovani, *Notizie paletnologiche di Calabria Ultra* 1ª (Estratto dal Bull. di Paletnologia italiana, anno 4°, 1878, marzo e aprile).

[6] G. Nicolucci, *Strumenti in pietra delle provincie Calabresi.* Napoli, 1879 (Tip. dell'Accademia reale delle scienze. Memoria estratta dal vol. VIII degli Atti della r. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Pag. 18 in 4°, con 4 tavole).

[7] D. Lovisato, *Nuovi oggetti litici della Calabria.* (Atti della r. Acc. dei Lincei. ser. 3ª, vol. III. p. 329).

[8] P. Mantovani, *Oggetti di pietra raccolti nella provincia di Reggio di Calabria.* Lettera al Chierici del 15 luglio 1880 (Bull. di Paletnologia italiana, anno 6,° n. 7 e 8) e *Nuovi oggetti di pietra trovati presso Reggio di Calabria.* Lettera al Chierici del 5 settembre 1880 (Bull. di Paletnologia italiana, anno 6°, n. 9 e 10).

[9] Memoria citata, pag. 13.

il sig. Ruggero, che non v'è ombra, ma punto punto di selce, nè all'altezza di Squillace, dove mancano assolutamente anche i calcari, nè ad ovest di Cosenza.

Nel lamentare poi questa mancanza di selce nelle Calabrie si unisce a lui il sig. Nicolucci, il quale dopo aver passato in rivista le poche selci lavorate, che in quelle contrade furono rinvenute ed illustrate, sebbene il dotto signore non conoscesse ancora i 4 pezzi illustrati da me e la lancia di selce grigio-giallastra, descritta dal Mantovani nella sua lettera al Chierici dice ([1]) di ciò se ne può trovare spiegazione nella natura stessa del suolo calabrese « perciocchè essendo poco comuni, per non dir rari, in quelle provincie i giacimenti siliciferi, gli oggetti preistorici di selce vi sono stati sempre avidamente ricercati come pietre focaie, di cui era tanto sentita la necessità prima della invenzione dei fiammiferi ».

Mi perdonino questi egregi signori, se loro devo contraddire tutte le loro asserzioni relativamente alle selci: tutti e due abbracciano evidentemente le tre provincie che formano le Calabrie e quindi tutti due mostrano di non conoscere la struttura geologica di quelle contrade. Se avessero detto che nella zona dove noi troviamo la maggiore quantità di oggetti litici in Calabria, in quelle regioni quindi dove si accentrarono maggiormente le popolazioni preistoriche calabresi e che sono le due sponde dell'istmo terziario fra S. Eufemia e Squillace, avrebbero detto una grande verità; non così, asserendo pel restante delle Calabrie.

In quanto alla provincia di Catanzaro non ho trovato selci piromache, che in una formazione del miocene inferiore od eocene superiore, lungo la strada che da Strongoli va a Verzino, passando fra Casabona e S. Nicola dell'Alto e sotto Zinga ([2]), in vene, in straterelli od in arnioni in un calcare marnoso di color bianco, rosso, verde, cenerognolo, ecc, deposto in piccoli strati variamente ripiegati e che alterna con argille scagliose: ho asserito esistere anche nel Monteleonese delle formazioni a selce piromaca dietro dichiarazione e conferma del mio carissimo collega dott. Filippo Pignatari ([3]), ma sento il dovere di dichiarare che nelle escursioni che feci in quel circondario mai sono stato così fortunato di trovarle.

Rinvenni bellissime selci piromache invece su per Canolo nel calcare giurese del monte Mutolo, che s'eleva per circa 600 metri sopra il letto del fiume Novito in provincia di Reggio, che ritengo nel resto non ricca di selci.

Ricchissima però è la provincia di Cosenza, la quale oltre quelle da me già citate nella zona, che si estende fra la Fiumarella ed il Trionto, ne possiede di molte specie in tutta la sua parte superiore, che dal Crati si estende alla Basilicata.

Infatti le trovai in vene ed in arnioni di color bianchiccio immediatamente sopra Lungro: abbondantissime e di color pur bianchiccio, ma anche bigio-azzurrognolo nei calcari dalla regione Bocca del Monte all'altra di Vaccaro per scendere a Verbicaro dalla sella di Novacco: ancora all'estremità della graziosa isola di Dino sempre in calcare, che riposa sopra altro bigio contenente qualche *gyroporella triasina* e che si continua per quasi metà dell'isola fino presso ai numerosi avanzi di

([1]) G. Nicolucci, *Strumenti in pietra delle provincie calabresi*, pag. 2.

([2]) D. Lovisato, *Strumenti litici e brevi cenni geologici sulle provincie di Catanzaro e di Cosenza.* Atti della r. Accademia dei Lincei, ser. 3ª, vol. II. p. 777 e 778.

([3]) D. Lovisato, *Nuovi oggetti litici della Calabria*, ser. 3ª, vol. III. p. 335.

fabbricati: nei monti di Tortora e di Ajetta ed in quelli di Ursomarso per Mormanno e per Campo Tenese. Selce in nuclei sporgenti di color azzurro-bigiastro e spesso come in uno stato di decomposizione nel calcare brecciforme con numerose vene di calcite, e con grande quantità di terra rossa nelle fenditure, a circa 200 m. sopra Castrovillari sul Monte S. Angelo: trovai le selci nuovamente in vene potenti ed arnioni un centinaio di metri più in alto sullo stesso monte in calcare bigio, compatto, e sempre come nei monti di Verbicaro, di Campo Tenese, ecc., sopra pochi banchi che poggiano su quelli a *gyroporella*; il colorito di questa ultima selce, che si trova più in alto della chiesuola di *Madonna del Riposo*, è un po' differente dall'altra mostrandosi roseo-azzurrognolo, talvolta anche bigio. Selci abbondanti si presentano sulla destra della strada, che da Castrovillari conduce a Civita in banchi di calcare bigiastro, che inclinano ad est-sud-est nella regione denominata Scampito (in albanese).

Avrei potuto aggiungere qualche parola sull'età cui appartengono i calcari comprendenti le selci e gli altri che quelli sopportano, ma nulla vorrò affermare sopra quelle formazioni, sulle quali molto già potrei dire, prima che non sia pronunciato il verdetto della paleontologia, unica e sicura guida per la classificazione cronologica dei terreni fossiliferi. Attenderò con calma che i molti fossili da me raccolti in quest'autunno sieno classificati dall' illustre prof. Meneghini, il quale per l'aiuto valido, che mi porge nel lavoro della Calabria, si abbia la mia maggiore riconoscenza.

Bellissime selci con diaspri delle più rare varietà per colorito si trovano nei calcari marnosi e fra i gres dell'eocene superiore, che potentemente si sviluppa nella parte orientale del circondario di Castrovillari, in quasi tutta la immensa estensione fra Torre Cerchiara e Rocca Imperiale, quindi sulle sponde dell'alto Satanasso, del Saraceno, della fiumara di Canna, delle vicinanze di Nucaro, di Oriolo, di Alessandria del Carretto e di quella parte della Basilicata confinante con queste regioni, che perciò è tutta dell'eocene superiore, e niente affatto cretacea, come piacque di segnare al sig. Cosimo De Giorgi (¹). E giacchè abbiamo varcato il confine della Calabria non possiamo a meno di ricordare le stupende selci ed i diaspri di Terranova di Pollino e quelli che s'incontrano da questa borgata dirigendosi alla contrada Pietra di Sasso in straterelli frammezzo ai calcari compatti marnosi; nè dimenticheremo le selci della pittoresca Alpe di Latronico, che per la quantità di fossili, a me forniti nei suoi banchi calcari, meriterebbe monografia speciale.

Selci e diaspri analoghi si trovano in piccoli lembi della stessa formazione fra S. Sosti e S. Donato di Ninea nella zona, che si spinge alla sinistra sponda del Crati.

Osserverò poi al sig. Nicolucci, che in Calabria m'avvenne di vedere e di avere molte selci, che furono adoperate come pietre focaie degli antichi fucili od anche semplicemente per ottenere delle scintille allo scopo di accendere l'esca, ma nessun pezzo neppur lontanamente mi fece pensare ad un oggetto preistorico, dal quale secondo il sig. Nicolucci dovea essere prodotto.

Riguardo ai 16 coltelli silicei calabresi, che si conservano nel Museo Preistorico di Roma, ho già manifestato la mia opinione, che non siano assolutamente di Calabria.

(¹) C. De Giorgi. *Note geologiche sulla Basilicata*. Lecce, 1879.

L'aver rinvenuto in Calabria oggetti levigati in sì grande quantità non fa altro che avvalorare di più l'opinione dell'illustre Fischer, oggi sostenuta da altri valenti paletnologi, cioè che l'uomo preistorico ove trovava la selce, lavorava le sue armi ed i suoi strumenti con quella sostanza, e che là dove non trovava nè selci piromache, nè altri minerali a frattura concoidale e facili come quelle alla lavorazione, passava addirittura, senza quindi attraversare un periodo così detto archeolitico, alla levigatura delle roccie e dei minerali in posto, cioè alla preparazione di quelle azze che tanto numerose troviamo appunto sulle due sponde dell'istmo terziario ed alle falde meridionali della Sila, contrade che mancano assolutamente di selci piromache e che invece vanno ricchissime di roccie dure e della maggior tenacità, come dioriti, schisti, serpentini, ecc.

In tutta la Calabria - e qui abbraccio addirittura anche la provincia di Reggio, che questo autunno ho potuto visitare in alcuni de' suoi principali punti - noi troviamo pochissime, rarissime sieniti, che in poverissimo numero si presentano anche nella mia collezione, la quale, coi 68 oggetti descritti nella presente Memoria, arriva al numero di 300 pezzi.

Il sig. Ruggero nei 50 oggetti illustrati ne annovera tre, fra cui una porfirica ed il signor Nicolucci sopra 82 ne conta 10, numero veramente enorme. Però anche così forte numero di sieniti non deve spaventarci, quando noi confrontiamo con quest'ultima illustrazione, quelle che il sig. Nicolucci fece negli anni 1871 e 1877. Infatti nel 1871 la sua collezione di 38 pezzi comprendeva ben 17 sieniti, che nel 1877 doventavano 14 sopra 57, ed ora sopra 82 si riducono a 10. È a sperarsi che con buone diagnosi diminuisca ancora questo numero!

Ma se da una parte in quella collezione osservo con piacere diminuire le sieniti, giusta le mie previsioni che ho già manifestato in altra occasione ([1]), provo un senso ben diverso nel vedere aumentare il numero dei graniti, che nell'attuale sua collezione calabrese sono 14, mentre nel 1877 sopra 57 egli contava 5 pezzi di granito e 7 di granito amfibolico, e nel 1871 solo 5 di granito amfibolico: a questi numeri dobbiamo aggiungere ancora 4 pezzi di granulite pel 1877 e 3 pel 1879. Il signor Ruggero nella sua collezione di 50 pezzi conta 2 di gneis granatifero, 1 di granito ed 1 di granulite granatifera, mentre io non tengo che due azze di gneis e tre di granito amfibolico, e non 6 di granito come al sig. Nicolucci piacque di stampare ([2]).

Questa sproporzione è veramente enorme! E qui devo ripetere che il peso specifico è uno dei caratteri, che a me hanno servito sempre di base, fra i molti altri, per la determinazione de' miei oggetti litici, e molte e molte settimane ho consumato per la determinazione di questa proprietà nelle armi e negli strumenti litici calabresi.

Invano cerco un peso specifico nei lavori del sig. Nicolucci, li trovo invece nella Memoria del sig. Ruggero, ma sono appunto quei pesi specifici che per lui mi mettono in sospetto delle diagnosi, giacchè il peso specifico di 3,198, a cui

([1]) D. Lovisato, *Strumenti litici e brevi cenni geologici sulle provincie di Catanzaro e di Cosenza.* Atti della r. Accademia dei Lincei, ser. 3ª, vol. II. p. 776.

([2]) G. Nicolucci, *Strumenti in pietra delle provincie calabresi*, pag. 3.

arriva la sua accetta n. 33 [1], mi dice chiaramente che la sostanza componente non è *granito*, giacchè dei veri graniti, che si conoscono finora, nessuno è mai arrivato a quell'enormissimo peso specifico.

Mi perdoni il sig. Ruggero, ma io ritornerei anche sulle diagnosi delle accette che portano i n. 26 e 27, che rappresentano gneis granatiferi e sulla accetta n. 12, rappresentante una granulite granatifera: chi sa ch'egli non abbia la fortuna, che ho avuto io, di trovare qualche chinzigite fra le sue preziose reliquie preistoriche di Calabria! A supporre ciò sono indotto dall'avere egli osservato, parlando di graniti, come una varietà zeppa di granati trapezoedrici raggiunga la densità da 2,80 a 3.

Riguardo al granito feci altra volta [2] osservare che il suo peso specifico va da 2,593 a 2,652, e dissi allora che nessun granito era arrivato colla sua densità a 2,66. Sono questi i risultati ottenuti da coloro che specialmente si occuparono di pesi specifici di minerali e di roccie e quindi anche di quelli dei graniti. È vero però che delle densità del *gneis,* del *granito,* della *granulite,* come in generale di tutte le roccie composte di diversi minerali, notate nei libri, bisogna oggigiorno alquanto dubitarne, nè si debbono ritenere per positivi quei risultati, giacchè le diagnosi delle roccie nei tempi passati non erano fatte coll' accuratezza odierna. Sento quindi qui il bisogno di suggerire ad ognuno che voglia istradarsi in questi studî di fare da sè un esame accurato delle densità di una serie numerosa di campioni di gneis, di graniti, di granuliti, le diagnosi dei quali sieno esatte, e trarne un risultato, piuttosto che approfittare delle notazioni antiche dei libri. Infatti in un bel numero di pesi specifici calcolati da me in quest' anno, trovo quelli di 21 campioni di granito fra cui qualcuno porfirico, per la maggior parte di Sardegna, taluno della Calabria e della Selva Nera; ebbene di questi, 14 restarono fra i limiti fissati da 2,593 a 2,652, due rimasero inferiori arrivando il più basso a 2,5777, cinque superiori raggiungendo uno l'enorme peso specifico di 2,73: complessivamente quindi le densità di questi graniti andrebbero da 2,57 a 2,73. Notisi però che il campione di granito di Lanusei, con mica nera, a grana abbastanza minuta, che diede il fortissimo peso specifico di 2,73, contiene dell'amfibolo e quindi entra nella categoria dei graniti amfibolici. In breve Nota sui graniti della Sardegna che quanto prima presenterò a codesta r. Accademia dei Lincei, sarà mia cura di esporre di ognuno i pesi specifici, facendo sopra di essi delle considerazioni.

Questi pesi specifici mi portano a parlare anche dei serpentini. Fra serpentini e roccie serpentinose il signor Nicolucci contava 1 pezzo nel 1871, 2 nel 1877 ed 8 nel 1879; il signor Ruggero 4 (e non uno come asserisce il signor Nicolucci a pag. 3 della sua ultima Memoria), ed io assieme ai nuovi, dunque sopra 300, ne avrei 5 soltanto. Anche quei numeri di 8 e 4 mi sembrano enormi per sì piccole collezioni, e proprio non posso trattenermi dal manifestare nuovamente il dubbio che fra que' serpentini o roccie serpentinose che sieno, non si abbiano a trovare, delle belle nefriti e forse anche qualche saussurite!

I serpentini secondo il Bombicci [3] avrebbero le densità oscillanti fra 2,47

[1] Memoria citata, pag. 10.

[2] D. Lovisato, *Strumenti litici* ecc. Atti della r. Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol II. pag. 776.

[3] L. Bombicci, *Corso di Mineralogia.* Vol. II, parte 2ª, pag. 776.

e 2,60; secondo i Dana ([1]) da 2,5 a 2,65; secondo il Websky ([2]) da 2,3, presentata da una varietà dell'isola Calumet nel Basso Canadà, che sarebbe la *retilanite* di color giallo di cera, fino a 2,787, presentata dalla *bowenite* di Rhode-Island; quelli di Calabria da me esaminati vanno da 2,611 a 2,634, avendomi offerto una sola varietà del Reventino la densità di 2,558 ed altra roccia serpentinosa di Gimigliano quella rilevante di 2,805 ([3]). Ma nessuna varietà di serpentino, che conosca, superò la densità di 2,787 data dalla *bowenite*. Ora, se colla scorta di questo criterio noi passiamo in rivista i quattro pezzi della collezione Ruggero, che apparterrebbero a questa categoria, dobbiamo concludere che nessuno è un serpentino, cioè non l'accetta n. 2 che egli descrive come *roccia serpentinosa con elementi accessori* col peso specifico $= 2,958$; non quella portante il n. 14 colla diagnosi *serpentina prevalente con minerali accessori* dalla densità $= 2,964$; non l'altra n. 45 colla densità $= 2,983$, notata come *serpentina prevalente con amfibolo e magnetite;* e finalmente non la quarta n. 46 descritta semplicemente come *roccia serpentinosa* col peso specifico $= 2,980$.

Ciò poi che autorizza maggiormente a dubitare di quelle diagnosi dopo l'importante criterio dei pesi specifici si è la durezza elastica che va per quei pezzi da 3 a 5,5, e più di tutto il vedere la roccie serpentinose notate sempre con elementi accessori, fra cui non mancano l'amfibolo e la magnetite.

Dicasi tutto questo anche pegli oggetti di serpentino e di roccia serpentinosa della collezione Nicolucci, ad onta che manchino sempre dei pesi specifici. Infatti sopra 82 pezzi ben 8 sono appartenenti a questa categoria, giacchè noi troviamo un percussore di *roccia serpentinosa con abbondanza d'amfibolo,* un martello (n. 15) di *roccia serpentinosa color verde-chiaro con grandi venature di quarzo jalino* figurato nella tavola II, figura 1, e che secondo me è il più prezioso della collezione per quelle venature di quarzo jalino; non faccio poi che citare le 6 accette, che vengono descritte come di serpentino o di roccia serpentinosa, cioè il n. 47 di *roccia serpentinosa sparsa di macchie rossastre*, l'accetta n. 50 di *roccia serpentinosa a struttura fibrosa*, il n. 59 di *serpentino*, il n. 60 di *roccia serpentinosa verdastra sparsa di macchie rosse*, il n. 72 di *roccia serpentinosa nerastra con venature rosse, bianche e verdastre*, il n. 78 di *serpentino.*

Non entrerò nel campo ancora abbastanza oscuro delle specie minerali, che o con frequenza od in via assolutamente accidentale ed accessoria s'uniscono ai serpentini per costituirne delle varietà ben caratterizzate, giacchè a me avvenne di trovare nei serpentini di Calabria la dolomite, la calcite, la steatite, l'asbesto, il diallaggio, il crisotilo, la pirite, la clorite, la silice, l'amfibolo in masse, ma mai l'amfibolo cristallizzato e disseminato e la magnetite, che però benissimo potrebbero

([1]) I. D. Dana, *A system of Mineralogy*. New York, 1877, pag. 464; ed E. S. Dana, *A text-book of Mineralogy*. New York, 1878, pag. 328.

([2]) M. Websky, *Mineralogische Studien - Eine Sammlung wissenschaftlicher Monographien* - Erster Theil: *die Mineral - Species nach den für das specifische Gewicht derselben angenommenen und gefundenen Werthen*. Breslavia, 1868; pag. 24, 27, 32, 38 e 63.

([3]) D. Lovisato, *Cenni geognostici e geologici sulla Calabria*. Bollettino del r. Comitato geologico, n. 3 e 4; 1879, pag. 120.

essere compresi nei serpentini calabresi, ciò che sarà dimostrato dalle analisi che si stanno facendo dal prof. Cossa.

La questione che pongo è questa: come va che nella collezione del signor Ruggero sopra 4 pezzi ne troviamo 3 con elementi accessori, nella collezione del signor Nicolucci 2 sopra 8 e nella mia sopra 5 non ne trovo alcuno da segnalare come accompagnato da elementi accessori, specialmente dall'amfibolo, dalla magnetite e dal quarzo, se si vuol eccettuare il diallaggio comune in tutti i serpentini di Calabria?

Nè sono io solo a dubitare di quelle diagnosi, che il prof. Pio Mantovani in recente pubblicazione fatta per la provincia di Reggio, facendo forse eco ad una mia osservazione generale ([1]), dice « *non nascondo il dubbio che le due accette del signor Ruggero indicate come di roccia serpentinosa con elementi accessori* (sarebbero i n. 2 e 14), *tali non siano, ma si accostino per composizione alla mia, conservando però più distinti i caratteri d'una vera prehnite* » ([2]).

Collega a lui nel dubbio, non posso esserlo nella diagnosi per una *prehnite*, per la quale i pesi specifici sono troppo alti, giacchè secondo il Dana ([3]) essi vanno da 2,8 a 2,953; nè credo tanto meno possa essere *prehnite* la sostanza componente l'azza bellissima, che io pure vidi e che fu dal signor Mantovani descritta nella citata Nota, perchè troppo forte il peso specifico di 3,034, ch'egli vorrebbe giustificare con varietà compatta di *prehnite*, riccamente silicifera. Il Dana dà l'analisi ([4]) di ben 14 varietà di *prehnite*, nelle quali noi troviamo la quantità di silice dal minimo di 42,50 $^0/_0$ arrivare al massimo di 44,74. Crede il signor Mantovani che questa piccola differenza nel rapporto della silice - ammesso che la silice abbia tanta potenza - possa far variare tanto il peso specifico? Se egli crede ciò, non lo credo io, come non sono niente affatto inclinato a credere che si possano confondere le *prehniti* colle *giade* e colle *nefriti*, che costituiscono molte delle nostre armi preistoriche! So che belle lastre pulite di questa sostanza si tagliano nella China, ma non ne vidi mai in Europa di vera *prehnite*.

Alla presenza della *prehnite* da lui annunciata nella provincia di Reggio, aggiungerò qui quella di Catanzaro, che già pubblicai ([5]) d'aver trovato in gruppetti e particelle globiformi di color verde smeraldino nella massa porfirica con baritina della Fiumarella di Catanzaro.

Continuando ancora sui pesi specifici, dati dal signor Ruggero, dirò che non può essere di *sillimanite* la piccola accetta n. 8, perchè colla densità = 2,986, mentre le *sillimaniti*, le *bucholziti* e le *fibroliti*, che ora si considerano assieme, hanno il loro peso specifico, che va da 3,1 a 3,3 e propriamente da 3,1 a 3,2 (arrivando anche a 3,239) per le varietà *bucholzite* e *fibrolite*, e da 3,2 a 3,3 per la *sillimanite* (arrivando secondo l' Hausman anco fino a 3,410). L'accettina n. 8 potrà essere di sillimanite solo quando il peso specifico dato sia sbagliato.

È a deplorarsi poi la mancanza di pesi specifici nella ricca collezione del

([1]) D. Lovisato, *Nuovi oggetti litici* ecc. Atti della r. Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol. III. p. 356-357.

([2]) P. Mantovani, *Oggetti di pietra raccolti nella provincia di Reggio di Calabria.* (Estratto dal Bullettino di palet. it., anno 6°, fasc. 7 e 8, 1880, pag. 8).

([3]) I. D. Dana, *A system of Mineralogy*, pag. 410.

([4]) Opera citata, pag. 411.

([5]) D. Lovisato, *Sulle Chinzigiti della Calabria.* Atti della r. Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol. III. p. 234.

signor Nicolucci, la quale, come egli dice, vanta 6 pezzi di quarzo e di roccie quarzose (uno di meno dell'anno 1877 nel quale erano 7), mentre egli ne lamenta il difetto nelle collezioni del signor Ruggero e mia. Mi perdoni l'egregio paletnologo, ma il n. 95 della mia collezione, citato come stupendo esempio d' azza - ciottolo, dissi che è di *quarzite*.

Vi mancano nella collezione Ruggero e nella mia i *protogini*, ma non fan difetto nella mia le *eufotidi*, giacchè ho citato (¹) 4 azze oscillanti fra la *diorite* ed il *gabbro* e due proprio di *gabbro*. È vero che ho fatto male di non sostituire pei profani il vero vocabolo italiano di *eufotide* all'altro di *gabbro*, che è straniero, e che il signor Nicolucci considera poi come esotico colla *tremolite*, colla *variolite*, colla *saussurite*, ecc. A queste *eufotidi* chi sa quante altre ne dovrò aggiungere e che sono comprese nella categoria generale delle azze a *roccia dioritica*, che arrivano al bel numero di 167, più della metà di tutta la mia collezione!

Tempo e mezzi mi mancarono e mi mancano per un' esatta separazione. D'altra parte come si fa a riconoscere esattamente senza analisi un'*eufotide* da una *diorite*, cioè, il feldispato *labradorite* dall'*oligoclasio* ed il *diallaggio* dell'*amfibolo*, quando specialmente gli elementi sono minutissimi e colla patina regalata alle reliquie preistoriche dai secoli?

Dice poi il signor Nicolucci che la preponderanza in alcune contrade di oggetti litici lavorati in talune specie di roccie (ed aggiungo io anche di minerali), e la povertà o assenza di oggetti formati di altro materiale, può spiegarsi col predominio di taluni elementi geologici e la scarsezza di altri nelle diverse contrade, sicchè tornava comodo agli uomini preistorici di servirsi di materiali che aveano alla mano anzichè andarli cercando in luoghi più o meno lontani per lavorare i propri arnesi. « E per non parlare che del solo granito, dice egli, chi non sa che i più bei graniti delle Calabrie si trovano tutti nella regione occidentale? »

Fra quelli, che non conoscono i graniti nella parte occidentale, e particolarmente sul versante meridionale ed occidentale del Reventino, sono io, assicurando chiunque che da Gizzeria a Sambiase, a Nicastro, a Zangarone, a Feroleto e dall'altra parte da Gizzeria alla sponda sinistra del Savuto mancano assolutamente i graniti, come essi del tutto difettano, dopo la comparsa dei superbi gneis-granitici allo sperone di Stallettì ed a Squillace, su tutta la sponda meridionale dell' istmo terziario, predominando nel Monteleonese, le chinzigiti ed in generale le rocce a granati. Ed è sull' una e sull'altra sponda di questo istmo che furono rinvenuti per la massima parte gli oggetti preistorici del signor Nicolucci, del signor Ruggero e della mia collezione, in regioni adunque dove mancano i graniti, se facciamo eccezione degli affioramenti di Catanzaro. Andando verso sud nella provincia di Reggio troviamo i graniti a Bagnara ed a Scilla sulla costa occidentale ed a nord alcuni pochi affioramenti nella catena littorale, cioè dalla sponda destra del Savuto fino all' altezza di Diamante. Volendo affermare qualche cosa sui graniti, dovremo dire, ch' essi abbondano nella parte orientale e non nell' occidentale.

Se adunque, come seguita a dire il signor Nicolucci, da questa regione (occidentale) son venuti nella sua collezione tutti gli strumenti di granito, alcuni dei

(¹) D. Lovisato, *Strumenti litici* ecc. Atti della r. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. II, p. 773.

quali, per finitezza di lavoro, sono fra i più eleganti della sua collezione, conviene si persuada derivar essi da una regione, dove mancano i graniti.

In quanto ai diversi tipi di forma il signor Ruggero ed io non abbiamo seguito il signor Nicolucci, che, distinti tutti gli oggetti della sua collezione calabrese in 7 categorie, comprendenti i *percussori*, i *lisciatoi*, i *macinelli*, i *martelli*, le *accette*, gli *scalpelli*, gli *oggetti in selce*, divide poi le *accette* in cinque tipi che sono il *conoidale*, il *sub-conoidale*, il *triangolare*, il *rettangolare* ed il *tipo ovale*: io non ho seguito quella divisione e quella suddivisione, perchè le differenze fra questi tipi non sono così notevoli da poter ascrivere con sicurezza un oggetto a questo piuttosto che a quell'altro tipo, tantissime e minute gradazioni dall'una all'altra forma generano confusione. Il signor Ruggero però fece cosa, che non ho fatto io; ha cominciato con un ciottolo allungato a taglio strettissimo e che pare uno scalpello, per passare alle accette a taglio largo più del corpo, quindi a taglio più stretto, poscia a taglio leggermente arcuato ed a quelle coi fianchi paralleli, descrivendo infine le accette a doppio taglio e le altre a doppio uso. Io descrissi i miei oggetti preistorici calabresi, come mi capitarono e come li ho potuti studiare, adoperando qualche volta la parola scalpello o sgorbia, quando gli arnesi si avvicinavano a queste forme.

Fra i 5 tipi, in cui il signor Nicolucci ha diviso le accette, troviamo il *rettangolare*, al quale ascrive quelle ascie, che presentano 4 lati, di cui l'inferiore tagliente, leggermente convesso, gli altri piani, essendo il tagliente sempre più largo dal lato opposto: osserva che questa forma non costituisce veramente un rettangolo, ma una figura che molto gli si avvicina e che sarebbe propriamente il trapezio.

Osserva il signor Nicolucci, che oltre gli strumenti lavorati in rocce indigene, sono stati trovati da me nelle provincie calabresi anche oggetti, che per la loro natura mineralogica sembrano essere stranieri a quelle provincie, ed annovera la nefrite, la cloromelanite, la fibrolite, la tremolite, la saussurite, la variolite. Fermandosi specialmente sulla nefrite, che si trovò finora nella Cina, nelle contrade levantine del Tibet e nella Siberia orientale, dice che non potea essere introdotta in Europa, che quando le relazioni fra i popoli, aveano acquistato una certa estensione, quindi la sua introduzione nelle nostre regioni meridionali non debba risalire ad un'età antichissima, ma sibbene a quella della pietra, che già si confondeva con quella del bronzo. Non è improbabile, dice egli benissimo che i Fenici, i primi che velegiassero pel Mediterraneo, esercitandovi commercio fin dalla prima età del bronzo, portassero la nefrite, da loro acquistata nell'interno dell'Asia, ai popoli dell'Europa meridionale ed occidentale, e quindi anche dell'Italia. Così soggiunge sarebbe spiegato, perchè in Calabria gli oggetti lavorati in questo minerale si trovino in una certa relativa abbondanza, perciocchè i Fenici che nell'aurora dell'età bronzaria aveano messo già il piede nella Trinacria potevano più agevolmente che altrove collocare le loro mercatanzie nelle Calabrie, che un solo brevissimo tratto di mare separa dalla Sicilia. Bisogna dire però che i Fenici non sbarcassero le loro mercanzie subito al di là di questo brevissimo tratto, che separa la Calabria dalla Sicilia, ma andassero molto più oltre al mare di s. Eufemia o poco al di qua, per non supporre al Jonio nel golfo di Squillace. Infatti la maggior parte degli oggetti preistorici di sostanza esotica si trova come dissi già sulle due sponde dell'istmo

terziario, dove le popolazioni preistoriche dovevano essere maggiormente concentrate, occupando il Monteleonese e le falde delle Serre nella Calabria meridionale, le falde meridionali ed occidentali della Sila e tutto il Reventino colle sponde del Savuto e specialmente le alture di Ajello, di Serra d'Ajello, di Cleto, di Altilia nella Calabria settentrionale.

Più oltre non ricordo altri arnesi litici che un'azza avuta a S. Fili, altra veduta a Paola, ma che suppongo importata, una terza che vidi a Lungro e che dicesi trovata all' imboccatura della galleria del deposito salifero ed una quarta a S. Sosti. Più oltre nessuno conosce questi oggetti, neppure vedendo quelli che io sempre portava meco per saggio.

Se andiamo dall'altra parte, cioè nel Reggiano, ben pochi sono gli oggetti litici che ivi troviamo, difatti per quella provincia, che forma la terza Calabria, oltre le 4 azze ed un ciottolo, di cui fa menzione con qualche cenno descrittivo il sig. Mantovani, assieme ad un coltellino di selce bionda, lungo circa 10 cent., trovato nella località chiamata *Salto la Vecchia*, ed una lancia di selce grigio-giallastra e ad alcuni frammenti di coltellini di ossidiana, trovati con qualche nucleo della stessa sostanza minerale, null'altro conosciamo di quella provincia, oltre i pezzi superiormente descritti. Nè io fui più fortunato del signor Mantovani, giacchè nelle mie escursioni di quest' autunno che durarono una quindicina di giorni fra Reggio, Aspromonte e la Piana di Palmi non ho potuto raccogliere che la sola azza descritta anteriormente.

Faccio qui sotto seguire il quadro di tutti gli oggetti litici finora illustrati della Calabria ed appartenenti alle collezioni del signor Nicolucci, del signor Ruggero ed alla mia, secondo la natura mineralogica della sostanza in cui sono lavorati gli oggetti, perchè possano risaltare all'occhio le proporzioni dei pezzi formati con questa o con quella sostanza, per vedere quali sieno in predominio e quali si presentino in più scarso numero. Nella categoria degli *indeterminati* devo mettere i 56 oggetti litici, cui accenna il signor Ruggero nella sua lettera all'illustre prof. Chierici, giacchè di essi non ci dice altro che in quanto alle roccie rappresentate da 30 di questi non aveva da segnalare novità, predominandovi le *amfiboliche*, cioè le *dioriti* di varie specie per struttura e dimensioni di elementi, e le *affanitiche*, e talora con tale prevalenza dell'amfibolo da poterle designare per *amfiboliti*, aggiungendo che alcune sono di *roccia serpentinosa*, una di *sillimanite* e che le forme riproducono le altre: riguardo agli altri 26 oggetti, che, allora della pubblicazione, non aveva ancora ricevuto, dice - forse con soverchio ardire - sembrargli dalle indicazioni avute non sieno di roccie esotiche. Nella stessa categoria metteremo l'azza trovata dal signor Mantovani in prossimità di Reggio, colle due azze e col ciottolo di proprietà del sig. cav. Pietro Romeo, rinvenuti al Monte Basilicò, che ad oriente di Reggio s'eleva per 1790 m. sul livello del mare, giacchè questi oggetti sono descritti con cenni così vaghi e dubbiosi da non poterli ascrivere ad una categoria determinata. La superba azza del signor Lofaro, (che metto nel numero delle nefriti) assieme al bellissimo coltellino di selce bionda, posseduto dal signor Rossi, ed alla lancia di selce grigio-giallastra di proprietà del signor Romeo, ai quali accenna il sig. Mantovani, figurano nella colonna che intitolo Reggio. Ho notato nella prima colonna quelle roccie e quei minerali, che ho trovato nelle diverse Memorie illustrative.

Ed ora ecco il quadro:

NATURA MINERALOGICA	NICOLUCCI			RUGGERO		LOVISATO		Reggio	TOTALE
				Mem.	Let. al Chierici	Memorie			
	1871	1877	1879	1878.	1878.	1878 1879	1881		
Affanite	6	1	2	4	—	—	—	—	6
Amfibolite	—	—	3	—	—	3	—	—	6
Amfibolo (con pirossene e roc. pirosseniche)	—	—	—	—	—	13	—	—	13
Arenaria (compatta)	—	1	2	—	—	—	—	—	2
Asbesto amfibolico	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Bronzite	—	—	—	—	—	3	—	—	3
Calce con magnesia	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Chinzigite	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Conglomerato di porfido	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Diabasio	—	—	—	—	—	2	—	—	2
Diaspro	—	1	1	—	—	—	—	—	1
Diorite	4	6	22	24	—	116	49	—	211
Eufotide (gabbro)	1	1	1	—	—	3	—	—	4
Feldispato e grammatite	—	—	—	2	—	—	—	—	2
Fibrolite (sillimanite e bucholzite)	1	1	1	2	—	13	2	—	18
Ftanite	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Gneis	—	—	—	2	—	1	—	—	3
Granito	—	5	14	1	—	—	—	—	15
Granito amfibolico	5	7	—	—	—	3	—	—	3
Granulite	—	4	3	1	—	—	—	—	4
Halleflinta	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Leptinite granitica	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Porfido verde	—	1	1	—	—	—	—	—	1
Protogino	—	—	3	—	—	—	—	—	3
Quarzo e roccie quarzose	3	7	6	—	—	1	—	—	7
Roccia granitoide	—	6	—	—	—	—	—	—	—
Roccia vulcanica	—	—	—	—	—	4	—	—	4
Schisto	—	—	—	—	—	11	2	—	13
Selce	—	—	—	1	—	4	—	2	7
Serpentino e roccia serpentinosa	1	2	8	4	—	3	2	—	17
Sienite	17	14	10	3	—	8	—	—	21
Tremolite	—	—	—	—	—	1	3	—	4
Variolite	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Verde antico	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Cloromelanite	—	—	1	—	—	8	1	—	10
Eclogite	—	—	1	—	—	3	1	—	5
Giadeite	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Glaucofano	—	—	—	—	—	4	—	—	4
Nefrite	—	—	2	—	—	16	1	1	20
Saussurite	—	—	—	—	—	1	4	—	5
Saussurite con giadeite	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Indeterminate	—	—	—	5	56	3	2	4	70
	38	57	82	50	56	232	68	7	495

Abbiamo adunque il numero complessivo di 495 oggetti litici per le Calabrie nelle tre collezioni più o meno illustrate e nei pochi sparsi della Calabria reggina: di questi, 487 sono levigati, 8 soltanto scheggiati.

Se a tale numero, già per se stesso rilevante, aggiungiamo i 70 oggetti del Foderaro di Catanzaro, i 30 circa posseduti dall'avv. Valentini nella stessa città, i 60 della collezione particolare dell'egregio amico mio dott. Giovanni Luino, che fu provveditore agli studî per la media Calabria, ed un centinaio circa di sparsi fra il Museo di Catanzaro e fra individui particolari assieme ai miei finora non descritti, noi avremo il bellissimo numero di 750 e più oggetti litici, rinvenuti finora nelle Calabrie, fra i quali solo pochissimi di selce e di diaspro.

Dei 495 oggetti del quadro appartengono alla provincia di Catanzaro 434, a quella di Cosenza 49 ed a quella di Reggio 12.

In quanto alla loro composizione, dopo gli arnesi a *roccia dioritica* vediamo predominare, per le diagnosi finora fatte, quelli di *sienite* ed in terza linea niente meno che quelli di *nefrite*, cui succedono gli altri di *fibrolite* (sillimanite), di *roccia serpentinosa* o di *serpentino* ecc.

Osserva il signor Nicolucci che la provincia di Catanzaro è quella che ha fornito il maggior numero di oggetti litici, perchè in essa si sono fatte le maggiori ricerche per acquistarne. Anche in ciò duolmi di non poter essere d'accordo col dotto signore, giacchè, come già dissi, se si sono trovati nella provincia di Catanzaro e particolarmente sulle sponde dell'istmo terziario in maggior numero le armi e gli utensili litici dei primi uomini, egli è perchè ivi erano accentrate in maggior numero le popolazioni preistoriche e senza tema d'ingannarmi potrei dire al signor Nicolucci ed a chiunque altro volesse continuare nelle collezioni preistoriche calabresi, che a poco o nulla approderebbero le loro più attive ricerche nelle altre due provincie, chè la messe sarà misera, nè saranno più fortunati di quello che sia stato io nelle mie appassionate ricerche.

Il signor Nicolucci dice, che i luoghi di rinvenimento dei pezzi della sua collezione calabrese sono quasi tutti posti sul versante occidentale o tirreno, cioè in quella zona che dissi mancante di graniti. Anch'egli come il signor Ruggero avrebbe voluto fissare pei suoi pezzi le altitudini, a cui furono trovati, e quasi con rincrescimento aggiunge non conoscere di tutti l'altitudine del loro rinvenimento, soggiungendo « non posso nè confermare, nè infirmare la opinione dell'egregio capitano Ruggero, il quale ha stabilito che i limiti de' rinvenimenti degli oggetti litici delle Calabrie sieno tra i 900 e 200 metri di elevazione, ma che la zona più fertile sia quella vicina al limite superiore ». È molto meglio che abbia risparmiato questa fatica, giacchè, assegnando quei limiti, avrebbe commesso un errore come il signor Ruggero, il quale andò egualmente errato nelle sue induzioni supponendo che lungo il littorale da Paola ad Amantea si debbano ritrovare le azze anche al livello del mare, perocchè pochissime se ne rinvengono nelle alture, punto al livello del mare.

Riferisce al neolitico il signor Nicolucci le armi levigate, trovate in Calabria, giacchè egli dice gli aresi levigati non furono in uso che in quella età, che i Francesi chiamano *de la pierre polie*, appunto perchè in quest'epoca e non mai prima si adoperarono le pietre levigate. Io invece le riferisco all'età della pietra, alla prima

età dell'uomo, giacchè i primi popoli calabresi sulle sponde dell'istmo terziario si trovavano fra roccie cristalline, mancanti di selci o di minerali affini a frattura concoide, e quindi dovevano per la preparazione delle loro armi e dei loro strumenti passare addirittura a levigare le roccie cristalline, servendosi dei ciottoli di fiume e di torrente, che avevano già una forma molto appropriata all'oggetto litico che volevano preparare.

Il signor Ruggero, rispondendo ad un'osservazione molto giusta fattagli dall'egregio prof. Chierici del fatto notevole che, mentre i 27 oggetti litici della mia prima Memoria comprendevano parecchie sostanze esotiche, i suoi 50 erano formati tutti ad eccezione di due di roccia indigena, dice, dopo altre osservazioni, che qui sarebbe troppo lungo il ripetere, che bisogna tener conto « che il Lovisato ci dichiara di aver illustrato per ora una piccola parte della sua raccolta, e probabilmente avrà dato la preferenza agli esotici come i più interessanti ». Non ho mai fatto dichiarazioni di tal genere per la semplice ragione, che non potea farle, non avendo nella pubblicazione della prima Memoria dato la preferenza a questi oggetti piuttosto che a quegli altri; li descrissi e li illustrai mano mano che ho potuto determinarli, come del resto ad evidenza lo dimostrano le successive Memorie su questo argomento, contenendo esse anzi in proporzione maggiore numero di roccie e minerali esotici. Aggiunge poi che « se potrà accadere di confondere tra loro alcune roccie pei loro caratteri esterni per es. i graniti, le sieniti, le dioriti, ecc., massime quando si trascuri l'importante criterio della densità, non mi pare che possano correre ugual pericolo le roccie esotiche summentovate ». A me pure sembra che non dovrebbero correre alcun pericolo di confusione le *cloromelaniti*, le *giadeiti*, le *nefriti*, le *sillimaniti*, ecc., ma quando veggo fra i serpentini azze che per tutti i caratteri si mostrano nefriti, sono costretto a concludere, che proprio nella classificazione delle roccie e dei minerali esotici si può correre il maggior pericolo.

A proposito ancora della determinazione di questi oggetti, che sempre sostenni essere difficilissima, il prof. Mantovani, che trovava la mia prima Memoria (¹) più interessante per la Mineralogia che per la Paletnologia (²), in recente scritto (³) dice che sarebbe cosa assai proficua alla scienza, se i molti e begli oggetti descritti dai signori Nicolucci e Ruggero e da me potessero venir sottoposti ad un accurato confronto e diligentemente analizzati da qualche autorevole mineralogista, poichè la proporzione di materiali esotici, notata da me, costituisce un fatto degno della massima attenzione.

È questo un bisogno che deve essere sentito da tutti gli amanti del vero, ma non so, come il prof. Mantovani, che non ha visto mai la mia collezione, possa dire, parlando delle collezioni dei signori Nicolucci e Ruggero, quasi spoglie di roccie esotiche, che per contrario il prof. Lovisato avrebbe *un numero piuttosto rilevante di roccie esotiche, o tali ritenute*. Mi creda il prof. Mantovani, che gli oggetti litici da me descritti come *cloromelaniti, giadeiti, nefriti, saussuriti, fibroliti* o *sillimaniti, glaucofani, tremoliti*, ecc., sono proprio tali, e qualora con qualsiasi più valente

(¹) *Di alcune azze, scalpelli*, ecc.

(²) Bull. di Paletnologia Italiana, anno 4°, 1878, pag. 34.

(³) Bullettino di Paletnologia Italiana, anno 6°, 1880, pag. 106.

mineralogista volesse esaminarli egli stesso, mi lusingo che non sarebbero ritenuti diversi.

Egli vedrà qua e là nei miei scritti lasciato qualche pezzo in dubbio, e questo feci tutte le volte che mi mancavano gli elementi necessari per poter bene diagnosticare: un'altra cosa egli vedrà apparire dai miei scritti, ed è, che tutte le volte che mi cadeva dubbio sulla determinazione di uno dei miei oggetti, ricorreva alla migliore fonte, che si possa avere in Europa per questi studî, all'illustre prof. Fischer, che, con una gentilezza senza pari, non mi negò mai il suo valido appoggio, pel quale gli protesterò perenne riconoscenza.

Infiammato fuor di dubbio d' amore per la scienza esclama: « E chi assicura che, meglio rovistando fra quelle formazioni, non facciano capolino l'enigmatica cloromelanite, la nefrite, la fibrolite ed altre sostanze fino ad ora credute esotiche? » Mi presento io ad assicurare il signor Mantovani, che quei minerali rari, come la *nefrite*, la *giadeite* e la *cloromelanite* non esistono in Calabria, che perciò non saranno trovati neppure da coloro, che meglio di me rovistassero le Alpi calabresi, che con tanto amore ho studiato in questi ultimi anni. Riguardo alla fibrolite poi rimando il signor Mantovani a quello che ho stampato molto prima ch'egli manifestasse queste sue ultime idee.

Aggiungo poi per la *nefrite,* la *giadeite* e la *cloromelanite* che per gli studî fatti dai geologi alpini credo di poter ciò asserire anche per le Alpi settentrionali. Infatti come poteano passar inosservati ai valenti studiosi dei nostri colossi settentrionali minerali così rari, così superbi?

In altro lavoro, dove esponeva questi medesimi principî, diceva restarmi come faro di salvezza la Sardegna: ma in una serie di escursioni compite nell'anno decorso e che durarono più di due mesi, ho dovuto convincermi, che anche qui invano avremmo cercato que' preziosi minerali.

Adunque la *cloromelanite*, la *giadeite* e la *nefrite* sono esotiche per l'Italia intera, nè con profitto noi cercheremo queste sostanze in tutta Europa.

Infatti, se questi minerali esistessero in Europa, dovremmo trovarli nelle Alpi a preferenza che negli altri colossi montuosi. Ma nessuno finora li ha scoperti. L'uomo preistorico li avrà esauriti! Ma come va che non ha lasciato dei rifiuti, neppure un frammento, che raggiunga la grossezza di un pugno, in uno dei conglomerati, che così bene si sviluppano nelle vallate ai piedi delle Alpi e specialmente in Calabria, neppure un ciottolo nelle alluvioni, nei fiumi, nei torrenti? Questi minerali si saranno presentati in punti speciali, in zone ristrette! Ma allora come si spiegano le tante varietà di giadeiti e di nefriti, così diverse fra loro per colorito nei pezzi lavorati che si trovarono in Italia e nel resto dell'Europa, colorito che oscilla dal verde pomo al verde smeraldo, al verde-azzurro, all'azzurro verdognolo ed anche al violaceo, e che evidentemente manifesta una estesa, larga provenienza?

Si noti che il prof. Fischer in questi ultimi 8 anni ebbe da pubblici e privati musei dell'Italia, della Germania, della Svizzera e dell'Austria solo in azze di giadeite il peso assoluto di 15690 grammi, di cloromelanite 5334 e 558 di nefrite, dovendosi aggiungere alle ultime il peso di alcune centinaia di accettine, di coltellini, di scalpellini del lago di Costanza e delle mie, ed a quello delle cloromelaniti il

peso degli oggetti in questa sostanza della mia collezione. Ed a questo proposito m'è di grande conforto l'autorità dell'illustre paletnologo di Friburgo, il quale approfittando dei pesi dati superiormente, conclude che essi per queste sostanze, che non sono già varietà di roccie, ma essenzialmente minerali affatto omogenei, fanno pensare nettamente a manifestazioni non così facili ad esaurirsi.

E poi come va che dell' *eclogite* pur tanto rara, che fu adoperata similmente per accette nei diversi luoghi della terra e che in generale ha una provenienza molto limitata in confronto dei graniti, dei gneis e delle dioriti, noi conosciamo la roccia in posto in tanti luoghi, mentre ci rimangono sconosciuti solo quelli della *giadeite*, della *cloromelanite* e della *nefrite*?

Nè per questi minerali cotanto rari possiamo pensare che in alcuni casi il materiale grezzo sia stato portato in Europa, giacchè all'infuori del blocco di nefrite della miniera di allume di Schwemsal, che certamente non ha ivi la sua patria, noi non troviamo altri blocchi sparsi in Europa.

Dobbiamo adunque per questi minerali cercare le provenienze fuori d'Europa. È sempre all'Asia che dobbiamo rivolgere i nostri sguardi. Ma pur troppo per le cloromelaniti nulla ancora possiamo dire.

L' illustre prof. Fischer, che vagheggiava il ritorno di due signori ungheresi, i quali nei loro viaggi nel Turkestan, nella China e nell'India gli avevano promesso di raccogliere tutti i minerali rari di *nefrite*, di *giadeite* e di *cloromelanite* allo stato grezzo, ebbe la disillusione di vedere fra i bellissimi pezzi da loro portati l'assoluta mancanza della cloromelanite. I campioni da loro raccolti e che aveano potuto comperare ad un mercato, provenienti per la massima parte da Bhamo, città commerciale dell'Irawaddy nell'impero Birmano, appartenevano alle più belle varietà di giadeite e di nefrite. Ma la varietà di giadeite, che il più spesso è rappresentata nelle nostre azze europee è rara a rinvenirsi tra quei campioni, fra i quali solo qualche pezzo sembra appena somigliante col materiale di un'azza preistorica.

In ogni modo si è ottenuto per mezzo delle ricerche dell' illustre scienziato tedesco un grande vantaggio, quello di conoscere una località definitiva per la provenienza della giadeite. Nè egli diminuisce le sue attivissime ricerche per conoscerne altre e per scoprire quelle della cloromelanite. Nessuno più di me desidera che gli sforzi intelligenti dell' onorevolissimo paletnologo Fischer sieno coronati del miglior esito, perchè in questo modo potremo venire alla risoluzione più importante della preistoria calabrese, che mi sta a cuore, quasi come quella della mia Istria natia.

Biossido di molibdeno.

Memoria dei dottori FRANCESCO MAURO e RUGGIERO PANEBIANCO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 giugno 1881.

(Con una tavola)

Per preparare il biossido di molibdeno vi sono parecchi metodi che brevemente esponiamo.

Bucholz l'ottenne riempendo di molibdato ammonico un crogiuolo ed esponendolo, dopo averlo ben coperto, ad un forte calore. Quest'ossido formato dall'anidride molibdica a spese dell'idrogeno dell'ammoniaca, si presenta in laminette cristalline, con splendore metallico e colore rosso carico; il peso specifico è 5,66.

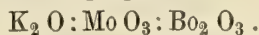
Berzelius l'ottenne riscaldando il molibdato sodico secco (il quale può contenere senza inconveniente un eccesso di soda) con cloruro ammonico, e lo descrive come una polvere di color bruno-carico, che appare porpora e brillante alla luce diretta del sole.

Si può pure ottenere in polvere riscaldando all'aria il molibdeno o il suo sesquiossido; o riscaldando al rosso in una corrente d'idrogeno l'anidride molibdica, il molibdato mercuroso, il trimolibdato potassico o sodico.

Ullik fu il primo ad ottenere il biossido di molibdeno in piccoli cristalli fondendo il trimolibdato sodico, in un crogiuolo di porcellana, ed aggiungendovi pezzettini di zinco. Il biossido preparato così si presenta in cristalli azzurro-violetti per riflessione come l'indaco sublimato, traslucidi e rosso violetti per trasparenza.

Noi allo scopo di preparare cristalli misurabili e compararli a quelli degli altri biossidi, abbiamo immaginato un nuovo metodo che esponiamo.

Si fonde in un crogiuolo di platino della capacità di 50 c.c. circa, nel piccolo forno Perrot una miscela formata con gr. 14,4 circa di anidride molibdica, ottenuta per calcinazione debole dal molibdato ammonico ordinario, 14 gr. di carbonato potassico privo d'acqua, e 7 gr. di anidride borica: dai numeri dati si scorge facilmente che il miscuglio è fatto nella proporzione

$$K_2O : MoO_3 : Bo_2O_3 .$$

Tre o quattro ore di fuoco bastano per ottenere i cristallini di biossido di molibdeno, avendo cura di lasciare raffreddare il crogiuolo nel forno.

I cristallini, che si trovano disseminati nella massa fusa, dalla quale si separano trattandola con acqua distillata a b. m., si lavano prima con ammoniaca, poi con acqua, in seguito con acido cloridrico e finalmente con acqua distillata. Essi sono

principalmente dei prismetti a sezione quadrata a facce brillanti, che con l'aiuto della lente si scorgono in generale irregolarmente terminati alle estremità.

Una preparazione ci ha dato per 14,4 gr. di anidride molibdica 5 gr. circa di biossido in cristalli.

Per la buona riuscita dell' operazione è utile mettere il coperchio al crogiuolo, e badare che la pressione del gas non sia inferiore a mm. 0,018; che se la temperatura è poco elevata si avrà una massa fusa rossastra nella quale si trova poca polvere cristallina di biossido di molibdeno, e trattando con acqua si separa una sostanza rosso di ruggine, simile all'ossido idrato ferrico, la quale è del biossido idrato di molibdeno.

Studiati i cristallini abbiamo trovato che essi appartengono al sistema dimetrico $c = 0,5774$.

Le forme osservate sono: (110), (100), (510), (001), (101), (201), (301), (401), (111), (332), (221), (211), (311), (312), (532), (411) Fig. 1.

Le combinazioni osservate sono: (110) (111) Fig. 2; (110) (101) Fig. 3; (110) (111) (211) Fig. 4; (110) (211) (101) (111) Fig. 5; (110) (100) (111) (301) (332) (411) (001) Fig. 6; (110) (100) (510) (111) (221) (101) (201) (401) (211) (311) (312) (532) Fig. 7.

Calcolo degli angoli con l' impiego dei minimi quadrati.

I.

$c_{\prime} = 0,593921$

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{\prime}$ (¹)	$-d_{\prime}$	$d_{\prime}^2$
$110:2\underline{1}1$	41°.18′	40°.44′	34		1156
$211:2\bar{1}1$	41. 33	41. 51		18	324
$101:\bar{1}\bar{1}1$	63. 34	64. 47		73	5329
$111:\bar{1}\bar{1}1$	78. 13	80. 03		110	12100
111:211	18. 30	18. 33		3	9
111:301	39. 26	39. 30		4	16
$110:\bar{3}01$	52. 13	51. 56	17		289
$111:\bar{1}11$	53. 02	54. 04		62	3844
$110:\underline{\bar{1}\bar{1}0}$	41. 39	40. 20	79		6241
$110:\overline{111}$	51. 07	49. 58	69		4761
110:101	68. 50	68. 50*	0	0	0
				$\Sigma d_{\prime}^2 =$ (²)	34069

(¹) $+ d =$ differenza positiva
$- d =$ » negativa
$d^2 =$ quadrato della differenza.

(²) $\Sigma d^2 =$ somma dei quadrati delle differenze.

II.

$c_{\prime\prime} = 0,570223$

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{\prime\prime}$	$-d_{\prime\prime}$	$d_{\prime\prime}^2$
110:211	41°.18′	41°.42′		24	576
211:2$\bar{1}$1	41. 33	41. 12	21		441
101:$\bar{1}\bar{1}$1	63. 34	62. 50	44		1936
111:$\bar{1}\bar{1}$1	78. 13	77. 46	27		729
111:211	18. 30	18. 23	7		49
111:301	39. 26	39. 06	20		400
110:301	52. 13	52. 21		8	64
111:$\bar{1}$11	53. 02	52. 42	20		400
110:$\bar{1}\bar{1}$0	41. 39	41. 02	37		1369
110:111	51. 07	51. 07.	0	0	0
110:101	68. 50	69. 29		39	1521
				$\Sigma d_{\prime\prime}^2 =$	7485

III.

$c = 0,5774$

Angoli	Misurati medie	Limiti	n. (¹)	Calcolati	$+d$	$-d$	d^2
110:211	41°.18′	41°.11′ — 41°.22′,5	3	41°.24′		6	36
211:2$\bar{1}$1	41. 33	— —	1	41. 25	8		64
101:$\bar{1}\bar{1}$1	63. 34	63. 20 — 63. 45	4	63. 26	8		64
111:$\bar{1}\bar{1}$1	78. 13	— —	1	78. 28		15	225
111:211	18. 30	— —	1	18. 26	4		16
111:301	39. 26	— —	1	39. 14	12		144
110:301	52. 13	52. 11 — 52. 15	2	52. 14		1	1
111:$\bar{1}$11	53. 02	— —	2	53. 08		6	36
110:$\bar{1}\bar{1}$0 Fig. 8	41. 39	41. 23 — 41. 55	4	41. 25	14		196
110:111	51. 07	50. 20 — 52. 11	8	50. 46	21		441
110:101	68. 50	68. 41 — 69. 39	9	69. 18		28	784
110:$\bar{1}\bar{1}$0 Fig. 9	75. 38	— —	1	75. 32 (²)			
						$\Sigma d^2 =$	2007

Piani di geminazione osservati: (101) Fig. 8 e (301) Fig. 9.

Come si vede dai quadri di sopra si ha essendo costante:

1. 110:101 = 68° 50′; $c_{\prime} = 0,593921$; $\Sigma d_{\prime}^2 = 34.069$
2. 110:111 = 51° 07′; $c_{\prime\prime} = 0,570223$; $\Sigma d^{\,2} = 7.485$
3. — — $c = 0,5774$ $\Sigma d^2 = 2.007$

perciò $\Sigma d^2 < \Sigma d''^2 < \Sigma d_{\prime}^2$ e $c = 0,5774$ è la costante più probabile.

(¹) . n = numero degli spigoli misurati.

(²) L'angolo $\bar{1}\bar{1}0$: 110 del geminato fig. 9, fu aggiunto quando il lavoro era compito e non entra nel calcolo coi minimi quadrati: il detto geminato fu trovato nei cristallini di un' ultima preparazione.

È interessante di notare che dagli angoli della combinazione (110) (211) (111) (101) Fig. 5 si ha

$$c = 0{,}578172$$

Angoli	Misurati	Calcolati
110:211	41°.22',5	41° 22',5*
211:2$\bar{1}$1	41. 33	41. 33
110:111	50. 42	50. 42

Come si vede il valore di c più probabile non differisce da questo che a meno di 0,001.

I cristalli sono opachi, anche quelli esilissimi o laminari.

Lo splendore fra il metallico e l'adamantino.

Il colore fra il rosso di rame e il grigio di piombo. Esaminata con la lente dicroscopica la luce riflessa sulle facce di dimensioni maggiori, cioè su quelle del prisma di 1° ordine (110), si vedono le due immagini: rossa di rame una, grigia di piombo l'altra.

Le dimensioni dei cristalli variano da 1m.m. a 3m.m. per la lunghezza nel senso dell'asse verticale c; e da $^1/_{20}$ a $^1/_4$ di millimetro per lo spessore nelle direzioni normali a quest' asse. Qualche volta le facce della forma (110) sono molto inegualmente sviluppate ed allora i cristalli pigliano l'aspetto di sottilissime lamelle allungate nel senso dell' asse c.

I prismi (100) e (510) sono sempre a facce lineari e spesso incompleti. In generale, come si è detto, i cristalli sono anche incompletamente terminati, e salvo le facce delle forme (110), (111), (211), (101), (301) che generalmente sono visibili e che riflettono più o meno bene, tutte le altre facce delle altre forme osservate, sono solo visibili con la lente, non riflettono che malissimo, e furono determinate con le zone.

Qualche angolo fra le dette forme potè essere misurato con approssimazione, e fra gli altri citiamo quello 110:510 = 33°.24' (33°.41' teoria) media di 20 letture oscillanti fra i limiti 33°.18' a 33°.49'.

Il peso specifico dei detti cristalli è di 6,44 (temperatura 16°). Dallo studio di questo biossido si deduce che esso ha molta analogia coi biossidi del gruppo della Cassiterite, infatti le forme (110), (100), (111), (101), (001) ed il piano di geminazione (101) sono comuni alla cassiterite ed al rutilo: il piano di geminazione (301) è comune coi cristalli di rutilo.

La tavola seguente mostra le relazioni fra i tre biossidi dimetrici.

Formole	P.° molec.°	P.° specifico	Vol.° molec.°	Costante c.	Differenza
$Sn\ O_2$	150	6,7	22	0,6724	0,0282
$Ti\ O_2$	80	4,2	19	0,6442	0,0668
$Mo\ O_2$	128	6,44	20	0,5774	

Quantunque la differenza fra la costante del rutilo e quella del biossido di molibdeno sia piuttosto considerevole ([1]) pure avuto riguardo alle analogie di sopra dette particolarmente al piano di geminazione (301) si potrebbe considerare il biossido di molibdeno isomorfo al rutilo e perciò facente parte del gruppo dei biossidi dimetrici di stagno, rutenio, titanio ed anche dello zircone ([2]).

Terminiamo questo lavoro dando le analisi del biossido di molibdeno da noi preparato.

1ª gr. 0,4156 di $Mo\,O_2$ diedero gr. 0,4674 di $Mo\,O_3$
2ª gr. 0,5948 » » gr. 0,6729 »

Ossia per 100 di $Mo\,O_2$

1ª 112,46 di $Mo\,O_3$ }
2ª 112,42 » } media 112,44 di $Mo\,O_3$.

Questo risultato ci conferma che il peso atomico del molibdeno è piuttosto 96 e non 92. Infatti adottando l'ultimo numero si avrebbe per 100 parti di $Mo\,O_2$, 112,90 di $Mo\,O_3$ mentre quando al molibdeno si dà il peso atomico di 96 allora si ha per 100 di $Mo\,O_2$, 112,50 di $Mo\,O_3$; ciò che è confermato dalle nostre analisi che s'accordano con quelle di Ullik, la media delle quali è 112,34 di $Mo\,O_3$ per 100 di $Mo\,O_2$.

([1]) Se si dà alla forma (101) del nostro biossido, il simbolo (335), forma esistente nella cassiterite, la costante diviene $c = 0,6814$ che differisce da quella della cassiterite per meno di 001: però in questo modo orientati i cristalli di biossido di molibdeno perderebbero ogni analogia con quelli di cassiterite, e vieppiù con quelli di rutilo ai quali (agli aciculari) rassomigliano anche per l'aspetto; di più i simboli delle altre forme si complicherebbero inutilmente.

([2]) Nel Krystall Kunde del Frankenheim pag. 71 troviamo nella serie isomorfa dei solfati cromati seleniati di argento ammonio dimetrici misurati dal Mitscherlich il solfato di platino ammonio misurato dal Sella, e la differenza fra al costante di questo solfato col solfato di argento ammonio è maggiore della differenza fra la costante del rutilo e quella del biossido di molibdeno.

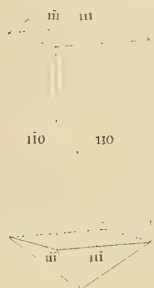
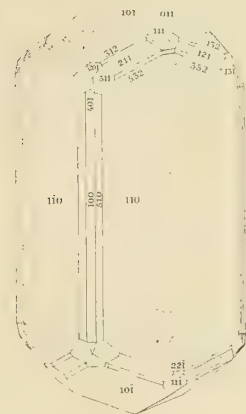
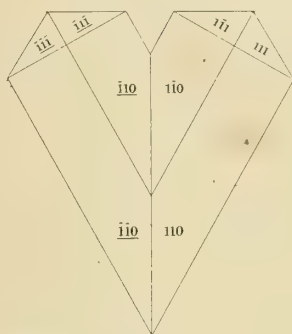
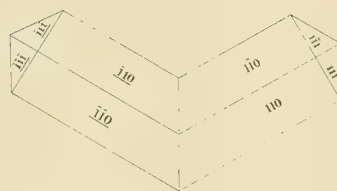
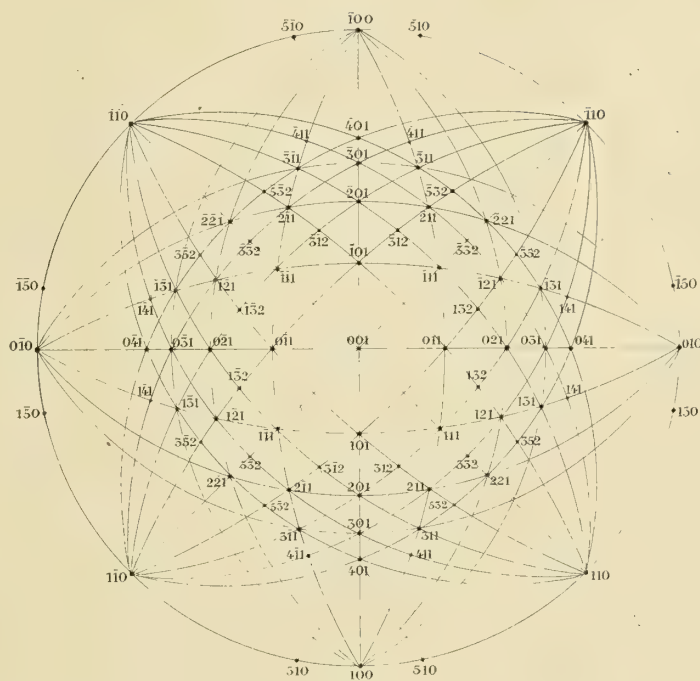
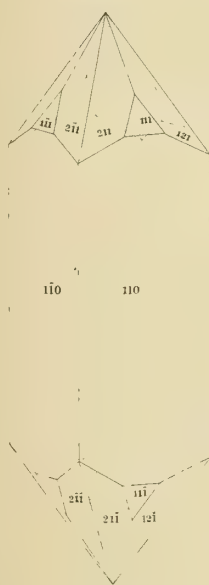
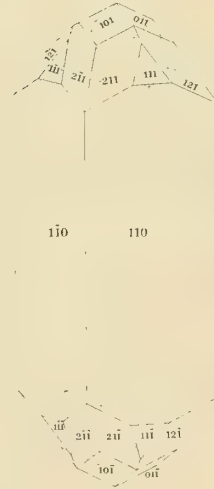



Fig. 2
Fig. 3
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 9
Fig. 8
Fig. 1
Fig. 4
Fig. 5

Induzione elettrica su conduttori limitati da piani indefiniti assoggettati all'azione di coibenti caricati simmetricamente intorno ad un asse.

Memoria del dott. GIAN ANTONIO MAGGI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 aprile 1881.

In un lavoro che ho avuto l'onore di presentare a questa illustre Accademia, e che fu inserito nell'ultimo volume delle Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, col titolo: *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due conduttori piani, indefiniti, paralleli, assoggettati all'induzione di un punto situato nello spazio compreso fra essi*, io mi sono occupato di un problema attinente alla questione, che forma l'oggetto di questa Memoria, allo scopo di indicare una difficoltà che presenta in quel problema l'applicazione del principio delle immagini, e di mostrare un metodo che permette di risolvere completamente il problema stesso.

In questa Memoria un metodo simile è applicato allo studio dell'induzione elettrica sopra un conduttore limitato da un piano indefinito, e sopra due conduttori limitati da piani indefiniti, parallelamente disposti, nel caso più generale, che le forze inducenti siano quali si vogliano, purchè simmetriche intorno ad una retta perpendicolare ai piani.

Per trattare questo problema nel modo che mi sembra il più completo, tenendo calcolo della circostanza che i nostri sistemi devono includere strati piani agenti indefinitamente estesi, ho creduto opportuno di premettere alcune ricerché d'indole più generale.

Nei §§ 1, 2 si stabiliscono alcune formole relative alla funzione potenziale di un sistema simmetrico intorno ad un asse, e in particolare di un disco circolare.

Nel § 3 si approfitta di queste formole per trovare le condizioni necessarie e sufficienti, perchè un piano indefinito si comporti per rispetto alle azioni newtoniane come un sistema finito.

Nel § 4 si stabiliscono le condizioni atte a determinare una soluzione dell'equazione di Laplace, in uno spazio limitato da un piano indefinito e da una calotta descritta con raggio infinitamente grande, e in uno spazio limitato da due piani indefiniti paralleli, e da una fascia cilindrica, che s'immagina congiungerne i lembi all'infinito.

Nel § 5 si trova, per il caso di uno e di due piani limiti, una soluzione dell'equazione di Laplace, assoggettata alla condizione di ridursi sopra un piano limite alla forma

$$A - U(x, u)$$

dove A è una costante data, e $U(x, u)$ una funzione data.

Queste soluzioni sono suscettibili di un'interpretazione geometrica, conforme al principio delle immagini (§ 6).

Nel § 7 si dimostra che le soluzioni trovate soddisfanno a tutte le condizioni generali che, conformemente alle conclusioni del § 4, valgono a definire in modo unico, nei relativi spazî, una soluzione dell'equazione di Laplace, simmetrica intorno ad un asse.

Tutto ciò premesso, si prendono in esame i proposti problemi d'equilibrio elettrico.

I sistemi di cui si tratta non essendo praticamente realizzabili, per risolvere la questione, bisogna stabilire qualche postulato, sul modo in cui si deve supporre che vi si comporti l'elettricità. Noi assumiamo quei postulati che ci sono strettamente necessarî per poter approfittare dei risultati precedentemente ottenuti, e che d'altra parte suggerisce l'analogia coi sistemi finiti.

Passiamo allora a trovare la densità dell'elettricità indotta, e la carica sia di un cerchio di raggio dato, che dell'intero conduttore. Le prime due quantità, funzioni del raggio, riescono espresse da formole finite, abbastanza semplici.

L'esame di queste formole, per le conclusioni del § 3, ci permettono di stabilire che, nel caso di un solo conduttore (§ 8) la funzione potenziale non può avere nel conduttore un valore diverso da 0: mentre, nel caso di due conduttori (§ 9), è necessario di fare la stessa conclusione, se si fa l'ipotesi che nei due conduttori la funzione potenziale debba avere il medesimo valore.

Finalmente, nel § 10 si rimove la restrizione che i due conduttori si estendano indefinitamente, in senso normale al piano prospiciente i coibenti induttori, mostrando come si possano mantenere le stesse conclusioni, comunque i conduttori si prolunghino da quella parte.

I.

I sistemi simmetrici intorno ad un asse, quando un punto dell'asse si consideri come un cerchio avente il centro sull'asse, e il raggio evanescente, si possono tutti immaginare come costituiti da anelli circolari omogenei, aventi il centro sull'asse, distribuiti in modo discreto o continuo in piani perpendicolari all'asse.

Dinotiamo con x, u l'ascissa contata sull'asse, e la distanza dall'asse di un punto potenziato.

La funzione potenziale di un anello circolare omogeneo, di massa Q, avente il centro sull'asse, e posto in un piano perpendicolare all'asse risulta direttamente espressa da

$$V = -\frac{Q}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\delta^2 + R^2 + u^2 - 2Ru\cos\varphi}}, \qquad (\alpha)$$

R designando il raggio dell'anello, e δ la distanza del punto potenziato dal piano dell'anello medesimo.

Si ha quindi per le funzioni potenziali dei sistemi simmetrici intorno ad un asse

$$V = -\frac{1}{\pi}\mathrm{S}\,Q\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\delta^2 + R^2 + u^2 - 2uR\cos\varphi}}, \qquad (1)$$

dove S dinota una sommatoria o un integrale.

Questa espressione si può ridurre ad una forma, che a noi importa conoscere.

Però rammentiamo il teorema di Lipschitz, valido per a, b reali, quando sia $a>0$,

$$\int_0^\infty e^{-am} J_0(bm)\,dm = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \qquad (\beta)$$

In virtù di questa formola, la (1) si può scrivere così

$$V = -\frac{Q}{\pi}\int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty e^{-\sqrt{\delta^2}\,m} J_0\left(m\sqrt{R^2+u^2-2Ru\cos\varphi}\right)dm\,,$$

ossia, scambiando le integrazioni, ciò che è lecito, perchè i limiti sono numerici,

$$V = -\frac{Q}{\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{\delta^2}\,m}\,dm \int_0^\pi J_0\left(m\sqrt{R^2+u^2-2Ru\cos\varphi}\right)d\varphi\,.$$

Ora si ha per un teorema di Gegenbauer (Jahrb. üb. d. F. der Math. VII. 303).

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0\left(m\sqrt{R^2+u^2-2Ru\cos\varphi}\right)d\varphi = J_0(mR)\,J_0(mu)\,.$$

Quindi

$$V = -Q\int_0^\infty e^{-\sqrt{\delta^2}\,m} J_0(mR)\,J_0(mu)\,dm \quad (^1) \qquad (\gamma)$$

Per conseguenza, tutte le funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse rientrano nel tipo

$$V = -S\,Q\int_0^\infty e^{-m\sqrt{\delta^2}} J_0(mR)\,J_0(mu)\,dm\,. \qquad (2)$$

Osservisi che per $R=0$ si ha da (1)

$$V = -\frac{Q}{\sqrt{\delta^2+u^2}}\,,$$

funzione potenziale di un punto dell'asse: e da (γ), essendo $J_0(0)=1$,

$$V = -Q\int_0^\infty e^{-\sqrt{\delta^2}\,m} J_0(mu)\,dm\,,$$

e che queste due espressioni risultano da (β) immediatamente equivalenti.

[1] In varii modi la funzione potenziale di un anello circolare omogeneo può essere espressa mediante un integrale definito involgente le funzioni cilindriche. Vedasi in proposito la nota del prof. E. Beltrami « *Sulle funzioni cilindriche* » pubblicata nel vol. XVI degli Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, e la Memoria dello stesso prof. Beltrami « *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* » ora uscita nel Tomo II, Serie 4ª, delle Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna.

II.

Consideriamo ora in particolare un disco circolare piano, caricato simmetricamente intorno ad un asse: epperò cominciamo col porre la funzione potenziale dell'anello sotto una forma opportuna.

Poniamo

$$\lambda = \frac{2\sqrt{Ru}}{\sqrt{\delta^2 + (R+u)^2}}, \qquad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2} = \frac{\sqrt{\delta^2 + (u-R)^2}}{\sqrt{\delta^2 + (u+R)^2}}. \qquad (3)$$

Si ha

$$\lambda \leqq \frac{\sqrt{Ru}}{\frac{R+u}{2}} \leqq 1\,;$$

e dall'espressione di λ' chiaro apparisce che il valor limite $\lambda = 1$, non si avrà che per $\delta = 0$, $u = R$, cioè quando il punto potenziato cada nell'anello.

Ciò posto, introducendo in (1) un angolo ψ colla relazione

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

si trova assai facilmente

$$V = -\frac{4gR}{\sqrt{\delta^2 + (u+R)^2}} F(\lambda), \qquad (4)$$

dove $F(\lambda)$ dinota, al solito, l'integrale ellittico completo di prima specie, di modulo λ, e g designa la densità dell'anello, così che $Q = 2\pi g R$.

Il disco, a cui abbiamo accennato, si può considerare come una serie di anelli o di corone circolari omogenee, tutte poste in un piano. Designando con R il suo raggio, e con $h(\eta)$ la densità superficiale dell'agente distribuito sulla corona circolare infinitesima, compresa fra il raggio η e il raggio $\eta + d\eta$, in virtù di (1) e di (4) la funzione potenziale del disco sarà espressa da

$$V = -4\int_0^R \frac{h(\eta)\,\eta\,F(\lambda)\,d\eta}{\sqrt{\delta^2 + (u+\eta)^2}}. \qquad (5)$$

Per $\lambda = 1$, essendo $F(1) = \infty$, la funzione sotto al segno integrale diventa infinita. È noto che per questo non diventa infinito l'integrale. Non è il caso che insistiamo su proprietà note per la teoria generale. Giova però osservare che questa proprietà si riconosce nella (5) assai facilmente.

Difatti, se si rammenta che

$$\lim_{\lambda=1} F(\lambda) = \log\frac{4}{\lambda'},$$

si vede per le (3) che, nel caso nostro,

$$\lim_{\lambda=1} F(\lambda) = -\tfrac{1}{2}\log\left(\delta^2 + (u-\eta)^2\right) + \log 4\sqrt{\delta^2 + (u+\eta)^2}\,.$$

Il secondo termine si conserva finito. In quanto al primo termine, per $\delta = 0$ si riduce a

$$-\log(u-\eta);$$

e per $u=\eta$, con che, essendosi già fatto $\delta = 0$, si ha $\lambda = 1$, questo termine diventa infinito.

Ma, per una nota proprietà

$$\lim_{u=\eta} \sqrt{u-\eta}\,\log(u-\eta) = 0\,.$$

Quindi

$$\lim_{\lambda=1} \sqrt{u-\eta}\,\mathrm{F}(\lambda) = 0\,.$$

È noto come di qui si possa concludere che (5) resterà finito.

Formiamo ora le derivate di V.

Si trova, in primo luogo, rammentando che $\delta = x - \xi$,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{\delta\lambda}{\delta^2+(u+\eta)^2}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u} = -\frac{(u+\eta)\lambda}{\delta^2+(u+\eta)^2} + \frac{\lambda}{2u}\,.$$

Però, rammentando la relazione

$$\mathrm{F}(\lambda) + \lambda\frac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda'^2}\mathrm{E}(\lambda)\,, \qquad (\alpha)$$

dove $\mathrm{E}(\lambda)$ dinota l'integrale ellittico completo di seconda specie, si trova

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4\delta\int_0^{\mathrm{R}} \frac{h(\eta)\,\eta\,\mathrm{E}(\lambda)\,d\eta}{\lambda'^2\left[\delta^2+(u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 4\int_0^{\mathrm{R}} \frac{h(\eta)\,(u+\eta)\,\eta\,\mathrm{E}(\lambda)\,d\lambda}{\lambda'^2\left[\delta^2+(u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{u}\int_0^{\mathrm{R}} \frac{h(\eta)\,\eta\lambda\frac{d\mathrm{F}}{d\lambda}d\eta}{\sqrt{\delta^2+(u+\eta)^2}}.$$

Applicando nuovamente la (7), e richiamando (5), la seconda formola si scrive più convenientemente così

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 4\int_0^{\mathrm{R}} \frac{h(\eta)\,(u+\eta)\,\eta\,\mathrm{E}(\lambda)\,d\lambda)}{\lambda'^2\left[\delta^2+(u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{u}\int_0^{\mathrm{R}} \frac{h(\eta)\,\eta\,\mathrm{E}(\lambda)\,d\eta}{\lambda'^2\sqrt{\delta^2+(u+\eta)^2}} + \frac{2}{u}V. \qquad (7)$$

La funzione sotto al segno dei nuovi integrali diventa infinita per $\lambda'=0$, ossia ancora per $\lambda=1$. Verifichiamo che le formole si mantengono finite.

Incominciando da (7), notiamo, in primo luogo, che per $u=0$, essendo anche (3) $\lambda=0$, onde $\lambda'=1$, $\mathrm{E}(\lambda)=\mathrm{F}(\lambda)$, il secondo e terzo termine, che contengono $\frac{1}{u}$ in fattore, si riducono eguali e di segno contrario, e quindi si elidono scambievolmente. Per quanto al caso di $\lambda=1$, $\lambda'=0$, non ci preoccuperemo più di V; ed a proposito degli altri due integrali, dove figura il fattore $\frac{1}{\lambda'^2}$, osserviamo che si ha $\lambda'=0$

per $\delta=0, u=\eta$ (3); pei quali valori i differenziali del primo e del secondo integrale si riducono eguali, mentre hanno segno contrario, così che si elidono, e scompariscono dal computo.

Richiede un più minuto esame la (6). Approfittando di (3), possiamo scrivere

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4\delta \int_0^R \frac{h(\eta)\,\eta\,E(\lambda)\,d\eta}{\left(\delta^2 + (u-\eta)^2\right)\sqrt{\delta^2 + (u+\eta)^2}}.$$

Supponendo che δ diminuisca indefinitamente, è evidente che si ridurranno a 0 con essa tutti quei termini dell' integrale pei quali non sia $(u-\eta)^2 \leqq \varepsilon^2$. Poniamo in generale, $u-\eta=\alpha$. Si avrà $\eta=u-\alpha$, $d\eta=-d\alpha$; e i limiti dei valori di α a cui corrispondono termini di grandezza sensibile per $\delta=0$, saranno 0 e $-\varepsilon$ nel caso di di $u=0$, ε e $-\varepsilon$ nel' caso di $u>0$.

Se $u=0$, si ha $\lambda=0$, $E(\lambda)=\frac{\pi}{2}$: epperò

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi\delta \int_0^R \frac{h(\eta)\,\eta\,d\eta}{\left(\delta^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Per l' osservazione fatta

$$\lim_{\delta=0} \frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi \lim_{\delta=0} \delta \int_0^{-\varepsilon} \frac{h(-\alpha)\,\alpha d\alpha}{\left(\delta^2+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sostituendo ad $h(-\alpha)$ il valore $h(0)$ che regna nell' immediata prossimità dell'asse, poichè $\alpha \leqq \varepsilon$ è sempre infinitamente piccolo, si conclude di qui

$$\lim_{\delta=0} \frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi\,h(0) \lim_{\delta=0} \delta \int_0^{-\varepsilon} \frac{\alpha\,d\alpha}{\left(\delta^2+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\pi h(0) \lim_{\delta=0} \delta \left| \frac{1}{\sqrt{\delta^2+\alpha^2}} \right|_0^{-\varepsilon}$$

$$= 2\pi h(0) \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2}}. \qquad (\beta)$$

Nel caso più generale di $u>0$, abbiamo ancora

$$\lim_{\delta=0} \frac{\partial V}{\partial x} = -4 \lim_{\delta=0} \delta \int_\varepsilon^{-\varepsilon} \frac{h(u-\alpha)\,(u-\alpha)\,E(\lambda)\,d\alpha}{(\delta^2+\alpha^2)\sqrt{\delta^2+(2u-\alpha)^2}}.$$

Poichè $\alpha \leqq \varepsilon$ è infinitamente piccolo, trascurandolo di fronte ad u, e osservando che allora si ottiene $\lambda=1$, onde $E(\lambda)=1$, si deduce di qui

$$\lim_{\delta=0} \frac{\partial V}{\partial x} = 2\,h(u) \lim_{\delta=0} \delta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\alpha}{\delta^2+\alpha^2} = 2\,h(u) \lim_{\delta=0} \left| \tan^{-1}\frac{\alpha}{\delta} \right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 4h(u) \lim_{\delta=0} \tan^{-1}\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Essendo ε la semi ampiezza di una corona circolare, che comprende i termini sensibili all' integrale, quantità da noi assoggettata alla sola condizione di essere

infinitamente piccola, è naturale di supporla un infinitesimo di ordine inferiore a quello dell'estremo valore di δ, pel quale il punto potenziato deve cadere sul piano. Quindi $\lim_{\delta=0} \frac{\varepsilon}{\delta} = \infty$; epperò finalmente

$$\lim_{\delta=0} \frac{\partial V}{\partial x} = \pm 2\pi h(u).$$

Il doppio segno si riferisce al caso di δ positivo o negativo.

Però conviene ancora di scrivere

$$\lim_{\delta=0} \frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi h(u) \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2}}. \qquad (\beta)'$$

Tenuto calcolo di (β), questa formola vale in generale.

Si trova così la nota espressione, che mostra come la derivata in discorso sia finita e discontinua, nell' attraversare la superficie agente.

III.

Dal caso ora considerato si passa immediatamente a quello di un piano indefinito, caricato simmetricamente intorno ad un asse, supponendo che il raggio R del disco cresca indefinitamente.

Prendendo in esame questo caso, trattiamo, in primo luogo, della quantità Q di agente distribuita sul piano. Sarà sopra un cerchio di raggio R

$$Q(R) = 2\pi \int_0^R h(\eta)\, \eta\, d\eta\,; \qquad (\alpha)$$

e su tutto il piano

$$Q = 2\pi \int_0^\infty h(\eta)\, \eta\, d\eta\,. \qquad (\alpha)'$$

Si vede che Q non sarà generalmente finito. Per gli ordinarî criterî di convergenza, se si suppone che per valori di η superiori a un certo limite $h(\eta)$ mantenga sempre lo stesso segno, perchè l'integrale sia convergente, sarà necessario che, dinotando ε una quantità finita assegnata, abbiasi per η sufficientemente grande

$$\eta^2 h(\eta) < \varepsilon\,. \qquad (\beta)$$

In ogni caso ($h(\eta)$ è supposta sempre finita) sarà sufficiente che sia per η abbastanza grande

$$\eta^m h(\eta) < \varepsilon \qquad m > 2\,. \qquad (\beta)'$$

Le formole esprimenti la funzione potenziale e le derivate si avranno da (5), (6), (7) per $R=\infty$, con che

$$V = -4 \int_0^\infty \frac{h(\eta)\, \eta\, F(\lambda)\, d\eta}{\sqrt{\delta^2 + (u+\eta)^2}} \quad (5)', \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 4\delta \int_0^\infty \frac{h(\eta)\, \eta\, E(\lambda)\, d\eta}{\lambda'^2 \left[\delta^2 + (u+\eta)^2\right]^3}. \quad (6)'$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 4 \int_0^\infty \frac{h(\eta)\, (u+\eta)\, \eta E(\lambda)\, d\eta}{\lambda'^2 \left[\delta^2 + (u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{u} \int_0^\infty \frac{h(\eta)\, \eta E(\lambda)\, d\eta}{\lambda'^2 \sqrt{\delta^2 + (u+\eta)^2}} + \frac{2}{u} V. \qquad (7)'$$

Nell' esaminare queste formole non ci occorre più occuparci dei valori singolari pei quali $\lambda'=0$, $\lambda=1$, così la funzione sotto il segno dei diversi integrali diventa infinita; poichè è noto per la teoria generale, e si è verificato direttamente nel precedente § pel caso nostro, che la formola (6), donde deriva (6)', fornisce per tali valori un' espressione indipendente dal raggio del disco; mentre i valori medesimi negl' integrali di (5) e di (7), donde (5)' e (7)', non introducono che un contingente infinitamente piccolo.

Tralasciando, conformemente a questa osservazione, i valori singolari di $F(\lambda)$ e di $\frac{1}{\lambda'^2}$, e osservando, per quanto ai rimanenti fattori dei nostri integrali, che si ha

$$\frac{\eta}{\sqrt{\delta^2+(u+\eta)^2}} \leq 1, \quad \frac{\eta}{\left[\delta^2+(u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \leq 1, \quad \frac{\eta(u+\eta)}{\left[\delta^2+(u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \leq 1,$$

si conclude che per la convergenza degl' integrali medesimi è sufficiente che abbiasi per η sufficientemente grande

$$\eta^m h(\eta) < \varepsilon \quad m > 1. \tag{γ}$$

Per esaminare più particolarmente il caso che il punto potenziato vada all'infinito, poniamo $\sqrt{\delta^2+u^2}=\rho$, e dinotiamo con R un valore di η destinato a crescere oltre ogni limite, ma in modo che sia sempre $\lim\limits_{\rho=\infty}\frac{R}{\rho}=0$, così che se ρ cresce con u sia $\lim\limits_{u=\infty}\frac{R}{u}=0$, e se ρ cresce con δ sia $\lim\limits_{\delta=\infty}\frac{R}{\delta}=0$. Sarà allora per $\eta<R$, $\lim\limits_{\rho=\infty}\frac{R}{\rho}=0$, comunque grande sia η, epperò

$$\lim_{\rho=\infty}\frac{\eta}{\sqrt{\delta^2+(u+\eta)^2}}=\frac{\eta}{\rho}, \quad \lim_{\rho=\infty}\frac{\delta}{\delta^2+(u+\eta)^2}=\frac{\delta}{\rho^2}, \quad \lim_{\rho=\infty}\frac{u+\eta}{\delta^2+(u+\eta)^2}=\frac{\eta}{\rho^2},$$

$$\lim_{\rho=\infty}\lambda=0, \quad \lim_{\rho=\infty}\lambda'=1, \quad \lim_{\rho=\infty}F(\lambda)=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\rho=\infty}E(\lambda)=\frac{\pi}{2},$$

Ciò premesso, decomponiamo i singoli integrali, che figurano nelle (5)', (6)', (7)' in due, preso l'uno fra 0 ed R, l'altro fra R e ∞, e supponiamo che ρ tenda all' infinito. Ponendo nei primi integrali i precedenti valori limiti, e richiamando (α), troviamo

$$\lim_{\rho=\infty}V=-\frac{Q(R)}{\rho}-4\int_R^\infty\frac{h(\eta)\eta F(\lambda)\,d\eta}{\sqrt{\delta^2+(u+\eta)^2}}, \quad \lim_{\rho=\infty}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{Q(R)\delta}{\rho^3}+4\delta\int_R^\infty\frac{h(\eta)\eta E(\lambda)\,d\eta}{\lambda'^2\left[\delta^2+(u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\lim_{\rho=\infty}\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{Q(R)u}{\rho^3}+4\int_R^\infty\frac{h(\eta)\eta(u+\eta)E(\lambda)d\eta}{\lambda'^2\left[\delta^2+(u+\eta)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{u}\int_R^\infty\frac{h(\eta)\eta E(\lambda)\,d\eta}{\lambda'^2\sqrt{\delta^2+(u+\eta)^2}}+\frac{2}{u}\int_R^\infty\frac{h(\eta)\eta F(\lambda)\,d\eta}{\sqrt{\delta^2+(u+\eta)^2}}.$$

Immaginiamo ora che R tenda all' infinito. Q (R) tenderà a rappresentare la

carica totale del piano: e, se gl'integrali che figurano nelle (5)', (6)', (7)' sono convergenti, per il che si è veduto essere sufficiente, per esempio, la (γ), gl'integrali delle ultime formole, tendendo il limite inferiore al superiore, tenderanno a 0.

In questo caso

$$\lim_{\rho=\infty} \rho V = -Q, \quad \lim_{\rho=\infty} \rho^2 \frac{\partial V}{\partial x} = Q \frac{\delta}{\rho}, \quad \lim_{\rho=\infty} \rho^2 \frac{\partial V}{\partial u} = Q \frac{u}{\rho},$$

come per un sistema finito. E, se Q è finito, si verificano così le proprietà caratteristiche per l'infinito, soddisfatte dai sistemi finiti.

Giova notare che, se si ammette che la densità, per valori del raggio superiori a un certo limite mantenga sempre il medesimo segno, e che la carica del piano sia finita, allora, dovendo sussistere la (β), dovrà sussistere la (γ). Però, stando quell'ipotesi sulla densità, la circostanza che la carica del piano è finita basta perchè si possa concludere che la funzione potenziale e le sue derivate sono espresse da formole convergenti, tendono a 0 col portarsi del punto potenziato all'infinito, e i limiti dei loro valori pei valori infiniti delle coordinate del punto potenziato sono i medesimi che per un sistema finito.

È poi appena necessario d'osservare che il confronto fra le formole relative al piano indefinito, e quelle relative ad un sistema finito si può ritenere esaurito, quando si è verificata la convergenza delle prime, e si sono trovati i loro limiti per l'infinito. Abbiamo già osservato che il processo generale deve essere ancora applicabile, per fornirci l'equazione caratteristica del piano

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\delta=0} = 2\pi h(\eta) \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2}}.$$

È altrettanto evidente che lo stesso processo generale ci servirà per concludere che le espressioni in discorso sono continue e ad un sol valore, e che V in tutto lo spazio, esclusi i punti del piano, soddisfarà all'equazione differenziale

$$u \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(u \frac{\partial V}{\partial u}\right) = 0.$$

IV.

Le condizioni svolte nel paragrafo precedente ci servirebbero direttamente, nel caso che si dovesse studiare l'attrazione di un piano indefinito, data la densità dell'agente.

Ora è noto per un celebre teorema di Dirichlet che la funzione potenziale di un sistema finito qualsiasi è dalle sue proprietà generali e da alcune circostanze particolari ai diversi problemi perfettamente definibile nei singoli casi, per modo che una funzione che soddisfaccia a tutte le accennate condizioni non può essere che la funzione potenziale medesima. Per trattare la questione analoga, nel caso di un piano indefinito, incominciamo coll'occuparci delle condizioni necessarie per definire una funzione delle coordinate di un punto simmetrica intorno ad un asse, quando il punto è obbligato a moversi nello spazio compreso fra un piano indefinito e la sfera all'infinito, o nello spazio compreso fra due piani indefiniti perpendicolari all'asse,

Sia $V(x, u)$ la funzione considerata: e supponiamo che sia obbligata a soddisfare a tutte le proprietà caratteristiche di una funzione potenziale, la più generale, ammettendo ch'essa possa emanare da un sistema composto di corpi, di superficie, di linee, e di punti — escluse le proprietà relative ai punti di coordinate infinitamente grandi. Supporremo invece che per $x = x_i$ (x_i designando l'ascissa di un piano limite) $V(x, u)$ debba ridursi a determinate espressioni, che potranno essere funzioni date di u, o date costanti. Vediamo se, e quali condizioni è necessario d'aggiungere perchè $V(x, u)$ sia completamente determinata nello spazio considerato.

Però, seguendo il ben noto metodo di Dirichlet, immaginiamo che esista una seconda funzione $V'(x, u)$, la quale soddisfaccia a tutte queste proprietà, e consideriamo la funzione $W(x, u) = V'(x, u) - V(x, u)$. Si vede facilmente che $W(x, u)$, in tutto lo spazio, ad eccezione di alcune superficie, linee o punti particolari, soddisfarà all'equazione di Laplace: sarà funzione ad un sol valore, finita e continua: finalmente, sul piano $x = x_i$, qualunque siano i valori che vi prende $V(x, u)$, si ridurrà a 0.

Per le prime proprietà, se s'immagina di circondare i luoghi singolari con superficie opportune, in tutto lo spazio (S') chiuso da queste superficie e dai limiti dati, $W(x, u)$ soddisfarà all' equazione

$$\int_\sigma W \frac{\partial W}{\partial n} d\sigma + \int_{S'} \Delta_1 W \, dS' = 0; \qquad (\alpha)$$

dove

$$\Delta_1 W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2$$

dinota, come d'uso, il parametro differenziale primo, σ designa il complesso dei limiti di S', e n la normale a σ diretta verso S'.

È noto che, se si restringono indefinitamente le superficie di cui sono circondati i luoghi singolari, così che S' tenda a tutto quanto lo spazio (S) concesso alla variabilità di x, u, la parte del primo integrale dovuta ad esse tende a 0, così che infine non rimane più che la parte dovuta ai limiti dati per S, mentre il secondo integrale si deve estendere a tutto S.

Per noi questi limiti si riducono *nel primo caso*, ad un piano indefinito e a una calotta della sfera all'infinito: *nel secondo caso*, a due piani indefiniti, paralleli, e alla fascia cilindrica, che si può immaginare che ne congiunga i lembi all'infinito.

Però calcoliamo l'integrale di superficie, nell'ipotesi che sia esteso ad un piano indefinito, ad una calotta sferica, e ad una fascia cilindrica.

Adoperando l'indice i per designare valori presi sul piano x_i, se si tratta di un piano, l'integrale in discorso diventerà

$$\pm \int_{\sigma_i} W_i \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_i d\sigma_i .$$

Ma, per ciò che si è osservato, $W_i = 0$. Quindi gl' integrali di questa forma saranno nulli.

Nel caso della calotta sferica, designiamone con R il raggio, $d\sigma = R^2 d\omega$, ω

designando l'angolo solido sotteso al centro della sfera dalla porzione σ. L'integrale diventerà così

$$-\rho^2 \int_0^{\Omega} W_{\rho=\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\rho=\infty} d\omega .$$

Finalmente, nel caso della fascia cilindrica, $dn = -du$: ed assumendo come suo elemento la fascia infinitesima compresa fra i piani x e $x+dx$, tutti i punti del quale sono nelle stesse condizioni, si avrà $d\sigma = 2\pi u\, dx$. Quindi l'integrale diverrà in questo caso

$$-2\pi u \int_{x_1}^{x_2} W_{u=\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)_{u=\infty} d\omega .$$

Si conclude che la relazione (α) diventa nei due casi precedentemente distinti

$$\rho^2 \int_0^{\Omega} W_{\rho=\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right) d\omega = \int_S \Delta_1 W dS , \qquad 2\pi u \int_{x_1}^{x_2} W_{u=\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)_{u=\infty} dx = \int_S \Delta_1 W dS.$$

Da queste relazioni apparisce che, se alle condizioni già imposte alle V, V', altre vi si aggiungono per cui sia, nel primo caso

$$\lim_{\rho=\infty} \left(\rho^2 W \frac{\partial W}{\partial \rho}\right) = 0 , \qquad (\beta)$$

e nel secondo

$$\lim_{u=\infty} \left(u W \frac{\partial W}{\partial u}\right) = 0 , \qquad (\gamma)$$

sarà

$$\Delta_1 W = 0 .$$

Di qui

$$W = \text{Costante}:$$

onde, essendo per $x = x_i$ $W = 0$, in tutto lo spazio S

$$W = 0 \qquad V = V' ,$$

e non vi potrà essere una funzione diversa da V, che soddisfaccia alle sue stesse condizioni.

Si vede che le relazioni (β), (γ) saranno soddisfatte, se V ammetterà pei valori infiniti delle coordinate i limiti ammessi dalle funzioni potenziali di sistemi finiti. Difatti sarà in questo caso

$$\lim_{\rho=\infty} \left(\rho^2 V \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0 \qquad \lim_{u=\infty} \left(u V \frac{\partial V}{\partial u}\right) = 0 .$$

Si verificherà questo caso tutte le volte che gli agenti occupino estensioni finite: e, nel caso che l'agente sia pure distribuito sul piano o sui piani limiti, quando la densità obbedisca alle condizioni trovate necessarie nel § precedente, perchè, gli accennati limiti siano gli stessi che per sistemi finiti.

Per altro ciò non è necessario. Perchè si verifichino le (β) (γ) è sufficiente che sia

$$\lim_{\rho=\infty}\left(\rho^2 V\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)=M\,,\qquad \lim_{u=\infty}\left(uV\frac{\partial V}{\partial u}\right)=N\,,\qquad (\delta)$$

dove M, N dinotano quantità finite e determinate.

V.

Trattiamo ora la seguente questione, di cui è evidente l'attinenza col nostro problema d'equilibrio elettrico.

Sia $U(x, u)$ una funzione potenziale di sistemi finiti, simmetrici intorno ad un asse, e trattisi di determinare una funzione $W(x, u)$ la quale, nell'uno o nell'altro degli spazî considerati nel precedente §, soddisfaccia all'equazione di Laplace; si mantenga finita, continua e ad un sol valore: ammetta derivate prime fornite dello stesso carattere; pei valori infinitamente grandi delle coordinate verifichi secondo il caso, la prima o la seconda delle (δ) del § prec. e finalmente, nel primo caso, per $x=0$, ascissa del piano, soddisfaccia alla condizione

$$U(0, u)+W(0, u)=A\,,$$

e, nel secondo caso, dinotando x_1, x_2 le ascisse dei piani, soddisfaccia alle

$$U(x_1\,, u)+W(x_1\,, u)=A_1$$
$$U(x_2\,, u)+W(x_2\,, u)=A_2\,,$$

dove A, A_1, A_2 designano costanti arbitrarie.

Però cominciamo col trovare una soluzione opportuna dell'equazione

$$u\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=0.\qquad (\alpha)$$

Ponendo per $\Phi(x, u)$ un'espressione della forma

$$X(x)\;U(u)\,,$$

cioè il prodotto di una funzione della sola x, per una funzione della sola u, quest'equazione si scinde nelle due equazioni alle derivate ordinarie

$$\frac{d^2X}{dx^2}-m^2X=0\,.\qquad \frac{d}{du}\left(u\frac{dU}{du}\right)+m^2uU=0\,,\qquad (\beta)$$

dove m è una costante qualunque.

Il caso di $m=0$ vuol essere considerato separatamente. Le due equazioni diventano in tal caso

$$\frac{d^2X}{dx^2}=0\qquad \frac{d}{du}\left(u\frac{dU}{du}\right)=0\,.\qquad (\beta)'$$

Dalle (β) ricaviamo la soluzione particolare di (α)

$$\Phi=(Ae^{mx}+Be^{-mx})\Big(C\,J_0(mu)+DK_0(mu)\Big)\qquad (\gamma)$$

dove A, B, C, D sono costanti arbitrarie.

Dalle (β)' si ricava egualmente

$$\Phi=(A'+B'x)\,(C'+D'\log u)\,.\qquad (\gamma)'$$

Avuto riguardo al nostro scopo, che è quello di comporre una funzione che gode delle proprietà di una funzione potenziale, faremo $D=0$, $D'=0$ e supporremo m reale. Difatti, diversamente, le trovate soluzioni diventerebbero infinite per $u=0$ con $K_0(mu)$

e $\log u$, e per $u=\infty$ con $J_0(mu)$, mentre questi due valori di u sono compatibili con entrambe le ipotesi sull' estensione dello spazio.

Del resto, una soluzione, che non presenta gl' inconvenienti accennati, si avrà da (γ) (fattovi $D=0$) per ogni valore reale di m, e qualunque siano i valori di AC, BC.

Siccome l'equazione (α) è lineare, sarà ancora un integrale di essa l' integrale di questa espressione, dove AC, BC si considerino come funzioni arbitrarie di m, prese per rispetto ad m, fra i limiti $m=-\infty$ e $m=\infty$. Designiamo queste due funzioni con $\varphi(m)$, $\psi(m)$. Dipenderà da esse che l' integrale sia convergente, e che si mantengano le condizioni soddisfatte da (γ).

Per la stessa ragione, si potrà aggiungere a questa nuova soluzione la (γ)', dove si farà $D'=0$, e si porrà $A'\,C'=a$, $B'\,C'=b$. Si avrà ancora così una soluzione di (α) assoggettata alle indicate condizioni.

Concludiamo quindi che una soluzione di (α) è la seguente funzione, che racchiude le due costanti arbitrarie a, b, e le due funzioni arbitrarie $\varphi(m)$, $\psi(m)$,

$$\Phi = a + bx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(m) e^{mx} + \psi(m) e^{-mx} \right) J_0(mu)\, dm . \qquad (\delta)$$

A questo punto conviene distinguere il caso dello spazio limitato da un piano e da una calotta sferica (I° caso), e quello dello spazio limitato da due piani indefiniti paralleli (II° caso).

In entrambi i casi però la determinazione delle funzioni arbitrarie si appoggia alla seguente formola di Hankel (*Die Fourier'schen Reihen und Integrale der Cylinderfunctionen*, nel tomo 8,° a pag. 471 dei *Mathematische Annalen*)

$$f(\xi) = \int_0^{\infty} \beta J_n(\beta\xi)\, d\beta \int_0^{\infty} \alpha f(\alpha) J_0(\alpha\beta)\, d\alpha , \qquad (\varepsilon)$$

che serve ad esprimere una funzione $f(\xi)$ data per $0 \gtreqless \xi \leqq \infty$ mediante un doppio integrale.

Giova rammentare che questa formola ammette le stesse condizioni di legittimità che il teorema di Fourier: per modo che sarà certamente legittima, nel caso che $f(\xi)$ rappresenti la dipendenza di una funzione potenziale ordinaria da una delle coordinate.

I° caso.

Facciasi

$$\varphi(m) = \varphi(-m) = 0 ,$$

$$\psi(-m) = 0 , \qquad \psi(m) = -m \int_0 nU(0, u) J_0(mn)\, dn ,$$

$$a = A \qquad b = 0 .$$

Si trova così la soluzione

$$\Phi = A - \int_0^{\infty} me^{-mx} J_0(mu)\, dm \int_0^{\infty} nU(0, n) J_0(mn)\, dn , \qquad (8)$$

la quale per $x=0$, in virtù di (ε), si riduce ad $A - U(0, u)$, e per $x=\infty$, potendosi sempre supporre x positiva, immaginando diretto verso lo spazio considerato l'asse delle x positive, si mantiene finita.

Si è posto $b=0$. Propriamente b deve determinarsi in modo che, per $x=\infty$,

rimanga Φ finito. Ma ci basterà di dimostrare che l'integrale è convergente, per concludere che per $x = \infty$, esso si riduce a 0: epperò, per soddisfare a quella condizione, è necessasio di porre $b = 0$.

II° caso.

Determiniamo i parametri arbitrarii in (δ), in modo che sia per $x = x_r$ $\Phi = 0$, e per $x = x_s$, $\Phi = A_s - U(x_s . u)$.

Si vede che basterà porre

$$\varphi(-m) = 0 \qquad \psi(-m) = 0$$

$$\varphi(m)\, e^{-mx_r} + \psi(m)\, e^{-mx_r} = 0 \quad \varphi(m)\, e^{mx_s} + \psi(m)\, e^{-mx_s} = -m \int_0^\infty n U(x_s, n)\, J_0(mn)\, dn$$

$$a + bx_r = 0 \qquad a + bx_s = A_s .$$

Si ricava dalla seconda coppia, osservando che

$$\begin{vmatrix} e^{mx_r} & e^{-mx_r} \\ e^{mx_s} & e^{-mx_s} \end{vmatrix} = 2 \operatorname{senh} m\, (x_r - x_s),$$

$$\varphi(m) = \frac{m e^{-mx_r} \int_0^\infty n U(x_s, n)\, J_0(mn)\, dn}{2 \operatorname{senh} m\, (x_r - x_s)}, \quad \psi(m) = -\frac{m e^{mx_r} \int_0^\infty n U(x_s, n)\, J_0(mn)\, dn}{2 \operatorname{senh} m\, (x_r - x_s)}.$$

Egualmente, si ricava dalla terza,

$$a = \frac{x_r}{x_r - x_s} A_s \qquad b = -\frac{1}{x_r - x_s} A_s .$$

Sostituendo in (δ), e scrivendo opportunamente, si conclude

$$\Phi = \frac{x_r - x}{x_r - x_s} A_s - \int_0^\infty m \frac{\operatorname{senh} m (x_r - x)}{\operatorname{senh} m (x_r - x_s)} J_0(mu)\, dm \int_0^\infty n U(x_s, n)\, J_0(mn)\, dn . \qquad (\zeta)$$

È evidente che, se si forma la somma delle due espressioni, che si ottengono dalla precedente colla ipotesi $r = 1$, $s = 2$ ed $r = 2$, $s = 1$, si avrà un' espressione che per $x = x_1$ si riduce ad $A_1 - U(x_1, u)$, e per $x = x_2$ ad $A_2 - U(x_2, u)$.

Questa espressione, che sarà sempre una soluzione di (α), soddisfarà dunque alle condizioni ai limiti caratteristiche del secondo caso.

Dinotisi con 2Δ la distanza dei due piani; e sia $x_1 > x_2$, così che $x_1 - x_2 = 2\Delta$. L'accennata funzione si potrà esprimere nel seguente modo:

$$\Phi = \sum_{i=1,2}^{j=1,2} (-1)^{i-1} \left(\frac{x_i - x}{2\Delta} A_j - \int_0^\infty m \frac{\operatorname{senh} m (x_i - x)}{\operatorname{senh} 2m\Delta} J_0(mu)\, dm \int_0^\infty n U(x_j, n) J_0(mn)\, dn \right) (9)$$

Dimostriamo ora che le funzioni definite da (8), (9) soddisfanno anche alle rimanenti proprietà, richieste dal problema enunciato al principio del presente §. Però esaminiamo gl' integrali che figurano nelle formole stesse.

VI.

Poniamo

$$I_i = \int_0^\infty n U(x_i, n) J_0(mn)\, dn .$$

Essendo $U(x, u)$ funzione potenziale di sistemi simmetrici intorno ad un asse sarà suscettibile della forma (2), (§ 1); epperò si potrà scrivere

$$I_i = -S\mathfrak{Q}\int_0^\infty n J_0(mn)\, dn \int_0^\infty e^{-\sqrt{\delta_i^2}\mu} J_0(\mu n) J_0(\mu R)\, d\mu$$

δ_i rappresentando, la distanza del piano dell'anello potenziante dal piano x_i, e $\mathfrak{Q}$ la sua massa. A δ e $\mathfrak{Q}$ si deve estendere la somma.

Applicando a questa espressione il teorema di Hankel (§ 5, ε) se ne ricava immediatamente

$$I_i = -\frac{1}{m} S\mathfrak{Q} e^{-m\sqrt{\delta^2}} J_0(mR) . \qquad (\alpha)$$

Introduciamo questo risultato nella (8). Ne concludiamo, ponendo δ_i in luogo di $\sqrt{\delta_i^2}$, ma ritenendo che δ_i si deve prendere positivo, e sopprimendo l'indice, inutile, in questo caso,

$$\Phi = A + S\mathfrak{Q}\int_0^\infty e^{-(\delta + x)m} J_0(mu) J_0(mR)\, dn . \qquad (8)'$$

Per la citata formola (2) si vede chiaramente che il secondo termine rappresenta la funzione potenziale di un sistema simmetrico intorno all'asse, composto dei medesimi elementi che costituiscono il sistema inducente, preso ciascuno con carica di segno opposto, e collocato dietro il piano ad egual distanza, come se fosse l'immagine luminosa del corrispondente elemento, riflesso dal piano.

Questo risultato apparisce assai chiaro, dalla costruzione geometrica.

In seguito ad esso, possiamo concludere senz'altro che Φ, nel primo caso, è la funzione cercata.

Pei valori infinitamente grandi delle coordinate, si avrà posto $S\mathfrak{Q} = Q'$

$$\lim_{\rho=\infty} \Phi = A + \frac{Q'}{\rho} \quad \lim_{\rho=\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\frac{Q'}{\rho^2} ,$$

per modo che

$$\lim_{\rho=\infty} \left(\rho^2 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = A\, Q'.$$

Introduciamo ora il risultato di α in (9). Abbiamo

$$\Phi = \sum_{i=1,2}^{j=2,1} (-1)^{i-1} \left(\frac{x_i - x}{2\Delta} A_j + S\mathfrak{Q}\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} m(x_i - x)}{\operatorname{senh} 2\Delta m} e^{-\delta_j m} J_0(mR) J_0(mu)\, dm \right). \quad (9)'$$

Anche questa formola è suscettibile di un' interpretazione geometrica molto semplice.

Si trova facilmente

$$\frac{\operatorname{senh} m\,(x_i - x)}{\operatorname{senh} 2\Delta m} = \sum_{r=0}^{r=\infty}\left(e^{-[(2r+1)2\Delta-(x_i-x)]m} - e^{-[(2r+1)2\Delta+(x_i-x)]m}\right),$$

ed essendo $x_i - x_j = (-1)^{i-1}\,2\Delta$,

$$\frac{\operatorname{senh} m\,(x_i - x)}{\operatorname{senh} 2\Delta m} = (-1)^{i-1}\sum_{r=0}^{r=\infty}\left(e^{-[2r2\Delta+x-x_j]m} - e^{-[2(r+1)2\Delta-(x-x_j)]m}\right).$$

Il secondo termine, che figura nell'argomento di (9)′ si può quindi porre sotto la forma seguente

$$(-1)^{i-1}\sum_{r=0}^{r=\infty}\left\{ S\mathfrak{Q}\int_0^\infty e^{-[\delta_j+2r.2\Delta+x-x_j]m}\, J_0(mR)\, J_0(mu)\, dm \right.$$

$$\left. - S\mathfrak{Q}\int_0^\infty e^{-[\delta_j+2(r+1)2\Delta-(x-x_j)]m}\, J_0(mR)\, J_0(mu)\, dm \right\}.$$

Ora, se si forma la serie delle immagini di un punto o di un piano posto a distanza δ_j dal piano x_j, ottenute colla successiva riflessione dell'elemento sui due piani, partendo dalla riflessione sul piano x_j, si riconosce facilmente che le distanze di queste immagini dal piano x_j sono rappresentate dalle formole $2r.2\Delta+\delta_j$, $2(r+1)2\Delta+\delta_j$ per $0 \overline{\gtrless} r \leq \infty$; la prima formola corrispondendo alle immagini poste dietro il piano, e la seconda a quelle poste davanti. D'altra parte $x - x_j$ è la distanza del punto potenziato dal piano x_j, o questa distanza con segno negativo, secondo che $j=2$ o $j=1$, ossia $i=1$ o $i=2$. Epperò gli esponenti delle esponenziali in (β) rappresentano le distanze assolute del punto potenziato dalle successive immagini ora indicate.

Confrontando (β) con (α) concludiamo quindi che gl'integrali di (9) rappresentano la funzione potenziale di due serie infinite di sistemi elettrici, composti dei medesimi elementi, che costituiscono il sistema inducente, in quanto che formati colle immagini dei singoli elementi di esso, ottenute colla successiva riflessione sui due piani considerati come specchi. Le due serie cominciano coll'immagine del sistema inducente riflessa dall'un piano e dall'altro. Il segno delle cariche è invertito nella prima immagine di ciascuna serie, e nelle successive è alternativamente concorde e contrario.

Così la parte non lineare di (9) può mettersi sotto la forma di una funzione potenziale di sistemi simmetrici intorno all'asse. Però, in questo caso, trattandosi di un sistema infinito, conviene attenersi, anzi che a questa forma, alla (9)′. (Vedasi in proposito la mia Memoria citata in principio dell'introduzione).

VII.

In primo luogo, si rileva molto facilmente che l'integrale che figura in (9)', preso fra 0 e ∞', è convergente. Vi figurano difatti come fattori le funzioni $J_0(mR)$, $J_0(mn)$, $\frac{\operatorname{senh}(x_i - x)m}{\operatorname{senh} 2m\Delta} e^{-m\delta_i}$, le quali nei limiti dell'integrazione sono sempre finite, e per m tendente all'infinito tendono a 0, le prime due almeno come $m^{-\frac{1}{2}}$, e le ultime due più rapidamente che qualunque potenza negativa di m. Le tre prime funzioni possono per valori particolari dei parametri ($R=0$, $u=0$, $x_i - x = 2\Delta$) ridursi all'unità, non così la quarta, poichè supponiamo che il sistema inducente non arrivi fino all'uno o all'altro dei piani. Si ha quindi sempre un fattore che col crescere di m oltre ogni limite, tende a 0 come una potenza negativa di m di esponente infinito, e ciò basta per concludere che l'integrale è convergente, in ogni caso.

L'integrale in discorso definisce adunque una funzione sempre finita di x e di u. Dalla circostanza che le funzioni di x e di u $\left(\frac{\operatorname{senh}(x-x_i)m}{\operatorname{senh} 2m\Delta},\ J_0(mu)\right)$ che vi appariscono, sono per tutti i valori delle due variabili attinenti al problema finite, continue e ad un sol valore, noi possiamo anche concludere che la funzione delle variabili medesime definita dall'integrale, sarà per quei valori anche continua e ad un sol valore, e che per trovarne le derivate si potrà derivare sotto al segno d'integrazione.

Le stesse conclusioni si devono estendere all'espressione

$$\mathrm{S}\,\mathfrak{Q}\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}(x_i - x)\,m}{\operatorname{senh} 2m\Delta}\, e^{-m\delta_i}\, J_0(mR)\, J_0(mu)\, dm.$$

Essendo $\mathfrak{Q}'$ finito, ciò è evidente nel caso che S rappresenti una sommatoria ordinaria, che abbraccierà un numero finito di termini, perchè il sistema inducente si suppone finito. Nel caso che S rappresenti un integrale, sarà $\mathfrak{Q} = D\,d\varsigma$, dove D può rappresentare una densità lineare, superficiale o corporea, e $d\varsigma$ secondo i casi un elemento di linea, superficie o corpo, mentre l'integrale dovrà essere esteso a limiti di linee, di superficie o di corpi. Siccome, nella nostra ipotesi, questi limiti saranno però in ogni caso finiti, e D sarà, nei limiti dell'integrazione, una funzione finita, l' operazione S non potrà ancora presentare nessuna singolarità, e reggerà la proposizione enunciata.

Concludiamo che la (9)' definisce una funzione Φ di x, u, nei limiti del problema, finita, continua e ad un sol valore.

Formiamo ora le derivate di Φ, per il che approfittiamo della dimostrata legittimità della derivazione sotto il segno. Troviamo così

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \sum_{i=1,2}^{j=2,1} (-1)^i \left(\frac{A_j}{2\Delta} + \mathrm{S}\,\mathfrak{Q}\int_0^\infty \frac{\cosh(x_i - x)}{\operatorname{senh} 2m\Delta}\, e^{-\delta_j m}\, m\, J_0(mR)\, J_0(mu)\, dm\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}=\sum_{i=1,2}^{j=2,1}(-1)^{i}\,\mathrm{S}\,\mathfrak{Q}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}(x_i-x)\,m}{\operatorname{senh}2m\Delta}\,e^{-\delta_j m}\,m\,\mathrm{J}_0(m\mathrm{R})\,\mathrm{J}_1(mu)\,dm \tag{11}$$

Per queste formole reggono le conclusioni fatte a proposito di (9)'.

Difatti, queste formole presentano, per rispetto a quella, quest' unica differenza che nella (10) si ha il prodotto $m\,\frac{\cosh(x_i-x)m}{\operatorname{senh}2\Delta m}$ in luogo di $\frac{\operatorname{senh}(x_i-x)m}{\operatorname{senh}2\Delta m}$, e nella (11) il prodotto $m\,\mathrm{J}_1(mu)$; in luogo di $\mathrm{J}_0(mu)$. Ora $\frac{\cosh(x_i-x)\,m}{\operatorname{senh}2\Delta m}$, $\mathrm{J}_1(mu)$ sono funzioni sempre continue, ad un valore, e finite, per tutti i valori delle variabili, che a noi occorre di considerare: di più, col crescere di m oltre ogni limite, la prima si comporta come $\frac{\operatorname{senh}(x-x_i)\,m}{\operatorname{senh}2m\Delta}$, e la seconda come $\mathrm{J}_0(mu)$. Queste funzioni non modificano quindi le conclusioni in discorso. In quanto ad m, che diventa infinito al limite superiore, noi possiamo immaginarlo collegato con $e^{-m\delta_j}$, ed allora abbiamo nel prodotto $me^{-m\delta_j}$ un fattore della funzione sotto il segno, che, come $e^{-m\delta_i}$, è sempre finito, e che per m tendente ad ∞ tende a 0 più rapidamente che qualunque potenza negativa di m.

Si vede così come, approfittando di quanto si disse a proposito di (9)', si debba concludere che le (10), (11) definiscono due funzioni di x, u finite, continue e ad un sol valore, per tutti i valori di queste variabili che a noi occorre di considerare; donde segue che la funzione Φ definita da (9), ammette, nello spazio attinente al nostro problema, derivate prime dotate dalle indicate proprietà.

Non ci resta più che esaminare i limiti di (9)', (11) per u crescente oltre ogni limite.

Però, poniamo nelle due formole,

$$mu=\mu \qquad dm=\frac{d\mu}{u}$$

Abbiamo così

$$\Phi=\sum_{i=1,2}^{j=2,1}(-1)^{i-1}\left(\frac{x_i-x}{2\Delta}\,\mathrm{A}_j+\frac{1}{u}\,\mathrm{S}\,\mathfrak{Q}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{x_i-x}{u}\right)\mu}{\operatorname{senh}\frac{2\Delta}{u}\,\mu}\,e^{-\frac{\delta_j}{u}\mu}\,\mathrm{J}_0\!\left(\frac{\mathrm{R}}{u}\mu\right)\mathrm{J}_0(\mu)\,d\mu\right.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}=\frac{1}{u^2}\sum_{i=1,2}^{j=2,1}(-1)^{i}\,\mathrm{S}\,\mathfrak{Q}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}\frac{x_i-x}{u}\mu}{\operatorname{senh}\frac{2\Delta}{u}}\,e^{-\frac{\delta_j}{u}\mu}\,\mathrm{J}_0\left(\frac{\mathrm{R}}{u}\mu\right)\mathrm{J}_1(\mu)\,d\mu\,.$$

Supponiamo ora che u cresca oltre ogni limite, e osserviamo che

$$\lim_{u=\infty} \frac{\operatorname{senh} \frac{x_i - x}{u}\mu}{\operatorname{senh} \frac{2\Delta}{u}\mu} = \frac{x_i - x}{2\Delta}, \quad \lim_{u=\infty} J_0\left(\frac{R}{u}\right) = 1 .$$

Si vede di qui che il limite a cui tendono col crescere di u gl' integrali delle nostre due formole saranno, salvo un fattore, i medesimi che quelli di

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\delta_j}{u}\mu} J_0(\mu)\, d\mu , \qquad \int_0^\infty \mu\, e^{-\frac{\delta_j}{u}\mu} J_1(\mu)\, d\mu .$$

Ora pel citato teorema di Lipschitz (§ 1, (α)) si ha

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\delta_j}{u}\mu} J_0(\mu)\, d\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta_j}{u}\right)^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\delta_j}{u}\mu} \mu J_1(\mu)\, d\mu = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\delta_j}{u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} .$$

La prima di queste due formole è la stessa (α) del § 1, e la seconda è quella che se ne ottiene derivando per rispetto a b, nell' ipotesi di $a = \frac{\delta_i}{u}$, $b = 1$.

Si vede che facendo tendere u all'∞, i due integrali tendono all'unità.

Però, rammentando che $x_1 - x_2 = 2\Delta$, e ponendo, come precedentemente, $\mathcal{S}\mathcal{Q} = Q'$, otteniamo dalla ($\alpha$)

$$\left.\begin{aligned} \lim_{u=\infty} \Phi &= \frac{x_1 A_2 - x_2 A_1}{2\Delta} + \frac{A_1 - A_2}{2\Delta} x + \frac{Q'}{u} \\ \lim_{u=\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= -\frac{Q'}{u^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Di quì

$$\lim_{u=\infty} \left(u\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = 0 . \tag{12$'$}$$

Si vede quindi che la Φ definita da (9), (9)$'$ soddisfa a tutte le proprietà che si esigevano.

Possiamo quindi ancora concludere, riferendoci al § 5,

$$W(x, u) = \Phi(x, u) .$$

VIII.

Consideriamo ora gli enunciati problemi d'equilibrio, ed abbiasi, in primo luogo un conduttore limitato da un piano indefinito, e, del resto, esteso, indefinitamente in tutti i sensi, posto in presenza di coibenti dati, caricati simmetricamente intorno ad un asse perpendicolare al piano. Si tratta di esaminare le circostanze relative all'equilibrio dell'elettricità nel conduttore.

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio nel conduttore essendo che in ogni punto interno ad esso sia nulla la risultante delle azioni elettriche, dovrà nel conduttore rendersi libera dell'elettricità, che aggiunga la sua azione a quella dei coibenti.

Ora, non essendo il sistema proposto effettivamente realizzabile, per trattare la questione, bisogna stabilire qualche postulato.

Noi assumiamo che la funzione potenziale dell'elettricità indotta nel conduttore

1. pei valori finiti delle coordinate ammetta le proprietà caratteristiche di una funzione potenziale di sistemi finiti;

2. sulla sfera all'infinito ammetta un valore determinato della forma $A + \frac{Q'}{\rho}$, dove Q' dinota la carica del sistema inducente, con che la sua derivata per rispetto a ρ vi è espressa da $-\frac{Q'}{\rho^2}$.

Questi postulati, in seguito ai risultati ottenuti nei precedenti §§, ci bastano perchè possiamo risolvere la questione.

In seguito ad essi la condizione d'equilibrio ora rammentata si traduce in quella che la funzione potenziale di tutta l'elettricità deve prendere nel conduttore un valore costante.

Dinotando con $U(x, u)$ la funzione potenziale dei coibenti, con $W(x, u)$ la funzione potenziale dell'elettricità indotta, e con A' una costante, si dovrà quindi avere in tutto il conduttore, e particolarmente sul piano, che lo divide dal rimanente spazio, in cui si trovano i coibenti,

$$W(x, u) + U(x, u) = A'. \qquad (\alpha)$$

Siccome poi il conduttore si appoggia alla sfera all'infinito, ed ivi $U(x, u)$ si annulla, mentre pel secondo postulato $W(x, u)$ si riduce ad $A + \frac{Q'}{\rho}$, e al limite (per $\rho = \infty$) ad A, si vede che dev'essere

$$A = A'. \qquad (\beta)$$

In virtù dei due postulati e di queste due condizioni (α), (β), richiamando le conclusioni del § 4, si vede che la funzione potenziale $W(x, u)$ non potrà essere diversa dalla funzione Φ data da (8), (8)'.

Però concludiamo

$$W(x, u) = A + S\mathfrak{Q}\int_0^\infty e^{-(\delta + x)m} J_0(mR)\, J_0(mu)\, dm,$$

dove è conservato ai varî simboli il significato attribuitovi nei §§ 5, 6.

Dimostriamo ora che dev' essere $A = 0$.

Però, osserviamo in primo luogo che l'elettricità indotta dovrà costituire uno strato piano alla superficie del conduttore.

Per una formola nota, la densità $h(\eta)$ sul cerchio di raggio η del piano si avrà

$$h(\eta) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0}, \qquad (\gamma)$$

epperò per la precedente espressione

$$h(\eta) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{S}\mathfrak{Q}\int_0^\infty m\,e^{-\delta m}\,J_0(mR)\,J_0(m\eta)\,dm. \qquad (14)$$

Il modo di comportarsi di $h(\eta)$ per η tendente ad ∞ si può concludere senz'altro da (γ). Difatti, se si richiama (§ 6) che la parte variabile di W rappresenta la funzione potenziale di un sistema di massa $-Q'$, si ricava direttamente da (γ)

$$\lim_{\eta=\infty} h(\eta) = \lim_{\eta=\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=\infty} = -\frac{1}{2\pi}\frac{Q'}{\eta^2}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

A questa stessa conclusione si arriva facilmente, esaminando (γ). Poniamo $m\eta = \mu$. Ne ricaviamo

$$h(\eta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\eta^2}\mathrm{S}\mathfrak{Q}\int_0^\infty \mu\,e^{-\frac{\delta}{\eta}\mu}\,J_0\left(\frac{R}{\eta}\mu\right)J_0(\mu)\,d\mu.$$

Facciamo ora tendere η ad ∞. Essendo $\lim_{\eta=\infty} J_0\left(\frac{R}{\eta}\mu\right) = 1$, il limite dell'integrale si può ridurre a

$$\lim_{\eta=\infty}\int_0^\infty \mu\,e^{-\frac{\delta}{\eta}\mu}\,J_0(\mu)\,d\mu.$$

Ora dal teorema di Lipschitz (§ 1, (α)) più volte adoperato, derivando per rispetto ad a, e quindi facendo $a = \frac{\delta}{\eta}$, $b = 1$, si ottiene

$$\int_0^\infty \mu\,e^{-\frac{\delta\mu}{\eta}}\,J_0(\mu)\,d\mu = \frac{\frac{\delta}{\eta}}{\left[1+\left(\frac{\delta}{\eta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

e di qui si conclude che l'integrale, col crescere di η tende a 0 come $\frac{\delta}{\eta}$, e il limite di questa quantità è evidentemente $\cos\frac{\pi}{2}$.

Vediamo pure che

$$\lim_{\eta=\infty} \eta^3 h(\eta) = -\frac{1}{2\pi}Q'\delta.$$

Segue di qui che la $(\beta)'$ e *a fortiori* la (γ) del § 3 sono verificate dalla nostra distribuzione, epperò, conformemente alle conclusioni di quel paragrafo, la carica del piano sarà finita, e lo strato indefinito si comporterà precisamente come un sistema finito, così nel finito, come sulla sfera all'infinito.

Si conclude che dev' essere, dinotando con Q la carica del piano,

$$\lim_{\rho=\infty} W = \frac{Q}{\rho} = 0,$$

e quindi

$$A = 0,$$

con che si vede che il conduttore non potrà essere mantenuto che al potenziale 0.

Inoltre

$$Q = -Q'.$$

Designando con $Q(\eta)$ la carica di una porzione del piano chiusa da una circonferenza di raggio η, si ha da (14),

$$Q(\eta) = -S\mathfrak{Q}\int_0^\infty m e^{-\delta m} J_0(mR)\, dm \int_0^\eta \eta J_0(m\eta)\, d\eta.$$

Ma si ha

$$\int_0^\eta \eta J_0(m\eta)\, d\eta = -\frac{1}{m}\frac{d J_0(m\eta)}{dm} = \frac{\eta}{m} J_1(m\eta). \qquad (\delta)$$

Epperò

$$Q(\eta) = -\eta S\mathfrak{Q}\int_0^\infty e^{-\delta m} J_0(mR)\, J_1(m\eta)\, dm. \qquad (15)$$

Ponendo $m\eta = \mu$, si può scrivere

$$Q(\eta) = -S\mathfrak{Q}\int_0^\infty e^{-\frac{\delta}{\eta}\mu} J_0\left(\frac{R}{\eta}\mu\right) J_1(\mu)\, d\mu;$$

e di qui, facendo tendere η ad ∞, e rammentando che

$$\lim_{\eta=\infty} e^{-\frac{\delta}{\eta}\mu} = 1 \qquad \lim_{\eta=\infty} J_0\left(\frac{R}{\eta}\mu\right) = 1 \qquad \int_0^\infty J_1(\mu)\, d\mu = 1,$$

si desume per grandezza della carica totale dal piano

$$Q = -S\mathfrak{Q} = -Q',$$

carica eguale e di segno contrario a quella delle masse inducenti come si è già veduto.

IX.

Passiamo al secondo problema. Abbiansi due conduttori simili a quello considerato nel precedente §, affacciati per le superficie piane indefinite, parallelamente disposte; e fra essi siano collocate delle masse coibenti cariche simmetricamente intorno ad un asse perpendicolare ai due piani.

Valgono per questo sistema considerazioni analoghe a quelle fatte pel sistema precedente.

Per poter approfittare dei risultati ottenuti, noi assumeremo i postulati che la funzione potenziale dell'elettricità indotta nei due conduttori

1. pei valori finiti delle coordinate ammetta le proprietà caratteristiche delle funzioni potenziali di sistemi finiti,

2. sulla sfera all'infinito si mantenga determinata, finita e continua, mentre la sua derivata per rispetto a ρ prenda la forma $-\frac{C}{\rho^2}$ (C costante qualunque), così che per punti all'infinito di ascissa finita la derivata per rispetto ad u tenda a $-\frac{C}{u^2}$.

Questi postulati, in unione colla condizione che, sul piano $x=x_i$ dev' essere

$$W(x, u) + U(x, u) = A_i ,$$

A_i dinotando una costante, per le conclusioni del § 4, ci permettono di conchiudere che la funzione potenziale dell'elettricità indotta nello spazio compreso fra le due superficie piane non può essere che la Φ data da (9), (9)'.

Però, scrivendo opportunamente, abbiamo

$$W(x, u) = \frac{x_1 A_2 - x_2 A_1}{2\Delta} - \frac{A_1 - A_2}{2\Delta} x$$

$$+ S \mathfrak{Q} \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}(x_1 - x)\, m e^{-\delta_2 m} - \operatorname{senh}(x_2 - x)\, e^{-\delta_1 m}}{\operatorname{senh} 2m\Delta} J_0(mR) J_0(mu)\, dm. \quad (16)$$

La densità elettrica $h_i(\eta)$ sul piano $x = x_i$, si deve in questo caso, calcolare colla formola

$$h_i(\eta) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{n=0} = (-1)^i \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=x_i}$$

dove

$$V(x, u) = U(x, u) + W(x, u).$$

Assumendo per $U(x, u)$ la forma (2), donde

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_i} = S \mathfrak{Q} \int_0^\infty m e^{-m\delta_i} J_0(mR) J_0(m\eta)\, dm ;$$

e approfittando di (11), si trova, in seguito ad alcune riduzioni,

$$
\left.
\begin{aligned}
h_1(\eta) &= \frac{A_1 - A_2}{2\Delta} - \frac{1}{2\pi}\mathrm{S}\mathfrak{Q}\int_8^\infty m\,\frac{\operatorname{senh}\delta_2 m}{\operatorname{senh}2\Delta m}\,J_0(mR)\,J_0(m\eta)\,dm \\
h_2(\eta) &= -\frac{A_1 - A_2}{2\Delta} - \frac{1}{2\pi}\mathrm{S}\mathfrak{Q}\int_0^\infty m\,\frac{\operatorname{senh}\delta_1 m}{\operatorname{senh}2\Delta m}\,J_0(mR)\,J_0(m\eta)\,dm.
\end{aligned}
\right\} \tag{17}
$$

La densità apparisce così composta di un termine variabile, e di un termine costante, eguale e di segno contrario sui due piani, dal quale deriva su ciascun piano uno strato di massa infinita.

Questo strato si annulla nell'ipotesi di $A_1 = A_2$; cioè, supponendo che sui due piani la funzione potenziale debba avere il medesimo valore.

Ora, se questa ipotesi non è necessaria per determinare la funzione potenziale dell'elettricità indotta fra i due piani, essa si presenta spontaneamente, quando si considerino gli spazî esterni, che si estendono all'infinito dietro ciascun piano. Perchè dovendo il valore A_1, A_2, che regna sopra un piano, mantenersi dietro di esso fine all'infinito, quando sia A_1 diverso da A_2, il sistema elettrico deve agire diversamente sui punti all'infinito posti dietro l'uno e l'altro piano, ciò che ripugna certamente ad ammettere.

Se si fa $A_1 = A_2 = A$, dalle (16), (17) si ha

$$
W(x,u) = A + \mathrm{S}\mathfrak{Q}\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}(x_1 - x)\,m\,e^{-\delta_2} - \operatorname{senh}(x_2 - x)\,m\,e^{-\delta_1 m}}{\operatorname{senh}2m\Delta}\,J_0(mR)J_0(mu)\,dm \tag{16$'$}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
h_1(\eta) &= -\frac{1}{2\pi}\mathrm{S}\mathfrak{Q}\int_0^\infty m\,\frac{\operatorname{senh}\delta_2 m}{\operatorname{senh}2m\Delta}\,J_0(mR)\,J_0(m\eta)\,dm \\
h_2(\eta) &= -\frac{1}{2\pi}\mathrm{S}\mathfrak{Q}\int_0^\infty m\,\frac{\operatorname{senh}\delta_1 m}{\operatorname{senh}2m\Delta}\,J_0(mR)\,J_0(m\eta)\,dm
\end{aligned}
\right\} \tag{17$'$}
$$

ed è facile dimostrare che si deve porre $A = 0$.

Per approfittare dell' analisi fatta sulla (14) del § precedente, basta che osserviamo che

$$
\lim_{\eta=\infty} \frac{\operatorname{senh}\dfrac{\delta_2}{\eta}\mu}{\operatorname{senh}\dfrac{2\Delta}{\eta}\mu} = \frac{\delta_2}{2\Delta} \qquad \lim_{\eta=\infty} \frac{\operatorname{senh}\dfrac{\delta_1}{\eta}\mu}{\operatorname{senh}\dfrac{2\Delta}{\eta}\mu} = \frac{\delta_1}{2\Delta} \tag{α}
$$

Allora, richiamando quell'analisi, è facile vedere che per gl'integrali che figurano

in (17)′ reggeranno le conclusioni trovate a proposito degl' integrali che figurano in (14), epperò col crescere di η, $h_1(\eta)$, $h_2(\eta)$ tenderanno a 0 in modo che rimangono finiti i prodotti $\eta^3 h_1(\eta)$, $\eta^3 h_2(\eta)$. Però la funzione potenziale dei due piani, e la somma delle funzioni potenziali stesse, deve tendere a 0 col portarsi il punto potenziato all'infinito, per il che bisogna che sia $A = 0$.

Le cariche $Q_1(\eta)$, $Q_2(\eta)$ di una porzione dei due piani chiuso da una circonferenza di raggio η per le (17)′ e la (δ) del § precedente, saranno date dalle formole

$$
\begin{aligned}
Q_1(\eta) &= -\eta\, S\, \mathfrak{Q} \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} \delta_2 m}{\operatorname{senh} 2\Delta m} J_0(mR)\, J_1(m\eta)\, dm \\
Q_2(\eta) &= -\eta\, S\, \mathfrak{Q} \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} \delta_1 m}{\operatorname{senh} 2\Delta m} J_0(mR)\, J_1(m\eta)\, dm .
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Facendo tendere η ad ∞, e approfittando delle (α) e del limite di (15), si ricava di qui per le cariche totali dei due piani

$$Q_1 = -\frac{1}{2\Delta} S\, \mathfrak{Q}\, \delta_2, \qquad Q_2 = -\frac{1}{2\Delta} S\, \mathfrak{Q}\, \delta_1. \tag{19}$$

Essendo

$$\delta_1 + \delta_2 = 2\Delta ,$$

si deduce di qui

$$Q_1 + Q_2 = - S\, \mathfrak{Q} = - Q' , \tag{20}$$

cioè *la somma delle cariche indotte sui due piani è eguale e di segno contrario alla carica del sistema inducente.*

Dalle (19) si ha anche

$$Q_1 . S\, \mathfrak{Q}\, \delta_1 = Q_2 . S\, \mathfrak{Q}\, \delta_2 \tag{21}$$

che permette di enunciare il teorema: *le cariche indotte sui due piani sono inversamente proporzionali ai momenti del sistema inducente per rispetto ai piani stessi.*

Giova osservare che la (20) sussiste anche nell'ipotesi di A_1 diverso da A_2.

X.

Ci rimane un'ultima osservazione. Per fissare le idee, abbiamo supposto che i conduttori si prolungassero infinitamente dietro il piano prospiciente gli agenti induttori.

Nel caso che essi abbiano anche una seconda faccia, che chiameremo posteriore, è chiaro che, purchè si ammetta che la funzione potenziale del sistema si comporti all'infinito, posteriormente a questa faccia, nel modo stesso che dall'altra parte, e nel conduttore, reggeranno tutte inalterate le precedenti conclusioni.

Difatti, essendo lo spazio indefinito limitato dalla faccia posteriore dei singoli conduttori e dalla relativa calotta all'infinito uno spazio neutro, alla superficie del quale la funzione potenziale dal sistema mantiene un valore costante, una costante eguale

a questo valore soddisfarà in quello spazio a tutte le condizioni che vi si esigono per la funzione potenziale del sistema, epperò pel § 4, evidentemente applicabile anche ad uno spazio chiuso da una calotta all' infinito e da una superficie qualunque, dovrà essa funzione potenziale in quello spazio mantenersi costante, ed avere quel valore.

Il medesimo valore avendosi nel conduttore, in tutta la superficie posteriore sarà $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, e quindi non vi sarà strato indotto.

Analoghe considerazioni valgono pel caso che nel conduttore vi fossero delle cavità. In una cavità dovrà la funzione potenziale mantenere il valor costante, che possiede nel conduttore, e quindi non vi potrà essere elettricità alla superficie di essa.

Studi sulla carica dei coibenti, sulla teoria dell'elettroforo e sulla sua analogia coi condensatori.

Memoria del prof. EMILIO VILLARI

letta nella seduta del 3 aprile 1881.

(Con una tavola)

PARTE I.

Quantunque l' elettroforo sia un istrumento assai conosciuto e da molti studiato, nondimeno i fisici non sono punto d'accordo sulla sua teoria, e perciò non parmi inutile che io esponga i risultati di alcune mie ricerche eseguite in proposito. Ma prima è necessario che dica in breve dello stato attuale della quistione.

Alcuni fisici credono che battendo la stiacciata dell' elettroforo, od una lastra di ebanite, esse si caricano negativamente sulla faccia battuta e positivamente sulla opposta. Altri credono invece, che il coibente si carichi solo sulla faccia battuta di elettricità negativa, la quale sarebbe poi cagione dei complessi fenomeni elettroforici. La prima teoria, forse quella abbracciata dal Volta ([1]) trovasi esposta in alcuni trattati di fisica come quelli del Daguin, del Jamin ecc., e viene sostenuta dal Buff ([2]) e dal Cantoni in varie sue comunicazioni fatte al r. Istituto lombardo ([3]). La seconda teoria è forse più generalmente adottata, e la troviamo indicata nei trattati del de La Rive, Pouillet, Becquerel, Mascart ecc. Ma è da notare che codeste due teorie non trovansi nei trattati citati svolte in maniera da dare una idea esatta dei fenomeni svariati che si producono nell'elettroforo.

Il Riess ([4]) nel suo libro d' elettricità statica si occupa a lungo di un tale istrumento e quasi ne dà una nuova teoria; la quale a vero dire può ridursi alla prima delle due precedenti, e per sommi capi esprimersi nei seguenti termini. Quando si batte, con pelle di gatto, una stiacciata resinosa isolata essa si elettrizza; e saggiandola poi col piano di prova si trovano le due sue facce negative; laonde, avuto riguardo alla coibenza della resina, il Riess ammette che sola la faccia battuta si carica di elettricità negativa; la quale opera per influenza sul resto del coibente, ne carica la faccia non battuta di elettricità negativa e risveglia nel suo interno uno strato di elettricità positiva; presso a poco come è indicato nella fig. 1, ove la faccia *ab* rappresenterebbe quella stata strofinata. La carica negativa di *cd*, secondo il Riess, si disperde assai facilmente quando la faccia corrispondente

([1]) Buff. Ann. de Phy. et de Che. V. 6 [III] p. 104, 1842.

([2]) Vedi Cantoni, *Sull' elettroforo*. R. Istituto Lombardo V. 2 parte I p. 32, 1869.

([3]) V. l. c. anno 1860 e seg.

([4]) Riess, *Reibungselectricität* Bd. I § 293 e seg. Berlin, 1853 e compara Vüllner, *Physik* Bd. 4 § 269 e seg. Leipzig, 1872.

vien messa in comunicazione col suolo, percui isolata di poi essa apparirà carica positivamente. In questo stato, che potremo dire definitivo della resina, essa opera per le sue due cariche e produce gli svariati fenomeni elettroforici.

Questa teoria la troviamo abbracciata dal prof. Eccher, e sostenuta in varî articoli pubblicati nel Nuovo Cimento degli anni 1871 e seguenti, alcuni dei quali furono scritti in proposito di quelli del prof. Cantoni, col quale l'Eccher non trovasi punto di accordo. Anche il Righi ([1]) ed il Govi ([2]) sostengono presso a poco la medesima teoria.

Il Bezold più recentemente si leva contro questa teoria del Riess, e dice che l' uso del piano di prova adoperato dal Riess è fallace. Egli invece, per conoscere gli stati elettrici d'un coibente, ricorre al noto mescuglio del Lichtenberg, di solfo e minio; e sebbene egli aggiunga che l'uso di codeste polveri non sia del tutto sicuro, pure operando con grande accorgimento, crede di potere asserire che la stiacciata coibente (di resina o di ebanite) si carica solo sulla faccia strofinata di elettricità negativa, ed il resto rimane allo stato neutro. Ma, egli aggiunge, se si appoggia la faccia opposta sulla forma, questa le comunica l'elettricità positiva che vi si è svolta per l'influenza dalla faccia negativa della resina.

Il Wüllner (l. c.) che riporta nel suo trattato queste due ultime interpretazioni, sebbene dia molta importanza alle ricerche di Bezold, pure è di avviso che questi vada troppo oltre nel negare ogni azione induttiva della faccia negativa della resina sul resto di essa. Quale però possa essere, aggiunge il Wüllner, questa induzione od influenza nei coibenti potrà solo conoscersi dopo nuove ricerche.

Per le quali cose può dirsi che la teoria dell'elettroforo vaga ancora nell' incerto e nell' indeterminato ([3]) perchè a tutto rigore mancano metodi esatti e precisi per determinare con sicurezza lo stato elettrico d' una delle facce d' una lastra coibente. Ed a vero dire queste indagini sono delicate e difficili, essendochè la carica d' una delle facce del coibente può influire vigorosamente sull' altra in modo che i segni ottenuti col piano di prova, con l'elettroscopio e con le polveri del Lichtenberg possono, come è noto ai fisici, fare apparir carica una faccia che sia allo stato naturale. Ed io aggiungerò, che con detti mezzi una faccia del coibente può mostrarsi con carica opposta a quella che realmente possiede, sol che l'altra sia energicamente carica di elettricità contraria.

Volendo adunque determinare il vero stato elettrico di una delle facce del coibente è indispensabile di annullare l' influenza perturbatrice della carica opposta dell'altra faccia, così che quella esaminata operi sola: in tale circostanza ciascuno dei metodi noti può adoperarsi con piena fiducia. E per riuscire in questo intento ho operato nel modo seguente.

([1]) Righi, Nuovo Cimento, v. IX. p. 141, 1873.

([2]) Govi, Accademia dei Lincei v. IX. (6 marzo 1881).

([3]) Intorno all' elettroforo si è tanto scritto e discusso in Italia e fuori, che un'analisi minuta di tutte le pubblicazioni fatte in proposito esigerebbe un apposito e lungo lavoro, il quale non era punto nelle mie intenzioni di eseguire. Invece in questo mio scritto mi limito ad indicare solo i principali lavori fatti intorno all' elettroforo venuti a mia cognizione, e quindi passo a dire delle mie esperienze, le quali credo pel loro complesso riusciranno a chiarire la quistione.

Supponiamo che una lastra di ebanite, la cui sezione *ad* è espressa nella figura 2, abbia debole carica positiva in *ab* e potente carica negativa sulla faccia *cd*, e tale che per la sua energia si manifesti sola, così che la lastra esaminata con uno qualunque dei metodi noti apparisca carica negativamente su ambedue le facce. In tali condizioni appoggiamo la faccia *cd*, negativa sopra una tavola od un disco metallico, fig. 3, comunicanti col suolo, esso si caricherà di elettricità positiva in alto, la quale dissimulerà la carica negativa *cd*, dell'ebanite, e perciò la faccia sua superiore *ab* potrà distintamente mostrare il suo vero stato elettrico con uno qualunque dei seguenti mezzi:

1° Col piano di prova.

2° Col mescuglio Lichtenberg.

3° Con l'elettroscopio a pile secche, quando si avvicini a questo la faccia *ab*, l'altra *cd* essendo dissimulata con un disco metallico comunicante col suolo.

4° Od anche può adoperarsi lo scudo dell' elettroforo nelle due maniere seguenti:

a) Si ponga sulla faccia superiore libera *ab*, fig. 4, lo scudo, esso si caricherà per influenza di elettricità omologa, cioè positiva in alto: che si constaterà sia col piano di prova sia col mescuglio Lichtenberg. Ma è da avvertirsi che detta carica, sebbene distinta e sicura pure suole essere debole, per ragioni facili a comprendersi.

b) Ovvero quando lo scudo è appoggiato sulla faccia libera dell' ebanite, l' altra essendo dissimulata alla solita maniera, come nella fig. 4, si metta detto scudo in comunicazione col suolo, quindi s'isoli e si sollevi, ed esso porterà seco energica carica, opposta a quella della faccia su cui era appoggiato. I medesimi risultati si ottengono se si sperimenta sulla faccia opposta dell'ebanite: ma in tal caso le cariche elettriche che si ottengono sono naturalmente le inverse delle precedenti.

Come rilevasi, questi diversi modi di sperimentare sono tutti fondati sul fatto primo della dissimulazione elettrostatica, e perciò il metodo generale su indicato potrebbesi chiamare *metodo delle dissimulazioni* ([1]). Esso è semplice, generale e sicuro: ed inoltre, a cagione di una serie di induzioni e condensazioni, che si verificano fra la tavola e l'ebanite da una parte, e fra questa e lo scudo dall'altra, le cariche che si

([1]) Questo metodo è generale, e per quanto io mi sappia non fu seguito integralmente da alcuno nelle svariate maniere indicate da me, nè con le diligenze necessarie che dirò in seguito, per cui ne risultarono le incertezze e discrepanze notate dai vari fisici. Mi affretto però ad aggiungere che esso metodo è stato parzialmente praticato già da varî sperimentatori. Così lo troviamo in parte indicato dal Buff in una sua Memoria *Sull'elettroforo* (Ann. de chim. et de phys. 1842) coi risultati della quale, varie delle mie esperienze concordano. Il Riess nella sua opera (l. c.) dice che avendo voluto in un caso determinare la carica di una delle facce di una schiacciata resinosa scaricò la faccia opposta per mezzo di una fiamma. Ed il Cantoni finalmente seguendo le norme del Beccario e del Wilche adopera nelle sue ricerche sull'elettroforo qualch'uno dei modi (il 4°) di sperimentare più sopra indicati. Anzi egli in proposito gentilmente mi scrive « è questo il metodo che io adopero da più « anni nei miei corsi, e che dimostrai al congresso di Palermo (1876) e più tardi (1878) ai fisici « venuti a Pavia pel Volta nella conferenza da me tenuta nella scuola ». (Varî fisici si radunarono a Pavia nell'aprile 1878 in occasione dell' inaugurazione della statua al Volta; ed allora il prof. Cantoni fece una interessante conferenza nella scuola di fisica di quella università.

osservano nello scudo quando, dopo averlo messo in comunicazione col suolo, e quindi isolato, si allontana dalla resina, sono sempre assai energiche anche se il coibente sia debolmente caricato: per lo che io credo che questo sia il metodo il più geloso e squisito per conoscere se un coibente sia o no elettrizzato.

Ciò premesso veniamo a studiare le cariche di un coibente strofinato. Ho preso perciò, fra gli altri, un disco di ebanite grosso 4^m, 8 e 40 cm. di diametro, e tenendolo pel suo bordo isolato nell'aria, ne ho vigorosamente battuta una faccia con la consueta pelle di gatto. Così il disco si è fortemente elettrizzato, ed in modo da far sentire quel crepitio caratteristico che si produce in simili casi. Quindi, tenendo sempre isolata la lastra nell' aria, ho esaminato lo stato elettrico delle sue due facce, con l'elettroscopio a pile secche, col miscuglio del Lichtenberg, col piano di prova e con lo scudo soprapposto, sia isolato sia anche sollevandolo dopo averlo toccato; ed ho sempre costatato che le due facce del coibente sembravano cariche di elettricità negativa: talmenteche pare si riscontri la resina esser carica come nel primo periodo supposto dal Riess ed indicato dalla fig. 1. Dopo appoggiai la faccia dell' ebanite non stata battuta, su una tavola o sopra un disco comunicanti col suolo, ve la pigiai contro vigorosamente con un' altro disco isolato o no; e poscia sollevata ed isolata nuovamente la lastra, trovai del pari, coi mezzi citati, che essa mostravasi sempre carica negativamente su ambedue le facce. Queste medesime esperienze ho ripetute più volte e sempre col medesimo risultato: il quale è dovuto certamente al costante predominio della carica negativa acquistata dalla faccia stata strofinata con la pelle di gatto. Ad istudiare perciò il vero stato elettrico della faccia non battuta deve adoperarsi il metodo della dissimulazione.

Ho quindi battuto nuovamente la stessa faccia della medesima ebanite o di altra diversa, ho appoggiata la detta faccia sopra una tavola comunicante col suolo, come indica la figura 3, e poscia esaminando con uno dei cinque metodi da me più sopra indicati, la faccia libera dell'ebanite *ab* non stata battuta, essa appariva manifestamente e sempre carica di elettricità positiva, ossia opposta a quella della faccia battuta. E si badi che codesta faccia positiva *ab* non fu posta in comunicazione con alcun corpo unito al suolo, col quale corpo avrebbe potuto esserci scambio di elettricità, come dovrebbe essere secondo Riess e Bezold. Dopo di che se si isoli nuovamente la lastra e si riesamini coi metodi precedenti, essa apparirà di nuovo carica di elettricità negativa su ambedue le facce. E così seguitando si possono ripetere molte volte queste osservazioni e sempre coi medesimi risultati. È quasi superfluo il dire che se si dissimuli la faccia positiva, l'opposta o battuta apparirà, coi noti processi, carica di elettricità negativa. Anzi se l' ebanite si appoggi sopra un disco metallico isolato e quindi vi si soprammette il solito scudo, si potranno, opportunamente operando, riscontrare le dovute cariche sull' uno e sull'altro disco e quali debbono essere, ritenendo l'ebanite carica delle due opposte elettricità. Risultato questo che anche meglio si studierà in seguito. Tutte cotali esperienze furono più volte ripetute sopra diverse lastre di ebanite ed alcune furono anche eseguite con un elettroforo ordinario.

Per constatare adunque la carica negativa della faccia strofinata non v'è alcuna difficoltà, imperocchè essa essendo generalmente assai energica si manifesta con qualunque istrumento e senza alcun artifizio. Per determinare invece la carica positiva

della faccia non strofinata bisogna adoperar sempre il metodo della dissimulazione, ed avere inoltre alcune diligenze per non incorrere in errori grossolani, fra le quali citerò le seguenti. Se si dissimula la faccia battuta e negativa dell'ebanite, la faccia opposta esaminata col piano di prova si mostrerà carica positivamente. Ma in alcune regioni questa stessa faccia apparirà negativa, e propriamente in quelle nelle quali l'ebanite, per non esser ben piana, rimane sollevata dalla tavola. Ivi adunque la dissimulazione è imperfetta, e predomina ancora la carica della faccia negativa sottostante. Per evitare un tale errore bisognerà pigiare fortemente col piano di prova o con una bacchetta di vetro la lastra, così da stabilir bene il contatto di essa con la tavola sottoposta: ed allora anche quelle regioni appariranno positive.

Un' analoga osservazione vale quando si adopera il mescuglio Lichtenberg. Infatti quando la lastra non è piana e la dissimulazione della elettricità negativa è incompleta, soffiando il mescuglio sulla faccia libera superiore essa si ricoprirà di solfo quasi da pertutto, salvo in quei punti o regioni ove la lastra rimane sollevata dalla tavola, le quali si copriranno di minio. Ma pigiando con aste di vetro gli indicati punti e soffiandovi di nuovo le polveri, essi e tutta la faccia non battuta si mostreranno positivi ricoprendosi di solfo.

Per ciò che riguarda l'esame con l'elettroscopio a pile secche dirò, che dissimulata la faccia stata battuta o negativa ed avvicinata l'altra all' istrumento essa, il più delle volte, si mostrerà carica positiva. Tuttavia non è raro che l' indicazione sia incerta od anche opposta, per esser la lastra discosta dal disco dissimulatore. In tal caso bisognerà con delle aste di vetro tener bene a contatto l' ebanite col disco.

In questo esame con l' elettroscopio si presenta ancora un fenomeno singolare. Quando si dissimula la faccia negativa l' altra si mostra positiva: e se si dissimula la positiva l' altra faccia si mostrerà all' elettroscopio naturalmente con carica negativa. Ma tale carica apparisce assai languida e molto meno energica di quando non si adoperi la dissimulazione. Questo fenomeno, in apparenza singolare, è dovuto sempre all'eccesso stesso della carica negativa della lastra. Ed invero quando si appoggia la faccia positiva sul disco *cd* comunicante col suolo, fig. 5, esso disco si carica positivamente per l'influenza della eccessiva carica negativa *ab*, la quale rimane così in buona parte dissimulata, e perciò s' appaleserà all'elettroscopio con minore intensità che se il disco *cd* non vi fosse.

E da notarsi da ultimo che vi sono, come è noto, delle ebaniti, ed io ne ho trovata una, che serbano pochissimo le cariche, percui battuta e caricatane una faccia negativamente, essa dopo poco tempo perde buona parte di questa carica, ed allora senza alcun artifizio può mostrare con l' elettroscopio, o con altri mezzi ancora, le due facce dotate di opposte elettricità. Ed è forse questo il caso percui alcuni sperimentatori, quali Riess e Bezold, hanno trovato che la faccia non battuta è positiva dopo esser stata in contatto con la forma dello elettroforo, ossia dopo un certo tempo che è stata caricata. Anche il Cantoni col piano di prova ha costatato la carica positiva della faccia non battuta della ebanite. Il fatto adunque notato è sicuro, ma esso non è generale, nè infirma per nulla i risultati ottenuti con le mie esperienze.

Ciò premesso, avendo esperimentato con grande diligenza sopra moltissime lastre

di ebanite speculari somministratemi da Wallach e sopra un elettroforo ordinario, sono venuto alle seguenti conclusioni circa la carica dei coibenti:

1° *Battendo con pelle di gatto una ebanite tenuta isolata nell' aria od una resina isolata, la faccia battuta acquista carica negativa*, e CONTEMPORANEAMENTE *la faccia non battuta acquista carica positiva.*

2° *In generale la carica negativa è preponderante, percui il più delle volte sola si manifesta : e per osservare in tal caso la carica positiva della faccia opposta è indispensabile dissimulare la carica negativa esuberante.*

Dopo i quali risultati è facile dare la completa teoria dell'elettroforo e comprendere i varî ed intricati fenomeni che in esso si svolgono. Quando si stropiccia una lastra di ebanite o di resina, la faccia strofinata prende forte carica negativa e l'opposta debole carica positiva: ponendo il coibente sul disco o forma F isolata, fig. 6, e poi soprapponendo al sistema lo scudo S si promuoveranno in entrambi i consueti fenomeni d'induzione, dovuti ad un eccesso della carica negativa: e la forma F e lo scudo S appariranno elettrizzati in modo analogo, quale è indicato nella figura. Mettendo lo scudo in comunicazione col suolo, la sua carica negativa si sperde, la positiva si rinvigorisce e dissimula più o meno completamente la negativa *ab* della resina; per cui la positiva inferiore *cd* opererà liberamente sulla forma, la quale modificherà la sua carica, e lo stato elettrico del sistema è allora espresso dalla fig. 7. Questi diversi stati elettrici della forma F e dello scudo S sono stati a più riprese osservati da me; ma essi sono spesso assai languidi; e siccome dipendono dalla energia diversa delle due opposte cariche della resina, e forse anche dalla sua grossezza, così alcune volte possono non osservarsi tutti, e dar luogo ad errori ed incertezze.

E ritornando allo stato elettrico espresso dalla figura 7 si comprenderà facilmente che se si pone la forma F in comunicazione col suolo, la sua carica positiva si disperde, la negativa s' aumenta e dissimula più completamente la positiva *cd* della resina; quindi nuova carica negativa superiore *ab* della resina si libera ed influisce sullo scudo, che si carica di nuovo come in principio. Percui con alternative comunicazioni col suolo, dello scudo e della forma si produce una vera e propria condensazione; per la quale essi si caricano vigorosamente e possono dar poi energiche scintille d' elettricità opposte.

I fenomeni summentovati non mutano nella loro natura, sia che si tocchi prima la forma e poi lo scudo o viceversa; nè se si operi con una resina le cui facce abbiano cariche opposte e di eguali intensità; solo in tal caso mancherebbe il primo stato elettrico della forma F, indicato nella fig. 6; e la forma e lo scudo mostrerebbero fin dal principio cariche indotte opposte, quali sono espresse nella fig. 8. Risultato questo che bisogna ben considerare per non esser tratti in errori.

Questa serie di successive comunicazioni col suolo dello scudo e della forma può con vantaggio sostituirsi con una sola operazione, cioè col mettere in comunicazione col suolo contemporaneamente la forma e lo scudo.

E qui si presenta una osservazione degna di particolare considerazione. Il Cantoni partendo dall' idea che le facce della resina abbiano cariche opposte fra loro conclude, che la forma e lo scudo tenuti isolati debbono avere cariche contrarie come

sono indicate nella figura 8 [1]; per cui basterebbe, secondo il Cantoni, fare arco fra lo scudo e la forma per caricare l' istrumento: per lo che egli non crede necessario che esso debba comunicare col suolo per farlo funzionare [2].

L' Eccher fa in proposito una esperienza assai ingegnosa, con la quale oppugna le idee del Cantoni, e pare a prima vista che essa sia affatto contraria alla doppia carica della resina dimostrata più sopra. Ed ecco questa esperienza. L' Eccher isola un elettroforo, ne batte con la pelle vigorosamente la stiacciata, vi soprappone lo scudo, quindi facendo arco fra esso e la forma ottiene una piccola scintilla che qualche volta, egli dice, non è percettibile: allontanato poi lo scudo la sua carica è debole. Invece se si fa comunicare col suolo la forma ed il disco le scintille che si ottengono sono energiche e lo scudo si carica potentemente. Da ciò l' Eccher conclude che è indispensabile la comunicazione dell' elettroforo col suolo [3].

Anche io ho studiato questo fenomeno nel modo che segue, ed ho osservato che esso è assai più complesso che per avventura non paia.

Si prenda una lastra di ebanite e tenuta isolata nell'aria si batte con pelle di gatto energicamente su una delle sue facce; questa prenderà forte carica negativa che indichiamo con tre segni —, fig. 11, e la faccia opposta avrà languida carica positiva che esprimiamo con un solo segno +. Interponiamo la lastra fra la forma F e lo scudo S isolati; i quali influenzati dalla carica eccessiva negativa *ab* si caricheranno in modo analogo; ma meno energicamente la forma che lo scudo, per la loro diversa distanza da *ab* e pel lieve contrasto della carica positiva *cd*, che tenderebbe a caricare la forma in senso opposto allo scudo. Per queste ragioni lo scudo avrà in alto una forte carica negativa, espressa dai tre segni — e la forma nella sua faccia inferiore avrà una lieve carica negativa indicata da un solo segno —. Facendo arco, come è indicato nella figura l'eccesso negativo dello scudo andrà sulla forma e si produrrà una scintilla. Inoltre sulla faccia *ab* vi sarà dissimulazione; la carica positiva *cd* potrà, in tal caso, agire sulla forma che manderà così elettricità positiva sullo scudo. Le due azioni sono concordanti, per lochè lo scudo, fig. 9, acquisterà forte carica positiva e la forma negativa; le quali si mostreranno, se dopo aver tolto l'arco si sollevi lo scudo col suo manico di vetro. Scaricato poi lo scudo e soprapposto nuovamante all' ebanite, esso per influenza prenderà ancora le due cariche consuete indicate nella fig. 12. Ma l'influenza sulla forma sarà lieve perchè essa ha già forte carica negativa. Rifacendo arco, fig. 12, nuova, ma poca elettricità negativa passerà dallo scudo alla forma che aumenterà il suo potenziale. Interrotta di nuovo la comunicazione e sollevato lo scudo esso avrà piccola carica positiva e darà piccola scintilla. Scaricato ancora lo scudo, soprapposto alla ebanite e facendo arco, i medesimi fenomeni si riproducono e nuova elettricità negativa andrà sulla forma. Per lo che ripetendo codeste operazioni la forma acquisterà sempre nuova elettricità negativa, fino ad avere lo stesso potenziale dello scudo, ed allora ogni nuovo flusso elettrico è impedito e lo scudo si solleverà allo stato naturale. Se non che la forma suol perdere

[1] Tale stato elettrico come si è detto non è generale.

[2] Cantoni, *Sull' elettroforo* R. Istituto Lombardo V. II parte I p. 35, 1869.

[3] Eccher, Nuovo Cimento, ultimo paragrafo della p. 208, e seg. 1872.

sempre un po' della sua carica, che viene mano mano riparata dallo scudo col quale si unisce, percui questo si solleverà generalmente con lieve carica positiva, che può osservarsi all'elettroscopio. Lo scudo in tale operazione, può dirsi che sottrae elettricità positiva al sistema e carica la forma negativamente.

In queste condizioni si scorge che l' elettroforo non può funzionare, e bene a ragione l' Eccher riteneva necessario far comunicare la forma col suolo. E dall'analisi precedente si scorge che tale comunicazione è necessaria per iscaricare la forma della sua elettricità negativa. Se si capovolge l'ebanite, ponendo in alto la sua faccia positiva e quindi si ripetono le precedenti operazioni, i fenomeni che si osservano sono analoghi, ma le cariche dei dischi sono opposte alle precedenti. Lo scudo sottrae in tal caso elettricità negativa al sistema e carica la forma positivamente: ed alla fine dell' esperienza le cariche sono disposte come nella fig. 10.

Tali cariche furono moltissime volte da me costatate; e la diversa loro natura, al variare della disposizione dell'ebanite, ci costringe ad ammettere nell'ebanite due cariche opposte sulle sue due facce.

Questi fenomeni sono sempre assai complessi e si può facilmente essere tratti in gravi errori e tali da misconoscere del tutto i risultati su esposti.

Può accadere infatti che la faccia stata battuta da un certo tempo non abbia una carica negativa eccessiva rispetto alla positiva della faccia opposta; per lo che può succedere che lo scudo e la forma abbiano stati elettrici conteari fig. 8, e non simili, fig. 6, come si era supposto. Od anche può accadere che le cariche dell'ebanite sieno tali che operi solo la negativa sullo scudo che si elettrizza, e non sulla forma che rimane perciò allo stato neutro. Per lo che la forma può esser nella sua faccia inferiore negativa, neutra o positiva, come ho più volte riscontrato. Ma questo stato variabile della forma si riscontra solo nel primo periodo o nell'inizio dell'esperienza; nel seguito le cariche della faccia e dello scudo son costantemente quali si sono più sopra indicate. Così facendo arco nel caso indicato dalla, fig. 8, la carica negativa dello scudo andrà sulla forma e la positiva di questa andrà sullo scudo; la scintilla sarà energica e lo scudo sarà positivo e la forma negativa, fig. 9, come si disse in principio.

È poi necessario d' isolare perfettamente la forma, d' adoperare un eccitatore, per fare arco, che sia isolato in modo quasi assoluto e di sperimentare in aria secca; senza tali diligenze non si riuscirà mai, dopo aver fatto arco, a sollevar lo scudo allo stato neutro, perchè parte della sua carica respinta, (la negativa nel caso della fig. 12) sempre si disperderà per l'arco e pei sostegni. Il quale inconveniente si manifesterà più specialmente quando la carica negativa od eccessiva dell'ebanite si trovi in alto, essendochè in tal caso codesta elettricità non è dissimulata, le cariche libere della forma e dello scudo sono più energiche che nel caso inverso, per ragioni facili a comprendersi, e perciò più facilmente si dissiperanno.

Dopo tutto ciò che si è detto può dirsi che realmente la discrepanza fra i vari fisici sia meno rilevante che per avventura non paia. Così, facendo astrazione da quei pochi i quali ritengono l'elettroforo agire per la sola carica negativa del suo coibente (cosa affatto insostenibile) tutti gli altri concordano nell' ammettere, in ultima analisi, che quando l'elettroforo agisce la schiacciata sua possiede elettricità

negativa sulla faccia battuta e positiva sull'opposta. E la sola differenza consisterebbe in ciò che alcuni credono che le due cariche opposte sulle due facce si risvegliano contemporaneamente durante lo strofinamento di una di esse; ed altri invece credono che la carica positiva della faccia non battuta si manifesti in seguito, come per un'azione secondaria, per contatto e comunicazione di essa faccia con altri corpi, e più specialmente con la forma dell' elettroforo. Le mie esperienze confermano la prima delle due interpretazioni, in quanto che parmi mostrino in modo chiaro che battendo una faccia del coibente, esso contemporaneamente ed immediatamente si elettrizza su entrambe le sue facce.

PARTE II.

Esposto così la teorica dell'elettroforo nei suoi particolari, passo ora ad indicare i risultati di alcuni miei studi sui condensatori, che hanno grandissima analogia con l'elettroforo.

Costruii dei quadri fulminanti con due lastre di vetro verniciate, poste l'una sull'altra e ricoperte esternamente con armature di stagnola circolare di opportuna grandezza. Questo quadro può caricarsi al modo consueto, ma pei fenomeni successivi che presenta bisogna distinguere due casi, cioè quello nel quale le lastre sono separate e quello nel quale sono in contatto.

Per tener separate le lastre interponevo agli angoli di esse dei pezzi di ebanite di circa 2^{mm} di grossezza. Quando si carica o scarica questo quadro si sa che fra le lastre si produce una serie di scintille che costituiscono la pioggia di fuoco del du Moncel. Il Bezold studiò col mescuglio del Lichtenberg lo stato elettrico delle facce interne delle lastre, dopo aver molte volte di seguito caricato e scaricato il sistema, e vide prodursi su di esse delle figure assai complesse. Otteneva invece delle figure abbastanza semplici, se soffiava le polveri sulle dette faccie interne delle lastre, dopo aver caricato e scaricato il quadro poche volte. E tali figure facevano quasi supporre alla produzione di scariche elettriche avvenute fra le lastre, nella direzione della armatura negativa alla positiva.

Io volli investigare il fenomeno delle scariche fra le lastre un po' più da vicino: e per operare in condizioni di massima semplicità, ho studiato separatamente lo stato elettrico delle facce interne delle lastre, dopo aver caricato una sola volta il quadro, e poi dopo averlo caricato e scaricato una sola volta. Inoltre ho creduto bene, per non complicare il fenomeno, di caricare l'apparecchio con una sola scintilla prodotta da una grossa bottiglia variamente carica, con le cui armature riunivo quelle del quadro.

Avendo caricato il quadro con la bottiglia attivata da 6 unità elettrometriche (¹), quindi smontato e soffiato le polveri sulle facce di vetro che erano interne, trovai dette facce avere cariche opposte a quelle delle rispettive armature. Ripetuto la

(¹) Le unità elettrometriche sono misurate da una bottiglia elettrometrica di 115^{mm} diametro e le cui armature sono alte circa 170^{mm}. La scintilla balena fra palline di $22^{mm},5$ di diametro poste a 5^{mm} di distanza.

prova con un altro quadro, le cui lastre erano perfettamente neutre e caricatolo con la bottiglia solita, attivata da 4 sole unità elettrometriche, vidi che le facce interne mostravansi alle polveri in parte negative ed in parte positive. E finalmente le facce interne avevano cariche omologhe a quelle delle corrispondenti armature se il quadro si caricò con la bottiglia attivata da solo due unità elettrometriche ([1]).

Queste diverse indicazioni date costantemente dalle polveri sono erronee, imperocchè nei varî casi contemplati può dirsi che *in ciascuna delle due lastre di vetro la faccia interna non ricoperta di stagnola ha sempre carica opposta a quella della propria armatura.* Infatti se dopo avere smontato il quadro s'adopera il metodo della dissimulazione, appoggiando l'armatura sopra una tavola o comunque mettendo detta armatura in comunicazione col suolo, la faccia opposta del vetro, esaminata con le stesse polveri o col metodo dello scudo, apparirà sempre e costantemente dotata di carica inversa a quella che possedeva l'armatura, fig. 13. Laonde le differenze notate precedentemento erano dovute ad azioni perturbatrici della carica predominante della faccia unita all'armatura.

Nella carica adunque di questi condensatori, la faccia interna *ab* del vetro, unito all'armatura positiva, dovendo essere negativa dovrà perdere elettricità positiva, fig. 13 e viceversa la faccia interna del vetro *cd*, dovendo essere positiva, perderà elettricità negativa. Perciò nel momento della carica del quadro deve prodursi fra le lastre una corrente, che va nella direzione delle frecce e della scarica della bottiglia caricatrice B. Tale corrente fra le lastre, quasi completa il circuito della bottiglia e costituisce la prima fase della pioggia di fuoco.

Se poi dopo aver caricato il quadro fortemente, cioè come nel primo dei casi su indicati, con 6 unità elettrometriche lo si scarica con l'eccitatore, nel modo espresso dalla fig. 14, si riproduce fra le lastre la pioggia di fuoco. Quindi smontato il quadro ed esaminato con le polveri le facce interne delle lastre, esse si troveranno in gran parte possedere la stessa elettricità che acquistarono per effetto della sola carica: ed inoltre le polveri istesse mostrano segni sicuri, che sulla faccia prima negativa *ab* vi sono dei punti e come delle macchie di elettricità positiva. Le quali hanno riscontro nella faccia *cd*, che prima positiva presenta punti e macchie negative. Le quali cose accennano che nel momento della scarica fra i vetri si è prodotta una corrente indicata dalle frecce, che è in senso contrario alla precedente, che completa il circuito esteriore, e che costituisce la seconda fase della pioggia di fuoco ([2]).

In queste esperienze le polveri danno indicazioni esatte, essendo le facce esterne dei vetri state scaricate.

Questi fenomeni hanno una certa analogia coi fenomeni delle pile secondarie: e la bottiglia che carica il quadro rappresenterebbe la pila che carica una pila secondaria, quella del Planté per es. Interrotta la comunicazione con l'elettromotore, tanto il quadro che la pila secondaria conservano l'energia elettrica loro comunicata, sotto

([1]) Queste diverse prove furono fatte adoperando ciascuna volta dei quadri perfettamente neutri.

([2]) L'esistenza di codeste correnti fra le lastre è cosa naturalissima e necessaria. Le facce interne dei vetri operano come armature, e le due lastre si caricano e scaricano come farebbero due quadri posti in cascata: fra i quali evidentemente debbansi produrre le correnti accennate.

forma potenziale. Ma riunendo i loro poli detta energia diviene attuale e si produce una corrente in direzione opposta a quella della carica, che percorre tutto intiero il circuito. Dopo di che tanto la pila secondaria che il quadro hanno bisogno di esser nuovamente caricati per poter funzionare.

Quando si sperimenta con le lastre del quadro poste a contatto i fenomeni che si osservano sono analoghi ai precedenti: salvo che dopo la carica le facce interne delle lastre, esaminate con le polveri appariscano sempre e costantemente con cariche omologhe a quelle delle corrispondenti armature. La qual cosa dipende da ciò, che vetri posti a contatto la condensazione sulle armature è energica, e quindi separati i vetri le cariche alle loro armature comunicate sono forti e perturbano quelle delle facce interne delle lastre. Ma adoperando il metodo delle dissimulazioni, col mettere cioè le armature in comunicazione col suolo ossia scaricandole, ed esaminando poi con le polveri le facce interne delle lastre, esse si mostrano con cariche opposte a quelle che avevano le rispettive armature: percui a parte gli errori citati i fenomeni sono identici a quelli ottenuti con le lastre separate [1]. Laonde noi possiamo dire:

Che in questi quadri le facce delle lastre di vetro non rivestite dalle armature acquistano sempre cariche inverse a quelle delle armature istesse; e quali sono indicate nella fig. 13.

Il qual fenomeno sembra essere assai generale e quasi costituire una legge secondo la quale parrebbe che i coibenti caricati su di una faccia acquistano sempre elettricità opposta sull'altra [2]. Tale deduzione io confermai ripetendo una antica esperienza più o meno variata dal Matteucci, Faraday [3], Buff [4], Cantoni [5] e da altri ancora, intorno ai risultati della quale forse non tutti i fisici sono perfettamente

[1] Il Belli (l. c. p. 405 e seg.) cita alcune esperienze del Beccaria analoghe alle precedenti; e siccome trova che le facce interne delle lastre di vetro alcune volte hanno cariche omologhe, altre volte contrarie a quelle delle rispettive armature così ricorre a delle intricate e speciose interpretazioni per darsene ragione.

[2] Il Buff (Ann. de Ph. et de Chi. p. 106 V 6, 1842) ammette parimenti, come proprietà generale dei coibenti che quando se ne carica una faccia l'altra acquista elettricità opposta. La quale alcune volte si manifesta ponendo la prima faccia in comunicazione col suolo per mezzo di un disco metallico od anche meglio aspettando un certo tempo affinchè essa carica si rinvigorisca. Il fatto osservato dal Buff ricade come si vede, in quelli ultimamente studiati da me; ma io credo che se la faccia opposta a quella stata caricata mostra dopo un certo tempo la sua elettricità, ciò devesi attribuire non ad aumento di questa ma sì vero a diminuzione di quella eccessiva della faccia stata caricata; imperocchè la carica eccessiva della faccia strofinata si disperde più rapidamente della debole carica della faccia opposta. Al quale proposito aggiungerò che se si carica per istrofinio fortemente una faccia di una lastra di ebanite questa mostrerà, come si disse, apparentemente carica negativa su entrambi le facce esaminate all'elettroscopio. Ma se si appoggi sopra una tavola, la faccia non battuta, la carica positiva di questa si conserverà e la negativa della faccia libera si disperderà lentamente; e dopo più ore la lastra apparirà all' elettroscopio positiva su entrambi le facce. Allora appoggiata la faccia negativa sulla tavola, l' ebanite dopo più ore apparirà con eccesso negativo e così seguitando, si possono ripetere moltissime volte le suindicate inversioni, nel mentre che la lastra lentissimamente si scarica. Io ripetetti queste prove per più settimane di seguito con una lastra di ebanite senza bisogno di ricaricarla.

[3] Mascart, *Traité d'électricité* p. 165 V. I. Paris, 1876.

[4] Buff, l. c.

[5] Cantoni, l. c.

di accordo. Presi cinque lastre di vetro assai ampie (50×50 cm.) ben verniciate, le disposi l' una sull' altra e ne formai un condensatore, soprapponendo alle facce esterne del sistema due dischi metallici. Caricai quindi vigorosamente un tale quadro con la scarica d' una bottiglia attivata da cinque unità elettrometriche. Dopo smontai il sistema, esaminai con le polveri lo stato elettrico delle facce di ciascuna lastra, e trovai positive tutte quelle rivolte alla armatura positiva e negative quelle rivolte alla negativa, nel modo che è espresso nella fig. 15, nella quale le armature sono figurate in *a* e *d'* e le lastre in V, V_1 ..... V_5. — L'esame con le polveri in questo caso non dà luogo ad incertezze, perchè esse polveri mostrano cariche opposte sulle due facce: tuttavia ho anche saggiato le lastre dissimulando la carica di una delle facce, e provando l'altra col metodo dello scudo menzionato più sopra (metodo *a* e *b* p. 451) ed i risultati ottenuti sono stati concordi con quelli ricavati dall'uso delle polveri [1].

E ritornando al quadro formato con due lastre dirò che ciascuna di esse, dopo che il quadro fu caricato, ed anche scaricato, può funzionare mirabilmente da elettroforo per molti giorni di seguito senza bisogno di ricaricar l'apparecchio. Così prendiamo ad esempio la lastra *ad* fig. 16, la cui faccia superiore *a b* supponiamo abbia forte carica positiva e la inferiore negativa. Appoggiamo *cd* sopra una tavola comunicante col suolo e tocchiamo col dito l'armatura A i fenomeni già più volte descritti si manifestano e le solite dissimulazioni e condensazioni si producono sulle facce *ab* e *cd*, per le quali l'armatura A acquista forte carica negativa e positiva la tavola. Sollevando il vetro *ad* le opposte sue cariche si dissimulano e la elettricità negativa della armatura A diverrà libera e potrà dare una vigorosa scintilla. Il vetro opposto, ossia quell'altro che serviva a completare il quadro, agirà in modo analogo dando però all'armatura cariche positive.

Un' esperienza analoga alla precedente fu eseguita dal Cantoni. Egli attacca sulla faccia d' un disco di metallo isolato uno strato di ceralacca che elettrizza con istrofinio; quindi appoggia la ceralacca sopra una tavola (Vedi fig. 16), mette il disco in comunicazione col suolo e poscia isolato lo solleva e lo trova carico negativo; percui la faccia della ceralacca non istrofinata deve essere carica positiva, concordemente a ciò che si è detto più sopra [2].

L'elettroforo di vetro su indicato è semplicissimo ed esso realmente è simile ad un elettroforo ordinario, la cui forma sarebbe rappresentata dall' armatura, la stiacciata dal vetro e lo scudo sarebbe fatto dalla tavola comunicante col suolo. Infatti un elettroforo ordinario adoperato come quello di vetro ha agito in modo analogo, ed ho dalla sua forma ottenuto vigorose scintille negative. Inoltre detto elettroforo di vetro funziona egualmente bene se invece di appoggiarlo sulla tavola si appoggi sopra un disco metallico comunicante col suolo. In tal caso esso si trasforma in un vero condensatore con armature mobili, e può caricarsi e scaricarsi alla maniera consueta. Le facce del vetro esaminate convenientemente, dopo la carica del

[1] È da notarsi che se si scarica il sistema, la distribuzione elettrica sulle faccie delle varie lastre è diversa, e meriterebbe essere accuratamente studiata col metodo della dissimulazione; cosa che mi propongo di fare in seguito.

[2] Cantoni, Atti R. A. dei Lincei T. XXV, p. 44 1872. Roma.

quadro, mostrano possedere elettricità omologa a quella delle armature con le quali erano in contatto. Ed è per codeste cariche persistenti e penetrate nel vetro che esso dopo può funzionare da elettroforo: e dette cariche si possono osservare con le polveri, e spesso senza alcuno artifizio, imperocchè sogliono essere presso a poco eguali, e perciò l'una non nasconde l'altra.

Parimenti un elettroforo ordinario può caricarsi con la macchina e poi funzionare sia da condensatore sia da elettroforo. Così caricai con la macchina un quadro di ebanite, quindi lo scaricai attraverso un galvanometro a filo lungo che deviò di 90°. Poscia ottenni delle scariche residue che si ridussero a zero dopo la quinta. Il quadro era adunque scaricato come condensatore ma poteva funzionare da elettroforo. Infatti l'armatura superiore sollevata dopo le ordinarie manovre dava vigorose scintille negative; ed il galvanometro riunito stabilmente ad esse armature deviava costantemente di 20°, quando s'innalzava od abbassava sull'ebanite, l'armatura superiore; mostrandosi questa, negativa nel sollevamento, come rappresenta la fig. 17, e positiva nell'accostarsi all'ebanite. Ma le due esperienze che seguono sono ancora più caratteristiche.

Ho caricato un quadro di ebanite ad armature mobili con la scarica di due bottiglie cariche con 8 unità elettrometriche: ho isolato l'apparecchio, sollevata l'armatura superiore col manico di vetro e poscia ho stabilmente riunite le due armature al galvanometro a filo lungo del du Bois-Reymond. Dopo ho rapidamente abbassato sull'ebanite lo scudo, e quando il galvanometro era tornato a zero ([1]) ho risollevato lo scudo. Questa manovra ho ripetuto molte volte ed ho osservato le deviazioni galvanometriche prodotte: le quali sono qui sotto indicate:

N. d'ordine	Deviazioni del galvanometro	N. d'ordine	Deviazioni del galvanometro
1	+ 90	8	— 10
2	— 11	9	+ 8,5
3	+ 14	10	— 9
4	— 9	11	+ 10
5	+ 10	12	— 8
6	— 10	13	+ 8
7	+ 10	14	— 9

Nello specchio precedente le deviazioni precedute dal segno + sonosi ottenute avvicinando, e quelle col segno — allontanando lo scudo dall'ebanite. Nel primo caso, dallo scudo effluiva elettricità positiva e nel secondo negativa, essendo la faccia superiore del coibente carica positivamente, come indica la fig. 17.

La corrente ottenuta col primo avvicinamento dello scudo fu misurata da 90° di deviazione, perchè in questo caso lo scudo non solo fu indotto dall'ebanite ma servì ancora a scaricarla di tutta la carica eccessiva positiva accumulata sulla sua faccia superiore. Laonde detta deviazione risponde alla scarica elettroforica ed a quella del condensatore, che hanno la stessa direzione. Pei movimenti successivi il

([1]) L'ebanite consisteva un disco di 40 cm. di diametro grosso 4, 8^{mm}. L'armatura sua superiore era formata da un disco di ottone di 18 cm. e la inferiore da un disco del pari di ottone di 21 cm. di diametro.

galvanometro deviò in media di soli 10° perchè il condensatore si era scaricato e l'ebanite agiva da semplice elettroforo; percui le correnti erano dovute a semplici scariche elettroforiche che rimasero presso a poco costanti, fatto astrazione dalle piccole differenze dovute alla irregolarità dei movimenti dello scudo (1).

Dalle quali esperienze risulta come un condensatore si sia trasformato facilmente in elettroforo.

Analoghe indagini volli eseguire con un elettroforo ordinario di resina. Isolai perciò questo elettroforo e dopo avere unito la forma e lo scudo suo col galvanometro a filo lungo del du Bois-Reymond, battei con pelle di gatto e caricai vigorosamente la stiacciata dello elettroforo. Poscia avvicinai ed allontanai successivamente lo scudo alla resina, come avevo fatto nel caso precedente ed ottenni al galvanometro le deviazioni seguenti:

N. d'ordine	Deviazioni del galvanometro	N. d'ordine	Deviazioni del galvanometro
1	— 83	8	+ 32
2	+ 41	9	— 34
3	— 37	10	+ 36
4	+ 38	11	— 33
5	— 33	12	+ 37
6	+ 36	13	— 33
7	— 28		

Dai numeri riportati rilevasi che pel primo avvicinamento dello scudo alla resina si ebbe una deviazione di — 83°, corrispondente ad una scarica negativa dello scudo; e pel primo allontanamento una deviazione opposta di 41°. Poscia i successivi movimenti produssero delle deviazioni di 35° in media; per lo che il fenomeno è del tutto simile a quello precedentemente descritto (2). Ed anche con questo elettroforo la prima deviazione è dovuta a scarica elettroforica e di condensatore, e le successive a sole scariche elettroforiche. Per cui la pelle di gatto, battendo la resina, vi sviluppa ed accumula carica eccessiva, alla medesima guisa che le armature fanno sulle facce del condensatore: e sono codeste cariche eccessive che danno la maggior energia alle prime deviazioni galvanometriche.

Dalle quali cose si rileva che un elettroforo caricato con la pelle può agire nel primo istante da condensatore.

Laonde parmi possa dirsi esservi completa analogia od identità fra un condensatore ed un elettroforo potendo l'uno operare come l'altro e viceversa, fatto astrazione dalla intensità della loro efficacia. Analogia d'altronde con altra esperienza stata già indicata da antichi e recenti elettricisti quali Wilcke, Volta, Belli, Neyreneuf, e Cantoni.

Quest'ultimo inoltre, partendo dall'idea della polarizzazione dei coibenti crede e sostiene che caricando un condensatore le facce del coibente abbiamo cariche opposte a

(1) Ciò che si dice per lo scudo vale anche pel disco inferiore o forma, perchè ambedue funzionano contemporaneamente e nella medesima maniera.

(2) La forma di questo elettroforo aveva un diametro di 39^{cm}. e lo scudo di 33^{cm}. Pure la prima deviazione galvanometrica fu più piccola che quella ottenuta col condensatore precedente perchè con la pelle di gatto si potè caricare la resina assai meno che non si caricò l'ebanite con la macchina. Per contro la maggior ampiezza della forma e della scudo fecero sì che le deviazioni successive od elettroforiche furono con questo ultimo istrumento più vistose che col primo.

quelle che ricevono dalle armature con le quali si trovano in contatto. Ed aggiunge che la scarica di un condensatore risulta da due scariche opposte in direzione, e cioè da una scarica propriamente di condensatore e da una inversa od elettroforica, che formerebbe la massima parte della scarica dell'apparecchio. Dopo la scarica il coibente, sempre secondo il Cantoni, si polarizzerebbe in senso opposto al precedente e perciò le sue facce avrebbero uno stato elettrico omologo a quello comunicato alle due armature: ed in tale condizione il condensatore si sarebbe trasformato in elettroforo. Aggiunge inoltre che bisogna debolmente caricare il condensatore, altrimenti le cariche opposte delle armature, nel momento della scarica neutralizzerebbero l'elettricità del vetro e questo si troverebbe allo stato neutro e non potrebbe operare da elettroforo.

Il Cantoni (¹) poi rannoda questo fenomeno della duplice ed apposta scarica (diretta e d'influenza) d'un condensatore alle scariche oscillanti del Feddersen, alle quali questi e gli altri fisici danno una interpretazione diversa.

Ma le mie ricerche mi hanno condotto a dei risultati differenti da quelli indicati dal Cantoni. Io ho osservato ripetute volte che caricando un condensatore piano le cariche delle sue armature vanno, come è noto, in massima parte sulle due facce del vetro, e le armature separate di poi mostrano possedere cariche omologhe a quelle ricevute. Le facce del vetro poscia agiscono per influenza sulle armature, respingono le cariche omologhe che si disperdono per l'aria e pei sostegni, e dopo un certo tempo, variabile secondo le condizioni, e che può essere anche di una ora o più, le armature sollevate possono mostrare cariche contrarie a quelle ricevute ed a quelle delle rispettive facce del vetro con le quali erano a contatto. Ma questa inversione delle cariche delle armature è, come scorgesi un fenomeno d'influenza ed affatto secondario.

Dopo la scarica del quadro anche se fu fortemente caricato, il vetro agisce benissimo da elettroforo mostrando sulle facce elettricità della stessa natura di quella ricevuta dalle armature. Ma l'esame di questi fenomeni può dar luogo a facili errori.

Se si scarica un quadro a lastra piana per mezzo dell'eccitatore isolato ed in maniera da non toccare con esso le due armature, allora sollevata l'armatura superiore, che ricevè carica positiva per es., la si trova qualche volta negativa, ma più spesso positiva, essendochè in generale una parte della carica positiva del vetro suole comunicarsi alla armatura. Se per contrario si scarica il quadro ponendo l'eccitatore a contatto con le due armature, le cariche esuberanti comunicate alle facce del vetro si neutralizzano; il vetro agisce quindi elettroforicamente per le cariche residue sulle due armature, nuova scarica di elettricità, omologa (perchè respinta) a quella delle facce del vetro ed a quella della carica primitiva si produce, e quindi le armature rimangono con cariche d'influenza e perciò opposte a quelle ricevute nel tempo della carica. Laonde se si scarica un condensatore (facendo astrazione delle cariche oscillanti) la direzione della corrente sarà nel senso dell'armatura che fu caricata in più a quella che fu caricata in meno, sia se si considera la sola scarica del condensatore, sia se si tien conto anche di quella elettroforica.

Da tutti i fenomeni esposti in questo scritto parmi si debba concludere che i

(¹) Cantoni, Atti dei Lincei, Serie 2ª, Vol. III. p. 233. Roma, 1876.

coibenti si elettrizzino e formino la parte attiva e principalissima dei condensatori e degli elettrofori. E riprendendo una antica idea dell'Avogadro citato dal Felici e confermata da tutte le più recenti ricerche sul potere induttivo dei coibenti, noi potremo ritenere che un coibente sotto l'azione d'un corpo elettrizzato si polarizza; ossia si divide come in tanti strati con tutte le loro facce positive rivolte in un verso e con le negative in direzioni opposte, appunto come si osservò nel condensatore formato da cinque lastre di vetro ed espresso nella figura 15. Questi fenomeni di polarizzazione richiamerebbero alla memoria quelli che si suppone avvenire nella magnetizzazione del ferro e dell'acciaio. Ed essa polarizzazione si produce lentamente nel caricare il condensatore, e rapidamente si disfa nel momento della sua scarica. Le particelle adunque del coibente, nel momento della scarica, quasi precipitano verso il loro stato di equilibrio e perciò il coibente può rompersi facilmente in quel momento. Io infatti ho osservato, ed anche molti avranno del pari notato, che quando si scarica una batteria fortemente elettrizzata spessissimo accade che una o più bottiglie contemporaneamente si perforano. Tali bottiglie adunque, che reggevano la carica in equilibrio, si perforano appunto quando l'elettricità s'allontana dalle armature. Il che parmi non possa comprendersi senza ammettere che un movimento molecolare e quasi uno scuotimento abbia luogo nella massa del coibente all'istante della sua scarica.

RIASSUNTO.

I fisici non sono punto d'accordo sulla teoria dello elettroforo; giacchè alcuni ammettono che la schiacciata resinosa sia solo carica negativamente sulla faccia strofinata; altri credono invece che la resina sia negativa sulla faccia strofinata e positiva sull'opposta; e finalmente il Riess ritiene che le due facce della resina strofinata sieno negative e fra di esse trovisi uno strato positivo intermedio.

La difficoltà di risolvere la controversia è dovuta alla mancanza dei metodi opportuni per determinare esattamente lo stato elettrico d'una lastra coibente. In generale tali lastre, quando sono elettrizzate hanno sulle due facce cariche opposte e di diversa intensità; le quali il più delle volte si perturbano così da dare agli istrumenti indicazioni incerte e discordi. Per indagare adunque con sicurezza lo stato elettrico di una faccia di un coibente, è indispensabile di annullare o d'indebolire il più che è possibile l'azione perturbatrice della carica della faccia opposta a quella che si vuole esaminare; nel quale intento io sono riuscito con un metodo semplicissimo che parmi sicuro, e che si pratica nella maniera seguente.

Si appoggi e si comprima fortemente sopra una tavola od un disco metallico (che può essere lo scudo dello elettroforo) comunicanti col suolo una delle facce della lastra coibente da esaminare. La carica di detta faccia, specialmente se è predominante sull'altra, risveglierà carica opposta nel conduttore comunicante col suolo e rimarrà dissimulata. L'elettricità della faccia libera agirà quindi da sola, senza perturbazioni e facilmente mostrerà la sua vera natura: che potrà conoscersi con ogni sicurezza adoperando uno dei seguenti modi:

1° Il mescuglio del Lichtenberg;

2° L'elettroscopio a pile secche;

3° Il piano di prova;

4° Può anche adoperarsi lo scudo dell'elettroforo nelle due maniere seguenti:

a) S'appoggi lo scudo sulla faccia libera di una lastra di ebanite per es., l'altra faccia essendo dissimulata; lo scudo allora acquisterà per influenza sulla sua faccia superiore e libera carica omologa a quella della faccia dell'ebanite su cui è appoggiato. E tale carica s'osserverà facilmente col piano di prova o col mescuglio Lichtenberg, sebbene essa sia generalmente poco energica.

b) Ovvero quando lo scudo è appoggiato sulla faccia libera dell'ebanite, l'altra essendo dissimulata alla solita maniera, si mette detto scudo in comunicazione col suolo, quindi si isoli e sollevi, ed esso porterà carica opposta a quella della faccia su cui era appoggiato.

Tutti questi modi furono da me tenuti nell'esaminare gli stati elettrici di diverse lastre coibenti e più specialmente di ebanite; e dopo svariate prove, molte volte ripetute, sono venuto alle conclusioni seguenti:

1° *Quando si batte con pelle di gatto una lastra di ebanite o di resina, esse si caricano di elettricità negativa sulla faccia battuta e* CONTEMPORANEAMENTE *di elettricità positiva sulla faccia non battuta.*

In generale la carica negativa è preponderante e perciò (se non viene dissimulata nel modo indicato) *essa, da sola, si manifesta il più delle volte e dà luogo alle incertezze ed errori notati dai diversi fisici.*

Ciò premesso la teoria dell'elettroforo è semplicissima. La stiacciata stata strofinata ha cariche opposte sulle due facce; ciascuna separatamente opera per influenza sullo scudo e sulla forma e vi accumula e condensa cariche opposte a quelle di ciascuna delle facce istesse, quando lo scudo e la forma comunicano col suolo; il che è indispensabile per far funzionare l'elettroforo, non essendo sufficiente far comunicare i dischi soltanto fra loro, per ragioni esposte ampiamente nella Memoria.

Se si carica con la scarica di una batteria, un quadro di vetro ad armature mobili, le facce di vetro prendono cariche omologhe a quelle delle armature con le quali sono unite e se si carica un quadro formato da più lastre di vetro (io ne ho adoperato fino a 5 ben verniciate) esse hanno cariche positive sulle facce rivolte all'armatura positiva, e cariche negative sulle facce rivolte all'armatura negativa [1].

Analogo risultato si ottiene operando con un quadro di due sole lastre messe a contatto od a piccola distanza fra loro. Le facce delle lastre che si guardano od interne hanno cariche omologhe a quelle delle armature alle quali sono rivolte, e perciò sono opposte fra loro e tali che deve ritenersi, che nel momento della scarica del quadro si produce, nello spazio compreso fra le lastre, una corrente che va nella direzione dell'armatura positiva alla negativa: corrente che produrrebbe la prima fase della pioggia di fuoco. Dopo la scarica, sulle due facce interne delle lastre di vetro si osservano, soffiandovi il mescuglio Lichtenberg, segni non dubbî di cariche

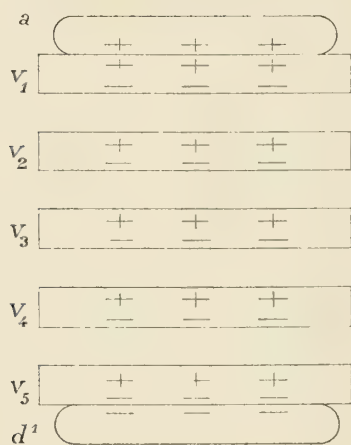
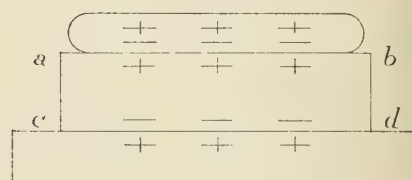
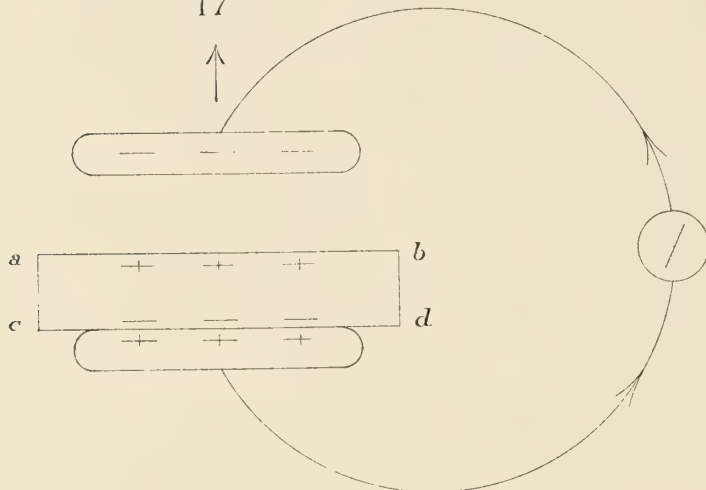
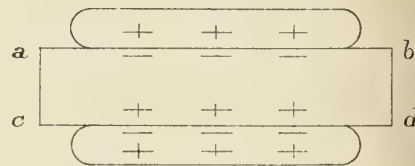
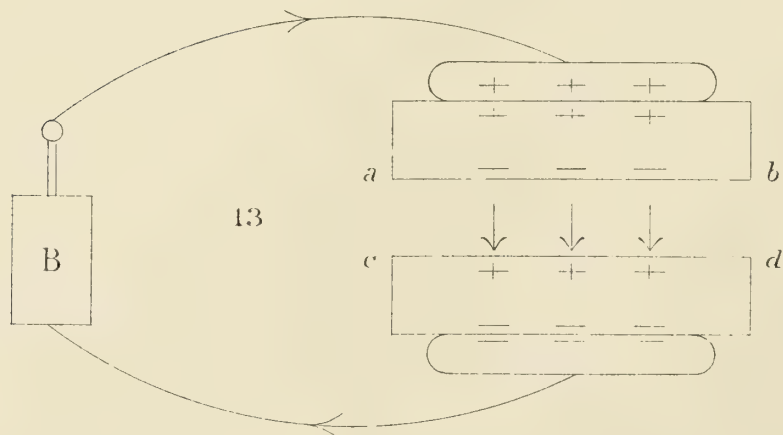
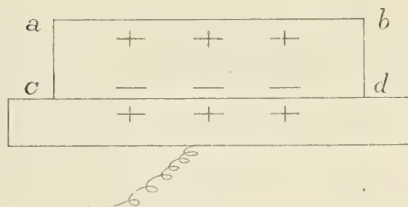
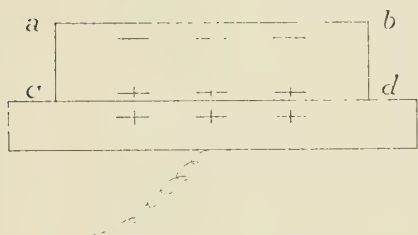
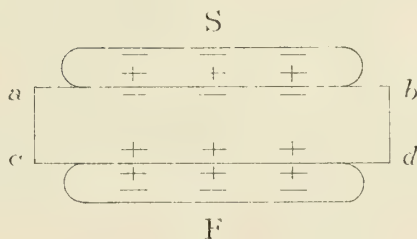
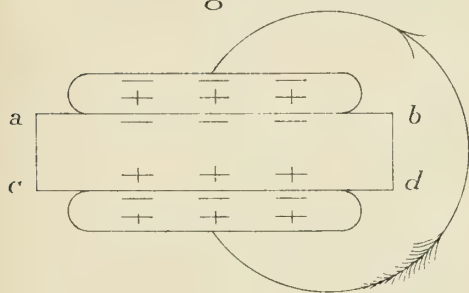
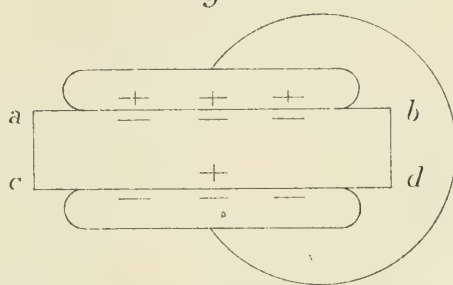
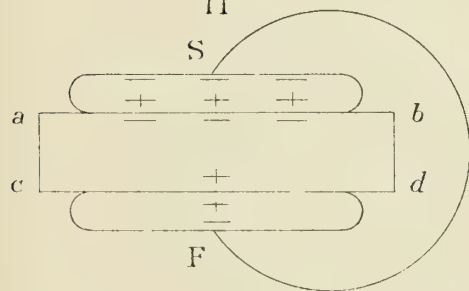
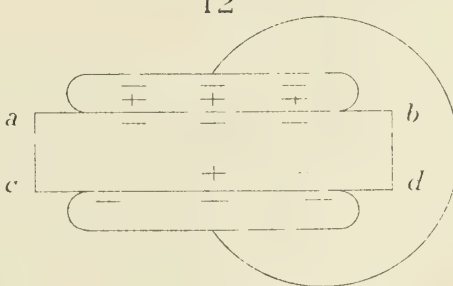
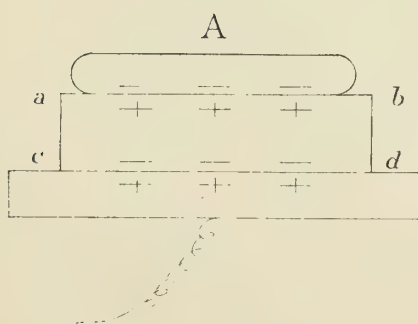
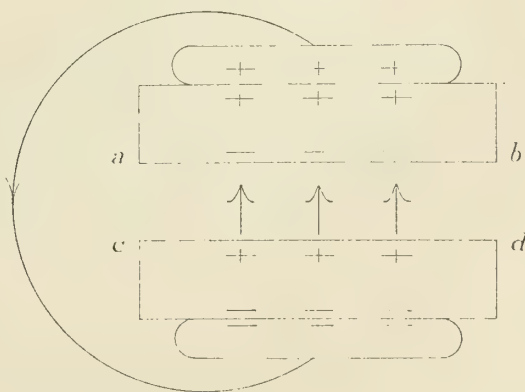
[1] Dopo la scarica del quadro le cariche dei vetri sono più complesse pei residui più o meno energici: ed io credo che questo punto della quistione sia degno di ulteriori ricerche.

tali da fare ritenere essersi prodotta nel momento della scarica una seconda corrente avvenuta in senso opposto alla precedente, cioè dall'armatura negativa alla positiva ([1]); quale corrente costituirebbe la seconda fase della pioggia di fuoco. Cosicchè può dirsi che il circuito, durante la carica e la scarica del quadro rimane come chiuso e completato attraverso del quadro istesso.

Questi due apparecchi inoltre, elettroforo cioè e condensatore presentano fra loro una grandissima analogia. Così un quadro di Franklin ad armature mobili caricato e quindi scaricato o no può egregiamente funzionare da elettroforo per lunghissimo tempo a cagione dell'elettricità penetrata nel vetro. Se si carica un quadro ad armature mobili, se ne allontani una dal coibente, e quindi dopo avere riunite ad un galvanometro entrambi le armature si avvicini rapidamente al coibente quella statane allontanata, il galvanometro accuserà una forte corrente, per l'elettricità indotta dal coibente nelle armature (scarica elettroforica) e per l'elettricità (al momento del contatto) comunicata alle medesime dal coibente istesso (scarica di condensatore). Per gli spostamenti successivi della stessa armatura le deviazioni galvanometriche saranno assai più deboli perchè dovute alle sole scariche indotte od elettroforiche.

Del pari se si batte vigorosamente una stiacciata da elettroforo, così da caricarla ad esuberanza, quindi si riuniscono al galvanometro la forma e lo scudo, e poi questo rapidamente si accosti e soprametta alla resina, il galvanometro devierà fortemente per la scarica indotta od elettroforica e per quella di comunicazione dell'eccesso dell'elettricità della resina (scarica di condensatore). Gli spostamenti successivi poi dello scudo producono deviazioni relativamente assai piccole, imperocchè sono solo dovute alle scariche elettroforiche, ossia di induzione. L'analogia adunque fra elettroforo e condensatore parmi assai manifesta potendo entrambi operare in modo identico.

([1]) Il mescuglio Lichtenberg fu in questo caso per la prima volta adoperato dal Bezold.

15
a
V1
V2
V3
V4
V5
d1
1
a
b
c
d
4
a
b
c
d
17
a
b
c
d
7
S
a
b
c
d
F
10
a
b
c
d
13
B
a
b
c
d

2
a
b
c
d
3
a
b
c
d
5
a
b
c
d
6
S
a
b
c
d
F
8
a
b
c
d
9
a
b
c
d
11
S
a
b
c
d
F
12
a
b
c
d
16
A
a
b
c
d
14
a
b
c
d

Determinazione grafica degli sforzi interni nelle travature reticolari con aste sovrabbondanti.

Memoria dell' ing. MICHELE GEBBIA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 marzo 1881.

(Con una tavola.)

---

1. Questa Memoria contiene: 1° alcuni teoremi nuovi appartenenti alla teoria delle figure reciproche della statica grafica; 2° un metodo di risoluzione grafica dei sistemi d'equazioni lineari; 3° alcuni cenni sulla possibilità di applicare le cose precedenti alla ricerca degli sforzi interni nelle travature reticolari con aste sovrabbondanti sottoposte a forze esterne note agenti sui loro vertici ed in equilibrio.

Teoremi fondamentali.

2. È noto che in una travatura reticolare avente k aste sovrabbondanti possono determinarsi forze interne, senza che forze esterne agiscano sui suoi vertici [1].

Il problema della ricerca di tali sforzi, volendo limitarsi alle condizioni che impone la statica, è indeterminato, cioè havvi un numero k volte infinito di sistemi di forze interne tutti compatibili con l'equilibrio.

Quando lo schema della travatura è tale che ammetta diagrammi reciproci, la forma di questi è k volte indeterminata, e questa indeterminazione riflette quella del problema statico.

3. Indichiamo con $\mathcal{F}$ uno schema di travatura reticolare avente k linee sovrabbondanti; con i un lato qualunque della stessa e con i' il corrispondente sforzo interno per una certa distribuzione di tali sforzi. Riguarderemo i' come positivo o negativo, secondo che rappresenti tensione o compressione.

Nel caso che la figura $\mathcal{F}$ ammetta reciproche, sia $\mathcal{F}'$ una di queste, ed in essa i' il lato corrispondente ad i. « Convenghiamo di riguardare la lunghezza i' come po-
« sitiva o negativa secondo che rappresenti tensione o compressione, e chiamiamo i
« segni relativi segni statici per distinguerli dai segni geometrici dei segmenti

[1] Queste forze interne si effettuano in una travatura elastica, quando, nel connettere successivamente le aste, si formi dapprima una figura strettamente indeformabile, che contenga tutti i vertici, e poi si aggiungano le aste sovrabbondanti, di ciascuna delle quali la lunghezza non sia precisamente uguale alla distanza fra i vertici che deve congiungere, ma ne differisca per quantità piccolissima e comparabile con le deformazioni elastiche. Allo stesso scopo si giungerebbe quando le aste, posteriormente aggiunte, avessero una temperatura alquanto diversa da quella delle precedenti, e dopo fatti i collegamenti si riducesse tutto il sistema alla medesima temperatura.

« di rette ». Dato il segno statico di un lato di $\mathfrak{F}'$ si possono facilmente dedurne tutti gli altri, percorrendo la figura, e tenendo presente la $\mathfrak{F}$, come ordinariamente si fa per la distinzione delle aste compresse o distese. È altronde evidente per l'omogeneità delle equazioni della statica che i segni statici dei lati di $\mathfrak{F}'$ possono tutti cambiarsi negli opposti, il che esprimeremo dicendo che la $\mathfrak{F}'$ è capace di due *opposte segnature.*

Segue da ciò che la segnatura statica d'una figura reciproca di un'altra è di carattere puramente geometrico, poichè, pur trovando corrispondenza in un fatto statico, non cessa pertanto di star da sè.

Per quanto segue ci occorre far notare la relazione che lega i segni statici coi segni geometrici dei segmenti di rette contati sugli stessi lati. Essa può formularsi così:

Si consideri un nodo N d'una figura ed il poligono corrispondente Π della reciproca. Affinchè i segni statici dei lati di Π coincidono coi segni geometrici dei segmenti ch' essi costituiscono sulle rette in cui giacciono, basta: 1° dirigere i sensi positivi dei lati di N dall'estremo N verso gli estremi opposti, (o viceversa); 2° dirigere i sensi positivi dei lati di Π come quelli dei loro paralleli di N; 3° contare le lunghezze dei lati di Π seguendo il senso ciclico corrispondente alle reazioni dei lati di N sul nodo, (od alle azioni del nodo sui lati).

4. Con le precedenti convenzioni enunciamo il seguente teorema:

« Se a, b, c, ... l sono le lunghezze dei lati d'uno schema di travatura $\mathfrak{F}$
« con linee sovrabbondanti ed a', b', c', ... l' è una serie di rispettivi sforzi in-
« terni in equilibrio, si ha identicamente:

$$aa' + bb' + cc' + \ldots\ldots + ll' = 0$$

Se la figura $\mathfrak{F}$ ammette una reciproca $\mathfrak{F}'$ questo teorema si traduce in una notevolissima proprietà metrica delle figure reciproche della statica grafica, che si può esprimere così:

« Se a, b, c, ... l sono le lunghezze dei lati d'una figura $\mathfrak{F}$ ed a', b', c' ..... l'
« i corrispondenti lati della reciproca, tenuto conto dei segni statici, si ha iden-
« ticamente:

$$aa' + bb' + cc' + \ldots\ldots + ll' = 0.$$

Dimostrazione. — Si portino a partire da ciascun nodo della figura $\mathfrak{F}$ i segmenti che rappresentano le reazioni dei lati che vi metton capo, e poi si faccian ruotare questi segmenti di 90° intorno ai rispettivi nodi nel senso negativo del piano. Allora le reazioni esercitate da ciascun membro sui suoi estremi si trasformeranno in una coppia di momento positivo o negativo, secondo che il lato sia disteso o compresso; quindi si avranno sulla figura $\mathfrak{F}$ applicate tante coppie, quanti sono i suoi lati, ed invero quella corrispondente al lato di lunghezza i avrà il momento ii. Or siccome le reazioni esercitate su ciascun nodo si fanno equilibrio, è nulla la risultante dei segmenti che li rappresentano, e rimane nulla anche dopo la rotazione. Laonde, la serie sopradetta di coppie è in equilibrio, epperò ha luogo l'equazione dei momenti, che si riduce a quella enunciata nel teorema.

5. Nel caso che esista la figura reciproca il nostro teorema è in sostanza una trasformazione di quell'altro ben noto:

« Riguardando come positiva o negativa l'area d'un poligono, secondo ch'essa « giaccia a sinistra o a destra, di chi ne percorre il contorno nell'ordine ciclico del « medesimo, la somma delle aree dei poligoni del diagramma $\mathcal{F}'$, che corrispondono « ai nodi della travatura, è uguale ed opposta all'area del poligono delle forze « esterne » [1].

Se non vi sono forze esterne, si può dire che il poligono di queste sia d'area nulla, poichè si possono riguardare come tali le reazioni dei lati sovrabbondanti sui rispettivi nodi, onde il teorema citato si modifica così:

« Riguardata come positiva o negativa l'area d'un poligono, secondo ch'essa « giaccia a sinistra o a destra di chi ne percorre il contorno nell'ordine ciclico del « medesimo, la somma delle aree dei poligoni d'un diagramma $\mathcal{F}'$ corrispondenti ai « nodi del diagramma reciproco $\mathcal{F}$ è nulla ».

Ciò posto si faccia ruotare il diagramma $\mathcal{F}'$ di 90° nel senso positivo del piano, sicchè i suoi lati riusciranno perpendicolari ai corrispondenti del diagramma $\mathcal{F}$ (fig. 1). Sia nella nuova posizione $AB = i$ un lato qualunque di $\mathcal{F}$, $MN = i'$ il lato corrispondente di $\mathcal{F}'$, e supponghiamo che prima della rotazione il senso MN concordi col senso AB. L'area di un poligono qualunque di $\mathcal{F}'$ si può riguardare come generata da un raggio vettore avente un estremo fisso sul nodo corrispondente di $\mathcal{F}$, e l'altro moventesi sul suo contorno, secondo l'ordine ciclico di questo; quindi è uguale alla somma di una serie di triangoli aventi per basi i lati del poligono, e per vertice comune il nodo di $\mathcal{F}$. Perciò la somma dei poligoni di $\mathcal{F}'$ è uguale alla somma di tante coppie di triangoli analoghi a quelli che han per base comune MN e per vertici A e B quanti sono i lati della travatura. I sensi ciclici di questi due triangoli son tali che il lato MN vi riesca percorso in sensi opposti, e si può esprimere con $\pm(AMN + BNM)$. È poi facile convincersi che vale il segno $+$ o il $-$ secondo che il lato AB sia disteso o compresso. Or si ha

$$\pm(AMN + BNM) = \pm(AMN + NMB) = \pm AMBN$$
$$= \frac{\pm MN \times AB}{2} = \frac{i i'}{2}.$$

6. Quando lo schema di travatura $\mathcal{F}$ ha una sola linea sovrabbondante le forze interne in equilibrio a', b', c', ... l' possono solo variare proporzionalmente.

La figura reciproca in tal caso è sempre possibile e determinata di forma, mentre la sua variabilità di grandezza rappresenta la variabilità proporzionale degli sforzi interni in equilibrio.

In questo caso fra le lunghezze a, b, c, ... l dei lati della figura $\mathcal{F}$ ha luogo una relazione.

$$F\,(a, b, c, \ldots\ldots l) = 0.$$

Siccome la funzione F è sempre omogenea, perchè geometrica, l'equazione precedente può scriversi:

$$\frac{\partial F}{\partial a} a + \frac{\partial F}{\partial b} b + \frac{\partial F}{\partial c} c + \ldots + \frac{\partial F}{\partial l} l = 0,$$

[1] V. Cremona, *Le figure reciproche nella Statica grafica* 1872 n. 33 ove l'autore riguarda questo teorema già dimostrato da Maxwell come una conseguenza del teorema: « La somma delle projezioni delle facce d'un poliedro è uguale a zero ».

Questa equazione coesiste con quella che fornisce il teorema del numero precedente, e siccome fra le lunghezze a, b, c, ... l non può aver luogo più d'una relazione distinta, si ha la proporzione

$$\frac{\partial F}{\partial a} : \frac{\partial F}{\partial b} : \frac{\partial F}{\partial c} : \ldots\ldots : \frac{\partial F}{\partial l} = a' : b' : c : \ldots\ldots : l'$$

la quale contiene il teorema:

« Se $F = 0$ è la relazione che ha luogo fra le lunghezze dei lati di una figura « con una sola linea sovrabbondante, le derivate parziali della funzione F rispetto « alle lunghezze stanno come i lati corrispondenti della figura reciproca, tenuto conto « dei segni statici ».

7. In questo e nei due numeri seguenti dimostreremo direttamente, sebbene non generalmente, questo teorema, ch' è un' altra forma di quello espresso al numero precedente:

« Il rapporto differenziale parziale fra le lunghezze di due lati di una figura « con una linea sovrabbondante è uguale al rapporto inverso dei lati corrispon- « denti della reciproca preso col segno —, e tenuto conto dei segni statici ».

Siano $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$, (fig. 2) tre segmenti rettilinei che congiungono tre punti A, B, C ad un quarto punto M del loro piano. Supposti fissi i punti A, B, C, e date due delle lunghezze a, b, c, è determinata la posizione di M e la terza lunghezza, laonde questa è una funzione determinata delle due prime, e son determinati i rapporti differenziali parziali fra due qualunque di esse. Per trovare quello di a rispetto a b si operi come segue: Si conduca per M la perpendicolare c_1 alla retta c e su di essa si prenda un punto M_1 infinitamente vicino ad M e lo si congiunga ai punti A, B, C. Siccome il tratto MM_1 di c_1 si confonde con l'arco di circolo di centro C e raggio CM, possiamo riguardare M_1 come nuova posizione di M, per cui la lunghezza c sia rimasta invariata. Si conducano per M_1 le perpendicolari a_1, b_1, alle a, b, e siano P e Q i punti d'intersezione aa_1 e bb_1. Siccome i tratti M_1P ed M_1Q delle a_1, b_1 si confondono con archi di circolo di centri A e B e raggi AM_1 e BM_1, ne risulta $\partial a = MP$, $\partial b = MQ$. Affinchè questi segmenti siano positivi se rappresentano aumenti della lunghezza a, b, si prendano come sensi positivi delle rette a, b, i sensi AM, BM. Ora i triangoli rettangoli MPM_1, MQM_1 danno:

$$\partial a = MP = MM_1 \cos (c_1 a)$$
$$\partial b = MQ = MM_1 \cos (c_1 b)$$

e si ha inoltre

$$(c_1 a) = (c a) - (c c_1)$$
$$(c_1 b) = (c b) - (c c_1)$$

per cui

$$\cos (c_1 a) = \cos (c a) \cos (c c_1) + \operatorname{sen} (c a) \operatorname{sen} (c c_1)$$
$$\cos (c_1 b) = \cos (c b) \cos (c c_1) + \operatorname{sen} (c b) \operatorname{sen} (c c_1),$$

le quali, essendo $\cos (c c_1) = 0$, $\operatorname{sen} (c c_1) = \pm 1$, diventano

$$\cos (c_1 a) = \pm \operatorname{sen} (c a), \quad \cos (c_1 b) = \pm \operatorname{sen} (c b)$$

ove i segni $+$ o $-$ dipendono dai sensi positivi delle c, c_1 e dal senso positivo del piano. Sostituendo, si ottiene quindi:

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\operatorname{sen}(c\,a)}{\operatorname{sen}(c\,b)}.$$

Ciò posto, si costruisca il triangolo $a'b'c'$ reciproco del nodo M, e si prendano i sensi positivi de' suoi lati concordanti coi sensi positivi scelti sulle loro parallele di M, onde si avrà:

$$\operatorname{sen}(c\,a) = \operatorname{sen}(c'\,a') \qquad \operatorname{sen}(c\,b) = \operatorname{sen}(c'\,b').$$

Inoltre si contino con le lunghezze a', b' seguendo uno dei sensi ciclici del triangolo che si supponga corrispondere ad azioni del nodo M sui lati a, b. Con questa questo triangolo percorsi seguendo il senso ciclico; con che questi saran positivi o statici (n. 3). Dal sudetto triangolo si ottiene quindi:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\operatorname{sen}(b'\,c')}{\operatorname{sen}(c'\,a')} = - \frac{\operatorname{sen}(c'\,b')}{\operatorname{sen}(c'\,a')}$$

e, per le eguaglianze precedenti ne risulta:

$$\frac{\partial a}{\partial b} = - \frac{b'}{a'}$$

la quale esprime il teorema enunciato per questo caso di travatura, ch'è il più semplice.

8. **Lemma.** Siano $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ n variabili legate da una equazione

$$F(a_1, a_2, \ldots . a_n) = 0$$

la quale ne determina ciascuna in funzione di tutte le altre, e differenziata convenientemente può fornire la derivata parziale di una rispetto ad un'altra qualunque.

Considerando tre, fra queste variabili, a_p, a_q, a_r prese due a due, le derivate parziali son fornite dalle equazioni.

$$\frac{\partial F}{\partial a_q} + \frac{\partial F}{\partial a_p}\frac{\partial a_p}{\partial a_q} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_q}\frac{\partial a_q}{\partial a_r} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_p}\frac{\partial a_p}{\partial a_r} =$$

le quali, dovendo simultaneamente sussistere fra le tre derivate della funzione F, dan luogo all'altra:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_p}{\partial a_q} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial a_q}{\partial a_r} & 1 \\ \frac{\partial a_p}{\partial a_r} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial a_p}{\partial a_r} = - \frac{\partial a_p}{\partial a_q}\frac{\partial a_q}{\partial a_r}$$

Se ordinando in un certo modo le variabili, siano comunque note le derivate parziali di ognuna rispetto alla seguente, l'applicazione successiva di cotesta equazione permette di formare la derivata parziale di una rispetto ad un'altra qualsiasi; ed invero, se $a_h, a_{h+1}, \ldots a_{k-1}, a_k$ è un ordine siffatto, si ha:

$$\frac{\partial a_h}{\partial a_k} = (-1)^{k-h+1} \frac{\partial a_h}{\partial a_{h+1}} \cdot \frac{\partial a_{h+1}}{\partial a_{h+2}} \cdots \frac{\partial a_{k-1}}{\partial a_k}.$$

Questa formola permette di estendere il teorema enunciato, al numero precedente, al caso di una travatura formata da un poligono chiuso i cui vertici siano congiunti ad un punto del piano. Infatti in una tal figura ogni lato fa parte di un nodo trilatero, il cui vertice è uno di quelli del poligono contorno. Se dalla travatura si sopprime un nodo trilatero, i lati rimanenti formano una figura strettamente indeformabile; quindi i tre lati del nodo soppresso congiungono tre punti fissi (solidali) ad un quarto punto del piano: epperò si può ad essi applicare il teorema già dimostrato al numero precedente.

Ciò posto, per ottenere il rapporto differenziale parziale fra due lati, a_h, a_k si passi dall'uno all'altro, percorrendo una serie di lati $a_{h+1}, a_{h+2} \ldots\ldots a_{k-1}$ del poligono contorno, di modo che

$$a_h,\ a_{h+1},\ a_{h+2},\ \ldots\ldots\ldots\ a_{k-1},\ a_k$$

sarà una serie continua di lati dei quali due consecutivi appartengono ad uno stesso nodo trilatero. Se a_i, a_{i+1} sono due lati consecutivi di questa serie, ed a'_i, a'_{i+1} i lati corrispondenti della figura reciproca, si ha quindi:

$$\frac{\partial a_i}{\partial a_{i+1}} = - \frac{a'_{i+1}}{a'_i}.$$

Riunendo questa formola con la precedente, ne risulta:

$$\frac{\partial a_h}{\partial a_k} = (-1)^{k-h+1} \cdot (-1)^{k-h} \frac{a'_{h+1}}{a'_h} \cdot \frac{a'_{h+2}}{a'_{h+1}} \cdots \frac{a'_k}{a'_{k-1}}$$

cioè

$$\frac{\partial a_h}{\partial a_k} = - \frac{a'_k}{a'_h}$$

che contiene il teorema enunciato.

9. Chiamiamo rete triangolare una figura composta di una serie di triangoli talmente addossati, che ognuno abbia un lato comune col suo precedente, ed un altro col seguente, mentre il terzo lato che chiameremo *lato libero*, non sia comune con nessun altro triangolo.

Le figure siffatte sono strettamente indeformabili; ma se i vertici estremi, cioè quelli formati dai lati liberi dei due triangoli estremi, si congiungono mediante un *lato di chiusura*, ne deriva una figura con una sola linea sovrabbondante, che diremo *rete triangolare chiusa*. Il tipo più semplice di tali figure è il quadrangolo completo. Ad esse vogliamo estendere la dimostrazione del teorema enunciato al n. 7 ed all' uopo ci occorre far notare le seguenti proprietà di queste figure e delle loro reciproche:

1° I lati liberi di tutti i triangoli formano un poligono chiuso, ch' è il contorno della rete, il quale è diviso in due poligoni chiusi dal lato di chiusura. Questi

ultimi, ed i triangoli della rete costituiscono tutti i poligoni chiusi ai quali corrispondono nodi nella figura reciproca.

2° In una rete triangolare chiusa vi sono almeno due coppie di triangoli successivi, in ciascuna delle quali i lati liberi dei due triangoli, insieme col lato comune formano un nodo trilatero. Infatti se i lati liberi di due triangoli successivi appartengono ad uno stesso nodo, a questo non appartiene altro lato, che quello comune ai due triangoli, ond' esso è trilatero.

Dippiù, se ad un nodo, cui appartiene il lato libero di un triangolo, non appartiene quello di uno dei contigui, esso è più che trilatero. Tanti son dunque i nodi trilateri quante le coppie di triangoli contigui, i cui lati liberi appartengono ad uno stesso nodo. Adunque, se pur tutte le coppie intermedie di triangoli contigui non soddisfano a questa condizione, vi soddisfaranno almeno le due coppie estreme, perocchè, avendo ognuno dei triangoli estremi due lati liberi, uno di questi forma un nodo col lato libero del triangolo contiguo. La fig. 3ª dà un esempio di rete triangolare chiusa, la quale contiene più che due nodi trilateri così fatti, mentre nell'esempio della fig. 4ª ve n'ha due. soli.

Sia f' una rete triangolare chiusa di n triangoli (fig. 5ª a), nella quale non si riguardi il lato tratteggiato α), $c\ a\ e$ un suo nodo trilatero formato dai lati liberi c, e di due triangoli col lato comune a. Nella reciproca f' (fig. 5ª b)) si ha un triangolo $c'\ a'\ e'$ corrispondente al nodo $c\ a\ e$. Le due coppie di lati c', a' formano rispettivamente con b', d' due nodi trilateri B, E corrispondenti ai triangoli $a\,b\,c$, $a\,d\,e$ della rete. Siano C il secondo nodo di cui fa parte b' e D il secondo nodo di cui fa parte d'. Il poligono C B E D ..... C, cioè $b'\,a'\,d'$ .... corrisponde al nodo $b\,a\,d$ .... Finalmente i due lati c', e' fan parte di un nodo F, corrispondente al poligono cui appartengono i lati liberi c, e della rete.

Ciò posto, soppresso dalla figura f il nodo trilatero $c\ a\ e$, e chiuso con un lato α il triangolo $b\ d\ \alpha$, si sarà derivata dalla f un' altra rete chiusa f_1 avente un triangolo di meno, e d'altra parte si sarà formato il quadrangolo completo $b\ c\ e\ d\ a\ \alpha$, ch' è pure una rete triangolare chiusa f_2. La figura f_1 ha i suoi nodi comuni con la f, tranne i tre $b\,d$..., $b\,c$...., $d\,e$.., nel primo dei quali, per passare dalla f alla f_1 si deve sopprimere a, nel secondo sopprimere c ed aggiungere α, e nel terzo sopprimere e ed aggiungere anche α. Adunque una parte della figura f' si può riguardare come parte della f'_1 reciproca di f_1, e per completare la f'_1 basta sopprimere il lato a' dal poligono $b'\,a'\,d'$ .... cioè costruire il punto d'intersezione A delle rette C B, D E, onde il poligono corrispondente al nodo $b\,d$... di f_1 sarà C A D .... C. Dopo ciò la congiungente A F sarà il lato α' corrispondente ad α, che completerà la figura. D'altra parte il quadrangolo completo A B E F è manifestamente la figura f'_2 reciproca di f_2, ed in essa il triangolo B A E corrisponde al nodo $b\,d$...

Da quanto precede risulta che dalla rete triangolare f di n triangoli, sopprimendo un nodo trilatero ed aggiungendo un lato, si derivano le due altre f_1, f_2 aventi rispettivamente $n-1$ e 2 triangoli.

Le due figure reciproche f'_1, f'_2 han comuni con la f' i lati omonimi tranne quelli che corrispondono ai lati b, d comuni alle tre figure f, f_1, f_2, i quali son dati dai segmenti intercetti da due terne di punti A B C, A D E.

Daremo alle lettere rappresentanti i lati gl'indici inferiori 1, o 2 considerandoli come appartenenti alle f_1, f'_1, ovvero alle f_2, f'_2.

Si diano segnature qualunque alle tre figure $f', f'_1 f'_2$, per es. quelle per cui i sensi ciclici dei poligoni corrispondenti a nodi $b\,d\ldots$ delle f, f_1, f_2 siano:

$$\text{CBED}\ldots\text{C},\ \text{CAD}\ldots\text{C},\ \text{BAEB}.$$

tutti e tre rispondenti ad azioni o tutti e tre a reazioni sui nodi. Con queste segnature avverrà che:

1° I lati α'_1, α'_2 corrispondenti ad α nelle figure f_1, f_2 avranno lo stesso segno statico cioè:

$$\alpha'_1 = \alpha'_2$$

2° Due lati per intero comuni alle $f'\ f'_1$ avranno lo stesso segno statico, cioè, se $h'\ h'_1$ sono corrispondenti di un lato h comune alle f, f_1 sarà:

$$h'_1 = h'$$

3° Due lati per intero comuni alle f', f'_2 avranno segni statici opposti; tali sono i soli lati corrispondenti a quelli c, a, e del nodo soppresso, e si ha p. e.

$$a'_2 = -a'$$

4° I segni statici dei lati corrispondenti alle b, d nelle tre figure saranno paragonabili come i segni dei segmenti intercetti dalle terne di punti ABC, ADE percorsi secondo i sensi ciclici sudetti, cioè sarà:

$$b' = \pm \text{CB},\quad b'_1 = \pm \text{CA},\quad b'_2 = \pm \text{BA}$$
$$d' = \pm \text{ED},\quad d'_1 = \pm \text{AD},\quad d'_2 = \pm \text{AE}$$

onde segue che:

$$b' = b'_1 - b'_2$$
$$d' = d'_1 - d'_2$$

Ciò posto dimostreremo che, se il teorema del num. 7 è vero per le figure f_1, f_2, sarà vero per la f, ed è evidente che basta farlo

1° pei lati b, d;

2° per uno dei lati b, d ed un altro h comune alle f, f_1;

3° per uno dei lati b, d ed un altro a comune alle f, f_2;

4° pei due lati h, a.

Tra le lunghezze dei lati di ciascuna delle figure f, f_1, f_2 ha luogo una relazione. Segniamo la prima con

$$\text{F}\ (b, d, h, a) = 0$$

e le altre due con

$$\alpha = \alpha_1 = \text{F}_1\,(b, d, h),\quad \alpha = \alpha_2 = \text{F}_2\,(b, d, a)$$

Eliminando α fra le due ultime, dee ottenersi la prima, laonde $\text{F} = \alpha_1 - \alpha_2$ epperò:

$$\frac{\partial b}{\partial d} = -\frac{\dfrac{\partial \text{F}}{\partial d}}{\dfrac{\partial \text{F}}{\partial b}} = -\frac{\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial d} - \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial d}}{\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial b} - \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial b}}.$$

Ma è per ipotesi

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial b} = -\frac{b'_1}{\alpha'_1}, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial b} = -\frac{b'_2}{\alpha'_2}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial d} = -\frac{d'_1}{\alpha'_1}, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial d} = -\frac{d'_2}{\alpha'_2}$$

onde per le eguaglianze precedenti:

$$\frac{\partial b}{\partial d} = -\frac{d'_1 - d'_2}{b'_1 - b'_2} = -\frac{d'}{b'}$$

Procedendo analogamente e per essere.

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial h} = 0, \text{ si ha:}$$

$$\frac{\partial b}{\partial h} = -\frac{h'_1}{b'_1 - b'_2} = -\frac{h'}{b'}; \quad \frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{-a'_2}{b'_1 - b'_2} = -\frac{a'}{b'}.$$

Finalmente per il lemma del n. 8:

$$\frac{\partial h}{\partial a} = -\frac{\partial h}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{b'}{h'}\cdot\frac{a'}{b'} = -\frac{a'}{h'}.$$

È facile intendere che agli stessi risultati si arriverebbe per altre combinazioni di segnature delle $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'_1, \mathfrak{f}'_2$.

Siccome il teorema è stato dimostrato per una rete di due triangoli al numero precedente, esso rimane dimostrato per qualunque rete triangolare chiusa.

Risoluzione grafica dei sistemi d'equazioni lineari.

10. Il metodo grafico che qui propongo per risolvere i sistemi d'equazioni lineari, diverso dagli altri finora conosciuti, è essenzialmente di *falsa posizione*. Si abbia il sistema d'equazioni lineari:

$$\Sigma\, a_{1i}\, x_i = k_1, \quad \Sigma\, a_{2i}\, x_i = k_2, \ldots \quad \Sigma\, a_{ni}\, x_i = k_n \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Diansi alle x_i n sistemi di valori $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)} \ldots \alpha_i^{(n)}$ che soddisfino alla prima equazione, ma non alle rimanenti, che anzi sostituiti per le x_i in queste ultime diano ai loro primi membri i valori

$$h_2^{(1)}, \ldots h_n^{(1)}; \; h_2^{(2)}, \ldots h_n^{(2)}; \; h_2^{(n)}, \ldots h_n^{(n)},$$

in generale diversi dalle $k_2 \ldots k_n$.

Si avranno le n^2 identità:

$$\Sigma a_{1i}\, \alpha_i^{(1)} = k_1, \quad \Sigma a_{2i}\, \alpha_i^{(1)} = h_2^{(1)}, \ldots \Sigma a_{ni}\, \alpha_i^{(1)} = h_n^{(1)}$$
$$\Sigma a_{1i}\, \alpha_i^{(2)} = k_1, \quad \Sigma a_{2i}\, \alpha_i^{(2)} = h_2^{(2)}, \ldots \Sigma a_{ni}\, \alpha_i^{(2)} = h_n^{(2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma a_{1i}\, \alpha_i^{(n)} = k_1, \quad \Sigma a_{2i}\, \alpha_i^{(n)} = h_2^{(n)} \ldots \Sigma a_{ni}\, \alpha_i^{(n)} = h_n^{(n)}.$$

Ora si riferiscono ad un sistema d'assi rettilenei, ortogonali o no, n rette obbligate a passare pei punti di coordinate

$$(\alpha_i^{(1)}, h_2^{(1)}), \qquad (\alpha_i^{(2)}, h_2^{(2)}).$$

Segnando in generale con y, z le coordinate correnti di queste, le loro equazioni saranno.

$$\frac{y-\alpha_i^{(1)}}{y-\alpha_i^{(2)}}=\frac{z-h_2^{(1)}}{z-h_2^{(2)}}$$

su queste rette si determinino i punti di ordinata k_2, le cui ascisse $\beta_i^{(2)}$ hanno l'espressione:

$$\beta_i^{(2)}=\frac{\alpha_i^{(1)}(k_2-h_2^{(2)})-\alpha_i^{(2)}(k_2-h_2^{(1)})}{h_2^{(1)}-h_2^{(2)}}.$$

Il sistema delle $\beta_i^{(2)}$ soddisfa alle due prime equazioni date, infatti si ha:

$$\Sigma a_{1i}\beta_i^{(2)}=\frac{k_1(k_2-h_2^{(2)})-k_1(k_2-h_2^{(1)})}{h_2^{(1)}-h_2^{(2)}}=k_1,$$

$$\Sigma a_{2i}\beta_i^{(2)}=\frac{h_2^{(1)}(k_2-h_2^{(2)})-h_2^{(2)}(k_2-h_2^{(1)})}{h_2^{(1)}-h_2^{(2)}}=k_2,$$

ma non soddisfa in generale alle rimanenti $n-2$, che anzi sostituito nei primi membri di queste, rende i lor valori:

$$\Sigma a_{3i}\beta_i^{(2)}=\frac{h_3^{(1)}(k_2-h_2^{(2)})-h_3^{(2)}(k_2-h_2^{(1)})}{h_2^{(1)}-h_2^{(2)}}=l_3^{(2)}$$

. . . .

. . . .

$$\Sigma a_{ni}\beta_i^{(2)}=\frac{h_n^{(1)}(k_2-h_2^{(2)})-h_n^{(2)}(k_2-h_2^{(2)})}{h_2^{(1)}-h_2^{(2)}}=l_n^{(2)},$$

in generale diversi dalle $k_3 \ldots\ldots k_n$. Per determinare le $l_3^{(2)}, \ldots\ldots l_n^{(2)}$ si osservi che le loro espressioni non son altro, che quelle stesse che danno le $\beta_i^{(2)}$, ove, invece delle $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}$, si sian poste rispettivamente $h_3^{(1)}, h_3^{(2)}; \ldots; h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$. Basta quindi costruire rette passanti pei punti di coordinate:

$$(h_3^{(1)},\ h_2^{(1)}),\quad (h_3^{(2)},\ h_2^{(2)});\ldots;(h_n^{(1)},\ h_2^{(1)}),\quad (h_n^{(2)},\ h_2^{(2)})$$

e su queste determinare i punti di ordinata k_2, le cui ascisse saranno le $l_3^{(2)}, \ldots\ldots l_n^{(2)}$.

Analogamente facendo uso del secondo e terzo dei sistemi α_i, si determini un secondo sistema $\beta_i^{(3)}$, che soddisfi alle due prime equazioni, mentre renderà i valori $l_3^{(3)}, \ldots\ldots l_n^{(3)}$ dei primi membri delle rimanenti in generale diversi dalle $k_3, \ldots\ldots k_n$. Le $\beta_i^{(3)}$ si otterranno costruendo rette passanti pei punti di coordinate

$$(\alpha_i^{(2)},\ h_2^{(2)}),\quad (\alpha_i^{(3)},\ h_2^{(3)})$$

e le $l_3^{(2)}, \ldots\ldots l_n^{(2)}$ mediante rette passanti pei punti

$$(h_3^{(2)},\ h_2^{(2)})\ (h_3^{(3)},\ h_2^{(3)});\ldots\ldots;(h_n^{(2)}\ h_2^{(2)})\ (h_n^{(3)},\ h_2^{(3)})$$

e prendendo le ascisse dei punti di ordinata k_2 giacenti su queste rette.

Lo stesso processo si applicherà successivamente al terzo e quarto dei sistemi α_i, ecc., e finalmente all'$(n-1)^o$ ed all'n^o. In generale applicandolo ai sistemi $\alpha_i^{(j-1)}$, $\alpha_i^{(j)}$ si otterrà il sistema delle $\beta_i^{(j)}$ costruendo rette passanti pei punti

$$(\alpha_i^{(j-1)},\ h_2^{(j-1)})\ (\alpha_i^{(j)},\ h_2^{(j)})$$

ed i valori che prendono i primi membri delle $n-2$ ultime equazioni, sostituendovi

per le x le $\beta_i^{(j)}$, cioè le $l_3^{(j)}, \ldots\ldots l_n^{(j)}$, si avranno nelle ascisse dei punti, che sulle rette

$$(h_3^{(j-1)},\ h_2^{(j-1)})\ (h_3^{(j)},\ h_2^{(j)});\ldots ;(h_n^{(j-1)},\ h_2^{(j-1)})\ (h_n^{(j)},\ h_2^{(j)})$$

hanno l'ordinata k_2.

Il processo descritto fornisce $n-1$ sistemi $\beta_i^{(2)}, \ldots\ldots \beta_i^{(n)}$ che soddisfano alle due prime equazioni date, ma non alle rimanenti; che anzi danno ai primi membri di questi i valori

$$l_3^{(2)}, \ldots . l_n^{(2)}; \ldots ; l_3^{(n)}, \ldots . l_n^{(n)}.$$

Su questi sistemi β si operi come sui sistemi α, cioè si determini un sistema di $n-1$ rette passanti pei punti:

$$(\beta_i^{(j-1)},\ l_3^{(j-1)})\ (\beta_i^{(j)},\ l_3^{(j)})$$

pei valori $j=2, 3, \ldots\ldots n$.

Le ascisse $\gamma_i^{(j)}$ dei punti di queste rette aventi l'ordinata k_3 hanno la espressione.

$$\gamma_i^{(j)} = \frac{\beta_i^{(j)}(k_3 - l_3^{(j)}) - \beta_i^{(j)}(k_3 - l_3^{(j-1)})}{l_3^{(j-1)} - l_3^{(j)}}$$

ed il sistema delle $\gamma_i^{(j)}$ soddisfa alle tre prime equazioni perchè si ha:

$$\Sigma a_{1i}\,\gamma_i^{(j)} = k_1,\quad \Sigma a_{2i}\,\gamma_i^{(j)} = k_2,\quad \Sigma a_{3i}\,\gamma_i^{(j)} = k_3\,;$$

ma non soddisfa in generale alle rimanenti, ai cui primi membri dà i valori $m_4^{(j)}, \ldots\ldots m_n^{(j)}$ in generale diversi dalle $k_4, \ldots . k_n$, sicchè si hanno le identità:

$$\Sigma a_{4i}\,\gamma_i^{(j)} = m_4^{(j)}, \ldots\ldots \Sigma a_{ni}\,\gamma_i^{(j)} = m_n^{(j)}.$$

Le $m^{(j)}$ si ottengono nelle ascisse dei punti di ordinata k_3 posti sulle rette:

$$(l_4^{(j-1)},\ l_3^{(j-1)}),\ (l_4^{(j)},\ l_3^{(j)});\ldots ;(l_n^{(j-1)},\ l_3^{(j-1)}),\ (l_n^{(j)},\ l_3^{(j)}).$$

Così continuando si perviene ad un sistema $\theta_i^{(n)}$ che soddisfa a tutte le equazioni, e che è il sistema di valori delle x_i risolvente le equazioni proposte.

Per condurre le operazioni grafiche bisogna anzitutto porre sul quadro gli n sistemi di segmenti $\alpha_i^{(j)}$. Per ciascuno di questi, assunti arbitrariamente $n-1$ segmenti $\alpha_1^{(j)}, \ldots . \alpha^{(j)}_{n-1}$, rimane a costruire il rimanente, ch' è determinato dalla formola:

$$\alpha_n^{(j)} = \frac{h_1 - a_{11}\,\alpha_1^{(j)} - a_{12}\,\alpha_2^{(j)} \ldots\ldots - a_{1,n-1}\,\alpha^{(j)}_{n-1}}{a_{1n}}$$

e che può quindi ottenersi costruendo un poligono di riduzione sommatorio [1].

Dopo ciò si continuerà con la costruzione di sole rette, d'ognuna delle quali son noti due punti mediante le loro coordinate, e di queste conviene prima farsi un quadro.

La prima parte della costruzione è molto semplificata prendendo i segmenti arbitrarî tutti eguali. Uno dei modi più semplici di operare si è quello di porre $\alpha_i^{(j)} = 0$ per $j \gtrless i$, e quindi $\alpha_i^{(j)} = \dfrac{k_1}{a_{1\,i}}$ per $j = i$; così la costruzione dei poligoni sommatorî è sostituita da quella di n coppie di triangoli simili.

[1] V. Cremona, *Elementi di calcolo grafico n.* 63.

Applicazione alla determinazione grafica degli sforzi interni nelle travature reticolari.

11. Il sig. Maurizio Levy in una Memoria dal titolo: *Sur la recherche des tentions dans les systèmes de barres* pubblicata in fine del suo trattato: *La statique graphique et ses applications aux constructions* tratta la quistione delle travature reticolari con aste sovrabbondanti, ponendo le equazioni che in ogni caso risolvono il problema della ricerca degli sforzi interni.

Il suo metodo è in breve il seguente. Siano $a_1, a_2, \ldots a_m$ le lunghezze degli m lati che formano lo schema della travatura, e fra questi ve ne siano k sovrabbondanti. La statica fornisce $m-k$ equazioni.

Inoltre fra le m lunghezze $a_1, \ldots . . a_m$ si hanno k equazioni distinte, delle quali una qualunque si segni con

$$F(a_1, \ldots . a_m) = 0$$

Ognuna di queste fornisce una nuova equazione fra le tensioni della forma

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial a_i} a_i \frac{t_i}{e_i \omega_i} = 0$$

in cui t_i, e_i, ω_i significano rispettivamente la tensione, il coefficiente d'elasticità e la sezione dell'asta di lunghezza a_i. Tali sono le k equazioni complementari, che insieme a quelle fornite dalla statica determinano le tensioni t_i.

Mostreremo come il teorema enunciato al n. 6, insieme col metodo esposto al n. 10, permettano di compiere questa determinazione graficamente.

12. Dato lo schema $\mathfrak{F}$ della travatura formata di m lati, k dei quali sovrabbondanti, si considerino separatamente certe $m-k$ di questi, tali che, determinando tutti i vertici, formino una figura strettamente indeformabile Φ.

Ciascuna delle k linee rimanenti congiunge due vertici della Φ, e questi son resi solidali mediante un certo numero di lati della stessa, i quali formano di per sè una figura strettamente indeformabile φ. Le figure φ sono in generale parte della Φ, sebbene alcuna possa essere la Φ stessa.

Ciascuna figura φ insieme con la relativa linea sovrabbondante forma una figura con una sola linea sovrabbondante $\mathfrak{f}$. In questo modo si potranno sempre dallo schema $\mathfrak{F}$ astrarre k figure parziali distinte, ciascuna delle quali abbia un sol lato sovrabbondante.

13. Ciò posto le k equazioni citate al n. 11 si possono stabilire partendosi dalle k equazioni del tipo $F=0$ relative alle k figure $\mathfrak{f}$, e siccome ognuna di queste ammette una sola linea sovrabbondante ai coefficienti $\frac{dF}{da_i}$ si possono sostituire le lunghezze dei lati della figura reciproca $\mathfrak{f}'$ (n. 6). Cosìfacendo il tipo delle k equazioni complementari diventa:

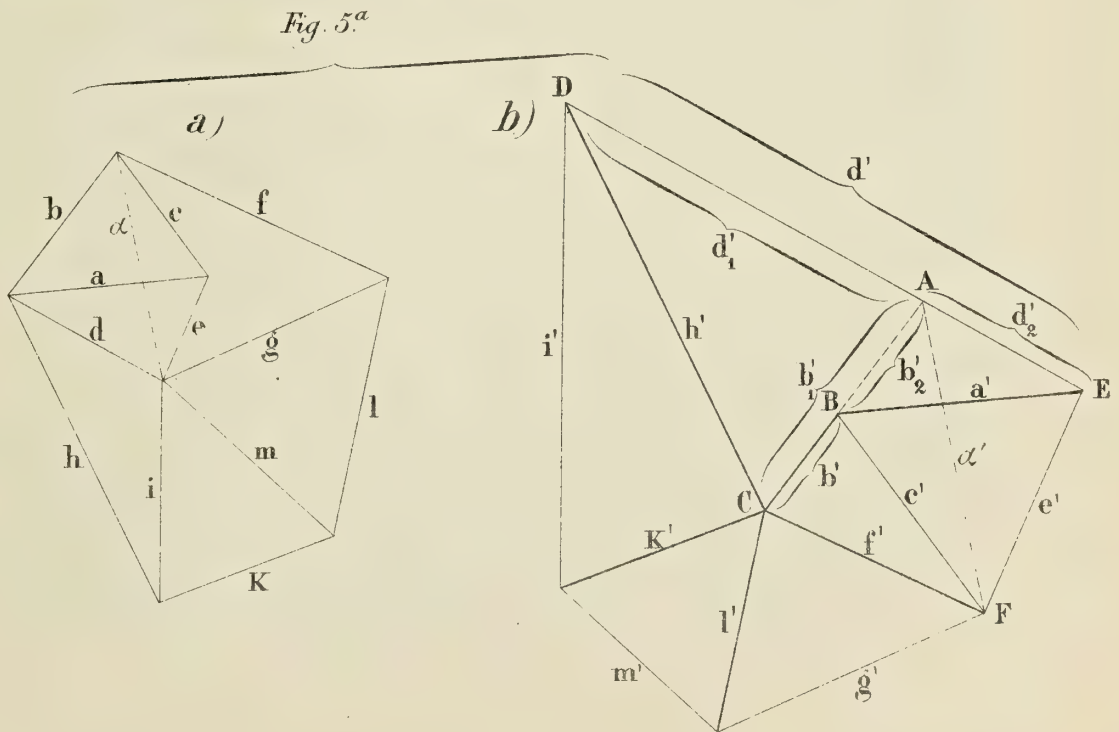
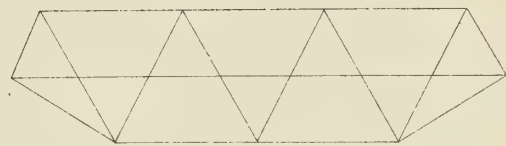
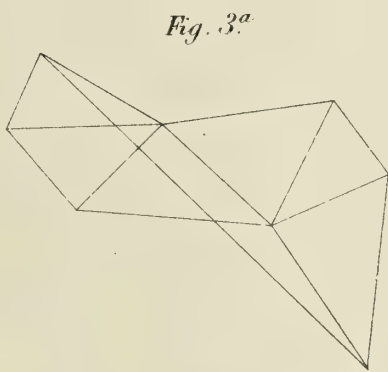
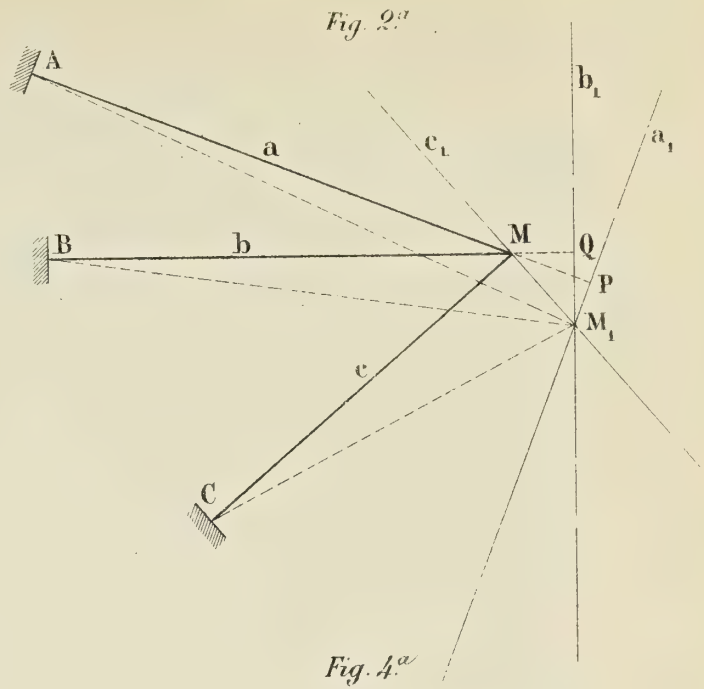
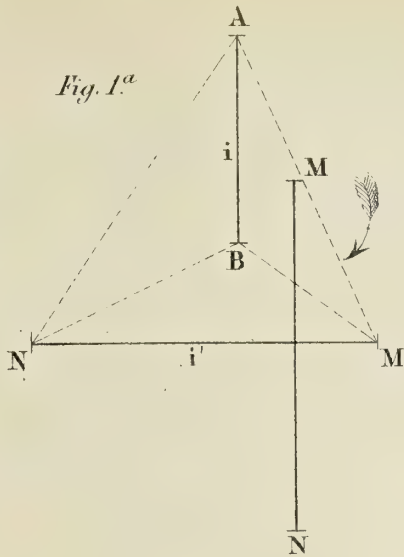
$$\Sigma \frac{a_i a'_j t_i}{e_i \omega_i} = 0,$$

ove per a'_i s'intende il lato di $\mathfrak{f}'$ corrispondente al lato a_i di $\mathfrak{f}$, tenuto conto del suo segno statico.

La costruzione delle figure reciproche f' può farsi separatamente, ma è da notare la possibilità di riunirle in unico diagramma, che sarebbe una delle figure *derivate* di quella costituita dallo schema $\mathfrak{F}$ ([1]).

14. Dopo ciò il problema è ridotto alla risoluzione del sistema di m equazioni lineari con le m incognite t_i, ed il metodo proposto al n. 10 si presta notevolmente a compierla in modo grafico. Infatti il diagramma costituito dallo schema della travatura e dalle forze esterne in equilibrio permette di poter costruire diagrammi di sforzi che stiano in equilibrio, fra di loro e con le forze esterne date, e ciò assegnando arbitrariamente gli sforzi interni di k linee. Ognuno di questi diagrammi somministra un sistema di valori delle t_i che soddisfa alle $m-k$ equazioni della statica. Il processo di falsa proposizione è così evitato per queste equazioni mediante la costruzione di $m-k+1$ diagrammi arbitrarî di sforzi interni, e coi valori forniti da questi si può proseguirlo per le k equazioni complementari, i cui coefficienti son tutti graficamente calcolabili. Così si perviene al sistema delle tensioni effettive t_i delle aste della travatura, e con queste tensioni deve anche potersi costruire un diagramma, il che fornirà una verifica dell'esattezza delle operazioni grafiche.

([1]) Quì intendo accennare alle figure considerate dal signor G. B. Favero nella sua Memoria: *Intorno alle figure reciproche della statica grafica*. V. Atti di questa r. Accademia 1874-75.

Fig. 1ª
A
i
M
B
N
i'
M
N
Fig. 2ª
A
a
b₁
c₁
a₁
B
b
M
Q
P
M₁
c
C
Fig. 3ª
Fig. 4ª
Fig. 5ª
a)
b)
b
c
f
α
a
d
e
g
l
h
i
m
K
D
d'
d'₁
A
d'₂
i'
h'
b'₁
b'₂
B
a'
E
α'
b'
C
c'
e'
K'
f'
F
l'
m'
g'

Osservazioni sull'uovo della Lebias Calaritana.

Nota del dott. CESARE LEPORI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 aprile 1881.

(Con una tavola)

Il prof. Haechel ha scoperto sull'uovo degli Scomberesocidi (Belone, Scomberesox, Hemiramphus, Tylosurus, Exocoetus), uno strato di fibre speciali, finora non rinvenute in altri pesci, alle quali a buon diritto si dovrebbe assegnare il nome di fibre di Haechel, in onore del loro scopritore. Secondo l'Haechel questo strato di fibre sarebbe situato tra la membrana vitellina (e per membrana vitellina egli intende la capsula propriamente detta), ed il vitello. Il Koelliker però ha corretto questa erronea osservazione, dimostrando che la vera sede di questo inviluppo fibroso trovasi invece nella superficie esterna della capsula.

I risultati delle mie ricerche sull'uovo della *Lebias Calaritana* nella quale ho trovato fibre simili a quelle dell'uovo degli Scomberesocidi, mentre da una parte mi mettono in grado di poter confermare quanto asserisce il Koelliker per riguardo alla sede delle fibre, sul rimanente poi di ciò che alle medesime si riferisce, vanno quasi in tutto perfettamente d'accordo con quanto ha descritto l'Haechel.

Scopo precipuo della presente, breve e modestissima pubblicazione si è di render note ai cultori della scienza zoologica queste interessantissime particolarità istologiche dell'uovo della *Lebias,* onde possano essi applicarvi i loro studî con maggior profitto e con maggior larghezza di vedute che per me non si possa, nell'interesse della scienza. Essendo quindi così circoscritto il mio argomento, si comprende benissimo che io non posso qui fare una storia completa sullo sviluppo delle diverse parti dell'uovo della *Lebias,* e neppure una dettagliata descrizione delle medesime. Ciò potrà essere per me oggetto di altro lavoro di maggior mole. Ora mi limiterò solo a dire che nell'uovo della *Lebias* si distinguono molto nettamente le quattro parti essenziali che furono descritte da His nell' uovo dei pesci ossei in generale, ed in particolare in quello del salmone; e queste sono:

1° Una membrana spessa (capsula);
2° Una zona periferica (strato corticale);
3° Una parte inspessita di questo strato (germe);
4° Una massa centrale (vitello nutritivo);

Le cose però che noi descriviamo si trovano e si sviluppano tutte al di fuori della capsula: la capsula quindi è la parte che specialmente deve fissare la nostra attenzione. Osserviamola prima di tutto nell'uovo maturo.

L'uovo della *Lebias,* quando è maturo, è trasparentissimo, di colore giallastro, e fa vedere una bellissima e grossa goccia di grasso che pare si addossi alla superficie interna della capsula. Il diametro dell'uovo è di un millimetro e mezzo circa.

Se noi trattiamo l'uovo con una soluzione allungata di cloruro di palladio o di bicromato d' ammoniaca, esso conserva la sua trasparenza. Messo a colorare in una soluzione di carminio, se, quando sia ben colorato, si divide con piccole forbici ben taglienti in due metà uguali, si ottengono due calotte emisferiche che si potranno collocare con una goccia d'acqua distillata nel vetrino porta-oggetti in modo che una ci mostra la superficie esterna, e l' altra la superficie interna della capsula. Se si guarda allora al microscopio il preparato con sufficiente ingrandimento (p. e. 3 × 7 Hart.), si vedrà come una specie di reticolo molto sottile e poco appariscente, e delle fibre lunghe e flessuose impiantate con una estremità dilatata nel mezzo di una base circolare, la quale pare si adagi in una maglia del reticolo indicato (fig. 1). Sono queste le fibre di Haechel, le quali nell'uovo maturo diventano estremamente lunghe. In questo preparato però riesce malagevole il decidere quale sia la vera loro sede. Se invece di un uovo diviso in due metà si mette sotto il microscopio un uovo intiero, ugualmente maturo e trattato collo stesso procedimento, la cosa apparirà ben più chiara. L'uovo, premuto dal vetrino cuopri-oggetti, scoppia e lascia uscire il suo contenuto. Osservando allora la piega formata alla periferia dell'uovo, si riconoscerà che le maglie non sono altro che delle leggiere infossature, in alcune delle quali si vedranno ancora delle fibre in sito, e che la direzione delle fibre è verso l'esterno (fig. 2. 3). In questa guisa io credo che la sede delle fibre sulla superficie esterna della capsula resta pienamente confermata, ed in modo tale da non lasciar più luogo a dubbio alcuno.

Ritornerò fra poco alle infossature: prima voglio discorrere delle fibre.

Le fibre che, come dicevo, nell'uovo maturo sono assai lunghe, finiscono assottigliandosi in una estremità libera, senza anastomizzarsi mai con altre fibre. Questa estremità libera è molto difficile a scorgersi nelle fibre in sito, perchè formano sulla superficie della capsula una rete inestricabile; dilacerando però cogli aghi la capsula, che è molto fragile, si riesce facilmente ad isolarne parecchie nelle quali si può vedere questa estremità libera assottigliata. La forma di questi particolari elementi fibrosi è cilindrica, ed il loro aspetto richiama alla mente quello delle fibre elastiche. Sono quindi molti brillanti e rifrangono potentemente la luce; e come un effetto veramente singolare di questo loro potere rifrangente citerò qui l'apparizione di un cordone centrale rossastro lungo tutto il loro decorso, che si ottiene spostando un poco il preparato dalla giusta distanza focale per mezzo di movimenti lentissimi della vite micrometrica del microscopio: si giunge in questo modo ad un punto in cui apparisce il cordone centrale, il quale tiene nella fibra una disposizione analoga a quella del cilindrasse dentro la fibra nervosa. Siccome questo fenomeno fu da me osservato per la prima volta in preparati colorati col carminio, in sulle prime mi fece credere ad elementi cavi nei quali fosse penetrata la sostanza colorante; ma, avendo ripetute le manovre in preparati alcoolici non colorati, ed avendo ottenuto gli stessi risultati, è chiaro non trattarsi qui d'altro che di un puro effetto di rifrazione; e le fibre, anzichè cave, sono piene e solide. Dalla base delle fibre già sviluppate nelle uova mature si vedono spesso innalzarsi altre piccole fibre accessorie di una sottigliezza considerevole (fig. 4 *A*, *B*). Un fatto simile non è stato osservato finora sull'uovo degli Scomberesocidi.

Ma se per il loro aspetto fisico queste fibre presentano delle analogie colle fibre elastiche, anche per il loro modo di comportarsi chimicamente con alcuni reagenti alle medesime si rassomigliano. Infatti resistono molto all'azione degli acidi e degli alcali caustici: la potassa però molto concentrata le rende fragili e le divide in pezzi. L'ammoniaca un poco allungata è il migliore dei reagenti per isolarle. L'alcool non le attacca punto. L'acido osmico 1 $^0/_0$ è il liquido sovrano per metterle bene in evidenza. L'acido solforico concentrato e l'acido acetico bollente le disciolgono in modo analogo alle fibre elastiche.

Il modo di svilupparsi di queste fibre è molto facile a seguirsi, ed è stato anche descritto dall'Haechel nel suo lavoro sull'uovo degli Scomberesocidi. L'Haechel dice di aver osservato in sul principio nella membrana dell'uovo alcuni piccoli punti brillanti, i quali sarebbero prodotti da un inspessimento della stessa membrana. Questi punti in seguito aumenterebbero di volume assumendo una forma triangolare o quadrilatera. Quindi per una differenziazione dello strato più esterno di questi corpuscoli si formerebbe attorno a ciascuno di essi una membrana, la quale, forata dal corpuscolo che si allunga, rimarrebbe a costituire la radice della fibra. Secondo il modo di vedere di Haechel adunque le fibre altro non sarebbero che propaggini della stessa membrana o capsula, o meglio dire appendici di essa e formanti continuità colla medesima. Vedremo dopo quale considerazione meriti quest'opinione dell'Haechel sulla provenienza delle fibre. Per ora comincierò col dire che, onde poter seguire lo sviluppo delle fibre è necessario seguire lo sviluppo dell'uovo nell'ovario. Le proporzioni delle fibre sono sempre in diretto rapporto con quelle dell'uovo, vale a dire che esse sono più o meno avanzate in sviluppo secondo il diverso grado di sviluppo dell'uovo stesso. Nelle piccole uova di 0,20^{mm} di diametro non vi ha neppure il più lontano indizio di fibre, e nemmeno di punti. Solo quando l'uovo ha raggiunto un certo grado di sviluppo si incominciano a vedere sulla superficie di esso alcuni punti brillanti considerevolmente più grandi delle comuni granulazioni elementari, sparsi irregolarmente su tutta l'estensione della superficie della capsula. Mano mano che l' uovo cresce questi punti si rendono più visibili, ed allora incomincia pure a farsi notare una breve e sottilissima punta sporgente dal corpuscolo, la quale si incurva un poco sul medesimo, dando in questo modo all'insieme la configurazione di una virgola (fig. 12). La parte rigonfiata, ossia la testa della virgola, che si colora più fortemente col carminio, evidentemente anderà a costituire la radice della fibra, che trovasi impiantata nella base; mentre la punta incurvata, allungandosi a poco a poco costituirà la fibra stessa; la quale, in questo suo progressivo allungarsi va diventando anche flessuosa in modo da rassomigliare ad un piccolo serpentello nell'atto di strisciare sul suolo (fig. 7). A misura poi che l'uovo cresce, crescono contemporaneamente in lunghezza anche le fibre fino a raggiungere quel grado di sviluppo quale si vede nelle uova già mature o vicine alla maturità, ed allora, ricuoprendo tutta la superficie dell'uovo, vanno a fornirgli quasi un nuovo involucro.

Ora, qual'e l'origine di queste fibre? Sono prodotti d'inspessimento della membrana dell'uovo, come pretenderebbe l'Haechel, oppure hanno tutt'altra provenienza?

Prima di rispondere a questa domanda è mestieri che io faccia conoscere i rapporti esistenti fra la capsula, le fibre e l'epitelio del follicolo.

L'epitelio del follicolo è facile a scoprirsi trattando le uova col nitrato d'argento. Con questo trattamento si può riconoscere fin in uova piccolissime quest'epitelio, che è costituito da un semplice strato di cellule poligonali piuttosto grandi. Osservando la figura 5, pare che esista un rapporto inverso fra le dimensioni dell'uovo e quelle degli elementi epiteliali. Ma qui debbo osservare che con diverso trattamento ho ottenuto qualche preparato in cui sembrava che gli elementi epiteliali crescessero con le uova (ovarî conservati per qualche tempo direttamente nell'alcool e colorati con soluzione alcoolica di ematossilina). Forse questo fatto potrà spiegarsi con un raggrinzamento ineguale delle uova di diverse dimensioni. I preparati tratti da ovarî trattati debolmente con acido osmico e colorati a carminio danno risultati conformi a quelli impregnati col nitrato d'argento. Ma queste differenze non possono avere gran peso sulla questione della provenienza delle fibre. Il più importante per noi è di far rilevare il nesso intimo che esiste fra capsula, epitelio e fibre. In ispecie nei preparati ottenuti con l'alcool potremo assicurarci dell'intimo rapporto che passa tra epitelio e fibre, osservando l'intreccio meraviglioso di queste immediatamente al disopra delle cellule dell'epitelio (fig. 6). È prova irrefragabile anche di tale intimo rapporto il fatto che le fibre, separandosi dall'epitelio, lasciano in questo l'impronta del loro decorso (fig. 9).

Nè meno intimo è poi questo rapporto fra l'epitelio e la capsula.

Fin da principio noi abbiamo detto che la superficie esterna della capsula, nelle uova trattate col cloruro di palladio e col bicromato di ammoniaca, come pure a fresco, fa vedere una specie di reticolo, le di cui maglie non sono altro che delle leggiere infossature o depressioni. La loro disposizione è molto regolare, al punto da rassomigliare ad un elegantissimo pavimento. Ma da che provengono queste infossature o depressioni? Evidentemente esse provengono dall'addossarsi dell'epitelio del follicolo sulla superficie della capsula come prova l'accordo fra le dimensioni delle maglie e quelle delle cellule epiteliali; sono quindi le impressioni lasciate dalle cellule epiteliali distaccatesi; e forse queste impressioni vengono prodotte sulla capsula mentre è ancora in formazione. In tutte le uova che siano lasciate a macerare per qualche tempo nell'acqua l'epitelio si distacca facilmente, e lascia vedere le impressioni rimaste sulla superficie della capsula; queste però appariscono nel modo il più chiaro nelle uova trattate col cloruro di palladio e col bicromato d'ammoniaca, e colorate col carminio. Con questo trattamento l'epitelio si separa completamente, senza rimuovere le fibre dalla loro base, e così si ottengono dei bellissimi preparati, nei quali la superficie della capsula rimane del tutto allo scoperto, mostrando le impressioni epiteliali e l'impianto delle fibre (fig. 1 e 3). Ma se queste impressioni sono così marcate, vuol dire che l'addossamento dell'epitelio alla superficie della capsula è assai forte, e quindi molto intimo il rapporto tra l'uno e l'altra, come sopra dicevamo.

Se ora noi diamo uno sguardo d'insieme a queste parti in sito (epitelio, fibre e capsula), vedremo che nell'uovo, il quale abbia raggiunto un certo grado di sviluppo, anche senza essere arrivato alla sua completa maturità, le fibre di Haechel, in seguito ad essersi enormemente allungate, divenute flessuose, e per così dire aggomitolate, non potendo estendersi in linea retta all'esterno per il forte ostacolo che loro

frappone la membrana del follicolo, vanno a formare una rete inestricabile, la quale ricuopre l' epitelio del follicolo, interponendosi fra l' epitelio ed il follicolo stesso. Quest'epitelio quindi è in certo modo pigiato contro la superficie esterna della capsula dall'inviluppo fibroso costituito dalle fibre, e trovasi perciò rinchiuso tra due strati assai resistenti, l'inviluppo fibroso all'esterno e la capsula all'interno (fig. 10). Da ciò adunque nasce quell'intimo rapporto, quello strettissimo vincolo che insieme lega la capsula, le fibre e l'epitelio follicolare , ed è quanto a noi interessava per ora di ben appurare.

Premesse queste cose noi possiamo finalmente formulare un giudizio alquanto fondato sull'origine delle fibre di Haechel, per quanto si riferisce però all'uovo della *Lebias;* chè in nessuno degli Scomberesocidi ho potuto aver campo di fare delle ricerche , sebbene io creda che anche a questi altri pesci possano egualmente applicarsi le nostre conclusioni. Intanto io qui tengo a dichiarare che le cose che diremo a questo riguardo non sono che congetture; congetture senza dubbio bene appoggiate dai fatti, ma pur sempre congetture, e nient' altro che congetture. Possano queste eccitare gli istologi a continuare le opportune ricerche, e ciò sarà largo compenso per me.

L' opinione dell' Haechel che le fibre siano prodotte da un inspessimento della capsula, e costituiscano per ciò stesso delle appendici o propaggini, pullulate per così dire dalla sostanza della capsula medesima, ha una certa apparenza di vero. Milita in suo favore la solidissima aderenza della fibra alla capsula in modo da sembrare che faccia un tutto continuo con essa (fig. 1, 3). Il completo distaccarsi dell' epitelio dalla capsula, mentre le fibre rimangono impiantate in essa è anche un fatto molto concludente in favore. Ma se la cosa fosse veramente come la dice Haechel, non si saprebbe spiegare la facilità con cui la fibra, trascinando anche con sè la sua base, si distacca dalla capsula senza lasciare in questa lesione alcuna apprezzabile (fig. 11). E solo quando la fibra si distacca dalla radice, lasciando la base in sito, si vede al centro di questa uno spazio ristretto più intensamente colorato dal carminio, il quale a prima giunta pare un foro, ma non lo è.

Per noi le fibre di Haechel sono più probabilmente di origine epiteliale.

Fin dal principio del suo sviluppo l'uovo trovasi inviluppato dall'epitelio del follicolo. Progredendo nella sua evoluzione, il contenuto di alcune cellule epiteliali del follicolo comincia a modificarsi, ed appariscono allora quei punti brillanti sparsi qua e là sulla superficie dell'uovo. È molto probabile che questi punti altro non siano che parti differenziate delle stesse cellule epiteliali. Queste parti, allungandosi, si dilatano all' estremo basale che si colora più intensamente col carminio (nucleo?) per formare la radice della fibra, che si appoggia alla capsula, e si assottigliano dall'altro per costituire il rimanente della fibra, che si dirige all'esterno. Quando la parte assottigliata continua ad allungarsi, urta nella sua direzione contro la parete del follicolo , e s'incurva un poco: assume allora la forma di virgola (fig. 12). Ma crescendo sempre in lunghezza, e non potendo vincere l'ostacolo che le frappone la membrana del follicolo, è costretta a serpeggiare fra questa stessa membrana ed il suo epitelio, e quindi diventa flessuosa e riveste la forma di un serpentello (fig. 7). Si comprende poi benissimo come, successivamente allungandosi , le fibre debbano in

fine costituire quella rete inestricabile che inviluppa completamente l'uovo: ed ecco come si formerebbe la fibra e la sua radice. Ma mentre una parte della cellula si trasforma per dar nascita alla fibra come ad un'appendice cuticolare, anche il resto della stessa cellula si modifica alla sua volta, si inspessisce considerevolmente, e va a formare attorno alla radice quella specie di cercine circolare assai resistente che io chiamo base della fibra: la qual base si innesta, per così esprimermi, nella capsula, contraendo con essa tale adesione da far credere che formino un tutto continuo fra loro. Non ostante però tale adesione, continuità non esiste, e la base non fa altro che adagiarsi in una depressione della capsula non altrimenti di quel che facciano le cellule epiteliali. E così doveva essere, se, come risulta dalle considerazioni sopra esposte, la base e la fibra non sono altro che una cellula epiteliale modificata, la quale si trasforma nello stesso sito in cui si trovava, ossia nella depressione corrispondente della capsula. A me pare che questo modo di spiegare l'origine delle fibre, oltre di essere meglio appoggiato dalle osservazioni dirette che non sia quello di Haechel, trovasi anche più in armonia coll'attività della cellula. Rimarrebbe ora a spiegare il perchè non tutte le cellule epiteliali si trasformano in fibre, ed il fatto delle piccole fibre accessorie impiantate sopra una base comune con una fibra grande; ma a queste domande non siamo per ora in grado di dare una risposta soddisfacente.

Finora non si è saputo assegnare una funzione determinata alle fibre di Haechel; tuttavia io credo molto facile a desumersi il loro ufficio fisiologico, che è puramente meccanico. Lo strato formato dalle fibre è situato tra la faccia interna del follicolo e l'epitelio del follicolo stesso. Di modo che succede che quell'epitelio, il quale prima era aderente al follicolo, se n'è staccato, applicandosi più strettamente alla capsula dell'uovo (fig. 10). Le cose durano così fintanto che l'uovo non sia arrivato alla sua maturità: raggiunta però questa, il follicolo si rompe, ed allora le fibre si svolgono, o, dirò meglio, si sgomitolano, diventando libere ed intrecciandosi colle fibre delle altre uove mature, uscite pur esse dal loro rispettivo follicolo. Questo fatto si può facilmente constatare, premendo l'addome di una *Lebias* che abbia le uova già mature, le quali si vedranno uscire dal poro genitale unite in forma di grappolo o di rosario per mezzo di fili arricciati: questi fili, osservati al microscopio, si riconosceranno non essere altro che le fibre di Haechel.

In tal guisa rimane ben chiarita la funzione di queste fibre: esse devono servire a fissare le uova alle erbe o ad altri corpi sui quali vengono deposte. Ed a questo riguardo non posso dispensarmi dal manifestare nuovamente i miei dubbî, espressi pure in altro lavoro, sulla viviparità, da tutti generalmente ammessa, della *Lebias Calaritana*. Difatti sarebbero inutili questi mezzi di attacco, se le uova non dovessero essere deposte: anzi, a mio avviso, servirebbero d'inciampo alla libera uscita dei feti sviluppatisi nell'ovario. Del resto debbo qui riferire l'osservazione del prof. Emery, il quale ha veduto le uova dell'*Exocoetus exiliens* attaccate a corpi galleggianti per mezzo di filamenti che partono dalla membrana dell'uovo, i quali filamenti, sebbene io non abbia potuto avere delle uova di esoceti a mia disposizione per verificare la cosa, pare non debbano essere altro che le fibre di Haechel. Ed io penso che le fibre di Haechel, destinate allo scopo indicato, siano diffuse nella classe dei pesci più di quello che si possa credere e non siano carattere esclusivo degli

Scomberesocidi ([1]). Questa supposizione però merita di essere confermata, e quindi io interesso gli ittiologi di unirsi a me per raccogliere osservazioni al riguardo. — Per ora rileverò soltanto come i fatti riferiti in questa breve Nota valgano a confermare l'opinione, poggiata dal Günther sopra altri fatti, dell'affinità degli Scomberesoci coi Fisostomi e in ispecie coi Ciprinodonti.

([1]) Dopo scritte queste pagine, rilevo dal Brock una osservazione analoga di Syrski sulle uova dell' *Atherina hepsetus*.

BIBLIOGRAFIA

Haeckel E., *Ueber die Eier der Scomberesoces.* Müller's Archiv. 1855.
Koelliker, *Untersuchungen zur vergl. Gewebelehre.* Verhandl. d. physikal. medic. Gesellsch. zu Vurzburg. VIII. 1858 (citato secondo Balbiani).
Balbiani, *Leçons sur la génération des Vertébrés.* Paris, 1879.
Emery C., *Note ittiologiche.* Atti Soc. ital. di sc. nat. XXI. 1878.
Günther, *Catalogue of Fishes.*
Brock J., *Beiträge zur Anatomie u. Histologie der Geschlechtsorgane der Knochenfische.* Morphol. Jahrb. IV. 1878.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Fig. 1. Porzione della superficie di un uovo quasi maturo: in una maglia del reticolo rilevato trovasi impiantata una fibra. Bicromato d'ammoniaca: 420: 1.

» 2. Piega della membrana di un uovo consimile, disegnata aggiustando il microscopio successivamente per i diversi punti della superficie: 250: 1.

» 3. Sezione ottica di siffatta piega, con l'impianto di una fibra: 250:1.

» 4. *A* e *B*. Fibre con fibrille accessorie impiantate sulla medesima radice: 420: 1.

» 5. *A*. Uovicini di diverse dimensioni; il contorno delle cellule dell'epitelio follicolare è reso evidente dal trattamento col nitrato d'argento. 250: 1.

B. Epitelio di un uovo del diametro di 0.^{mm}64. Nitrato d'argento: 250: 1.

» 6. Fibre ed epitelio follicolare di un uovo di 0.^{mm}60. Alcool, ematossilina: 420: 1.

» 7. Fibre ancora poco sviluppate che cominciano a divenire sinuose: 250: 1.

» 8. Fibre più lunghe e più sviluppate: ripiegate a serpentelli: 250: 1.

» 9. Impressione delle fibrille sull'epitelio di un uovo di 0.^{mm}64. Acido osmico, carminio: 250: 1.

» 10. Sezione ottica degl' involucri di un uovo giovane (0.^{mm}50 circa) ripiegati con la superficie interna all'esterno. L'epitelio follicolare vedesi fra la membrana dell'uovo ancora assai sottile e le fibre di Haeckel. Acido osmico, carminio: 250: 1.

» 11. Una fibra di un uovo di mezzana grandezza staccata dalla membrana insieme con la sua radice. Cloruro di palladio: 420: 1.

» 12. Fibre giovanissime che cominciano ad assumere la forma di virgola: 250: 1.

Fig. 4

Lit. Bruno e Salomone Roma

Sui fondamenti della geometria projettiva.

Memoria di RICCARDO DE PAOLIS

proposta al Presidente per la stampa

nelle ferie accademiche dell' anno 1880-81.

PARTE I.

I. Segmenti di una forma fondamentale di 1ª specie.

1. Un elemento E, che descrive una forma fondamentale di 1ª specie, può muoversi da una parte o dall'altra in due opposte *direzioni* che distingueremo col segno $+$ o $-$ attribuendo indifferentemente, ma costantemente, il segno $+$ ad una, ed il segno $-$ all'altra.

Fissata la direzione del movimento se E partendo da una posizione iniziale E_1 arriva ad una finale E_2 diremo *segmento* $E_1 E_2$ la parte della forma descritta da E. Quando E percorre il segmento acquista successivamente le posizioni di altri elementi generatori che diremo compresi nel segmento $E_1 E_2$.

Onde fissare completamente un segmento bisogna, oltre ai suoi estremi $E_1 E_2$, darne anche la direzione, ciò si ottiene per mezzo di un elemento E, compreso nel segmento, scrivendo $E_1 E E_2$, o pure per mezzo del segno corrispondente alla direzione ponendo $\pm E_1 E_2$.

Diremo uguali due segmenti $E'_1 E'_2$, $E''_1 E''_2$, di una stessa forma o di forme diverse, quando gli estremi $E'_1 E'_2$ si possono contemporaneamente far coincidere con $E''_1 E''_2$, ed allora porremo $E'_1 E'_2 = E''_1 E''_2$.

2. Dato il segmento $E_1 E_2$ riterremo sempre possibile di far coincidere contemporaneamente E_1 con E_2 ed E_2 con E_1 sovrapponendo la forma a se stessa. Ciò equivale a ritenere che la figura $E_1 E_2$ è simmetrica rispetto ad E_1, E_2, ossia presenta le stesse proprietà considerandola nel senso $E_1 E_2$, o nell'opposto $E_2 E_1$. Esprimeremo questo fatto ponendo $E_1 E_2 = - E_2 E_1$.

3. Possiamo paragonare due segmenti diversi $E'_1 E'_2$, $E''_1 E''_2$ facendo coincidere E'_1 con E''_1 e sovrapponendo le forme in modo che $E'_2 E''_2$ cadano da una stessa parte di E'_1; se E''_2 cade nel segmento $E'_1 E'_2$ diremo $E'_1 E'_2 > E''_1 E''_2$; se cade fuori di $E'_1 E'_2$ diremo $E'_1 E'_2 < E''_1 E''_2$. Potendo poi supporre che E'_1 sia posto in E''_1, e che E'_2 si faccia cadere dalla stessa parte di E''_2, possiamo anche dire $E''_1 E''_2 < E'_1 E'_2$

o $E''_1 E''_2 > E'_1 E'_2$, cioè dati due segmenti se il 1° è maggiore o minore del 2° viceversa questo è minore o maggiore di quello [1].

Se $E'_1 E'_2 > E''_1 E''_2$ diremo che $E''_1 E''_2$ sono più vicini di $E'_1 E'_2$.

II. Le serie convergenti in una forma fondamentale di 1ª specie.

4. Sempre in una forma fondamentale di 1ª specie consideriamo una serie di elementi

$$\ldots . E_1 \; E_2 \; E_3 \ldots . \; E_m \ldots . \; E_{m+n} \ldots . ,$$

che si possono ritenere come posizioni di un elemento mobile. Se crescendo m, qualunque sia n, abbiamo $E_m E_{m+n} > E_{m'} E_{m'+n'}$, e gli elementi $E_m E_{m+n}$ si vanno sempre avvicinando (3) in modo da potere rendere il segmento $E_m E_{m+n} < \varepsilon$, dove ε è un segmento dato piccolo quanto si vuole, diremo che la serie è convergente, e l'indicheremo con S_c.

Nulla possiamo obbiettare contro l'esistenza di queste serie; in seguito vedremo che effettivamente ci si presentano con tutta la spontaneità desiderabile.

5. Riterremo che gli elementi E di una serie convergente S_c, avvicinandosi indefinitamente, convergano verso un solo elemento *limite* E_l [2], pure generatore della forma, e costruito dalla serie S_c.

Ammettendo l'esistenza di questo elemento limite E_l esprimiamo, e rappresentiamo, convenientemente la proprietà della serie S_c.

Diciamo che la serie S_c ammette un solo elemento limite E_l perchè non possiamo concepire due elementi distinti ai quali si avvicini indefinitamente, e contemporaneamente, E_m.

[1] Lobatschewscky (*Geom. Untersuchungen* Berlin 1840) e W. Bolyai (*Tentamen in elementa matheseos*..... Vol. I. Kurzer Grundrifs eines Versuchs u. s. w. § 33), cercando di fondare le definizioni della retta e del piano, hanno osservato che si può introdurre il concetto di distanze uguali, e di distanze maggiori o minori, considerando due coppie di punti, invariabilmente connessi fra loro, senza ricorrere al concetto di misura. È però naturale che queste considerazioni poggiano sul postulato dell'invariabilità delle figure geometriche nel movimento, postulato su cui è basato il nostro sistema geometrico poichè, come osserva Hoüel (Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire). « il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de géométrie, dans la quelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique plus ou moins déguisée ».

[2] L'introduzione di questi elementi nella Geometria è analoga a quella dei numeri irrazionali nell'Aritmetica. Si tratta di rendere possibili costruzioni e considerazioni che altrimenti non lo sarebbero, e si tratta di dare uniformità e generalità al linguaggio che esprime le proprietà geometriche.

Klein (M. Annalen Bd. VI VII) credo che per primo abbia introdotto esplicitamente questo postulato chiamandolo il principio della continuità, ed esprimendosi così: « Wenn auf einem Gebilde erster Stufe eine unendliche Reihe von Elementen gegeben ist, die in ein Segment des Gebildes nicht eindringt, so soll es gestattet sein, von einem Grenzelemente, denn die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Elemente zu sprechen ». Crelle ammette questo principio quando dimostra l'esistenza di un punto che divide un segmento rettilineo in due parti uguali, ed il lettore può vederlo leggendo la sua Memoria sulla Geometria elementare pubblicata nel J. für di reine und angewandte Mathematik - Bd. 65. Un altro esempio si trova nella Memoria di Bolyai « Sulla scienza dello spazio assolutamente vera..... ». (G. di Napoli Vol VI), quando ritiene che se BN è parallela ad AM in AM vi è sempre un punto F, ed un solo, in modo che sia BFM = FBN.

Riterremo coincidenti due elementi $E'_l E''_l$ quando sono costruiti da due serie $S'_c S''_c$ i cui elementi $E'_m E''_m$, aumentando m, si avvicinano indefinitamente.

6. Supponiamo dati gli elementi $E'_l E''_l \ldots$, s'intende per mezzo delle loro serie $S'_c S''_c \ldots$, e supponiamo che partendo dagli elementi $E'_m E''_m \ldots$ si arrivi a costruire un certo elemento E_m. Quando $E'_m E''_m \ldots$ tendono a raggiungere $E'_l E''_l \ldots$ anche E_m percorre una serie S_c e tende a raggiungere un elemento E_l che viene così fissato. Le costruzioni sugli elementi $E'_l E''_l \ldots$ vengono come limite di quelle stesse eseguite sugli elementi delle loro serie convergenti [1].

III. Sistemi armonici.

7. Onde ottenere un gruppo armonico di elementi generatori d'una forma, fondamentale di 1ª specie F, basta porne immediatamente tre distinti A B C, e poi costruire il coniugato armonico di uno qualunque rispetto agli altri due. Mediante gli elementi di un gruppo armonico si costruiscono altri gruppi armonici, e quindi altri elementi della forma i quali alla loro volta danno origine ad altri gruppi armonici, e così via. Potendo proseguire indefinitamente queste operazioni, poichè i tre elementi sono distinti e quindi il quarto armonico non può coincidere con uno di essi, poniamo infiniti elementi di F mediante i tre A B C. Il loro insieme lo diremo *sistema armonico,* e diremo elementi *fondamentali*, del sistema, i tre A B C che lo determinano.

Un sistema armonico può essere proseguito in infiniti modi prendendo tre elementi già costruiti come nuovi elementi fondamentali.

8. *Con un sistema armonico si può sempre arrivare ad un elemento della forma che coincida con un elemento dato o sia vicino ad esso quanto si vuole* [2].

(1) Così nell'Aritmetica le operazioni sui numeri irrazionali si definiscono come il limite del risultato che si trova eseguendo le stesse operazioni sui numeri razionali delle serie che li determinano.

(2) Staudt (Geometrie der Lage) si serve di questo teorema per costruire le forme projettive. Onde dimostrarlo osserva solamente che la serie armonica non si può arrestare bruscamente; però, come ha fatto rilevare Klein (M. Annalen. Bd. VI), sarebbe pensabile che gli elementi della serie armonica, benchè illimitati, non uscissero fuori di un determinato segmento senza giungere a trovare un' ultima posizione dell'elemento. Dopo avere introdotto il principio di continuità, ed i *Grenzelemente*, Klein introduce un altro postulato « Sollten in der Reihe der harmonischen Elemente solche Grenzelemente auftreten, so dürfen sie der Reihe zugezählt werden », ed allora fa vedere che il teorema di Staudt si può ritenere vero. Ma quest'ultimo postulato non è indispensabile; Lüroth e Zeuthen (M. Annalen. Bd. VII) hanno dimostrato rigorosamente il teorema, che ci occupa, ricorrendo al solo principio di continuità. La dimostrazione è differente, in parte, da quella che io qui presento e che mi sembra più evidente e più facile a ritenersi.

Un altro tentativo di semplificazione è stato fatto dal Thomae in una dimostrazione sostituita da Reye, nella sua « Geometrie der Lage », a quella di Staudt, in seguito alle giuste obbiezioni di Klein. Dico un tentativo poichè mi sembra che la dimostrazione, di cui parlo, contenga più nascosto lo stesso errore che si trova in quella di Staudt. Il lettore potrà giudicarne. Ecco in poche parole la dimostrazione del Thomae il quale riduce la quistione a far vedere che se due punteggiate projettive sovrapposte hanno tre punti uniti, tutti gli altri sono pure uniti. « Siano ABC tre punti corrispondenti a se stessi, e sopra il segmento AB, che non contiene C, vi sia un punto P che non coincida col corrispondente P_1. Se P si muove nel senso ABC anche P_1 si muove nello stesso senso ed in B' coincide

Vale a dire: un elemento della forma o appartiene al sistema armonico, e si può ottenere esattamente costruendo successivi gruppi armonici, o non appartiene al sistema armonico, ed allora è determinato come limite di una serie convergente di elementi del sistema.

Se un elemento E non appartiene al sistema, trattandosi di dimostrare che con gruppi armonici possiamo costruire gli elementi di una serie convergente la quale ammetta E per limite, basta far vedere che qualunque segmento $E_1 E E_2$, comunque sia piccolo, contiene elementi del sistema. Supponiamo che ciò non sia, ovvero che E senza incontrare elementi del sistema si possa portare fino alle posizioni $E_1 E_2$, costruite come limiti di due serie convergenti $S'_c S''_c$. Prendiamo due elementi AB rispettivamente di $S'_c S''_c$, e costruiamo i gruppi armonici $A E_2 E_1 E'_1$, $B E_1 E_2 E'_2$. Potendo avvicinare quanto vogliamo A ad E_1, e B ad E_2, anche E'_1 E'_2, che si muovono nello stesso senso (¹), si avvicinano quanto si vuole ad $E_1 E_2$ e quindi possono sorpassare un elemento C del sistema.

Costruendo i gruppi armonici $A B E_1 E''_1$, $A B E_2 E''_2$ abbiamo due elementi $E''_1 E''_2$ che vengono nei segmenti $A E'_1$, $B E''_2$; posto ciò l'elemento D coniugato armonico di C rispetto ad A, B deve stare nel segmento AB, ma non può stare nel segmento $A E_1$ o $B E_2$, perchè tutti i loro elementi hanno i coniugati armonici nei segmenti $A E''_1$, $B E''_2$, dunque sta nel segmento $E_1 E_2$.

Ora essendo ABC tre elementi del sistema armonico anche D è un elemento del sistema, ma si trova nel segmento $E_1 E_2$, dunque è falsa l'ipotesi da cui siamo partiti, e perciò:

Con un sistema armonico si può percorrere tutta la forma potendo arrivare a costruire un suo elemento qualunque (²).

Naturalmente per ottenere, con un sistema armonico, un elemento E_l, limite di S_c, basta costruire tutti gli elementi di S_c.

9. La successione dei gruppi armonici che costruiscono un elemento costituisce la *legge* che, applicata agli elementi fondamentali, lo determina. Uno stesso elemento può essere costruito con diverse leggi *equivalenti*.

10. A tre elementi ABC di un sistema armonico della forma F facciamo rispettivamente corrispondere tre elementi $A' B' C'$ pure di un sistema armonico di un'altra forma F', distinta o no da F. Allora ogni elemento E del sistema armonico di F si può ottenere con una certa legge partendo da ABC come elementi fondamentali del sistema; la stessa legge applicata ad $A' B' C'$ conduce ad un elemento E',

con P. Lo stesso avviene se il movimento è diretto nel senso CBA e allora PP_1 coincidono in A'. Abbiamo così un segmento $A' B' \leqq AB$ che non contiene punti uniti; ma ciò è impossibile perchè è unito il coniugato armonico di C rispetto ad $A' B'$, dunque....... ». Questo ragionamento dice solo che preso un segmento $A' B'$, limitato da due punti uniti, si può entrare in esso pure con punti uniti, cioè che vi sono infiniti punti uniti che si avvicinano a P da una parte e dall'altra; ma non potrebbe darsi che questi elementi uniti si avvicinassero a due limiti tra i quali fosse P?

(¹) Dalla teoria dei gruppi armonici prendo i due fatti seguenti:

Due elementi di un gruppo armonico si muovono in senso contrario, o nello stesso senso, se gli altri due rimangono fissi e sono, o no, coniugati.

(²) La dimostrazione non sarebbe più rigorosa se invece di prendere AB vicini quanto si vuole ad $E_1 E_2$ si prendessero coincidenti con essi; proprio questo è il caso considerato da Thomae.

del sistema armonico di F′, che diremo corrispondente ad E. Tutte le leggi equivalenti che costruiscono E applicate al sistema armonico di F′ costruiscono E′. Un elemento E di F ne determina uno E′ di F′, ed inversamente E′ determina E. Abbiamo così costruita una corrispondenza *univoca* tra gli elementi dei sistemi armonici di F ed F′.

11. Un elemento E_l di F, non appartenente al sistema armonico, è determinato con un processo di limitazione per mezzo di una serie convergente S_c, lo stesso processo di limitazione applicato al sistema armonico di F′ ci conduce ad un elemento E'_l costruito con una serie convergente S'_c corrispondente ad S_c. Deduciamo che ogni elemento di F ha per corrispondente almeno un elemento di F′.

Se quattro elementi di F si seguono nell' ordine A B C D, anche i quattro elementi A′ B′ C′ D′, corrispondenti in F′, si seguono nello stesso ordine. Infatti separando i quattro elementi di F nelle due coppie A B, C D, che non si separano, abbiamo una coppia $M_1 M_2$ di elementi che le divide armonicamente, nell'altra forma vengono pure due elementi $M'_1 M'_2$ che separano armonicamente A′ B′, C′ D′, dunque anche i quattro elementi di F′ si seguono nell'ordine A′ B′ C′ D′ (1).

12. Un elemento E_l, che non appartiene al sistema armonico, si può costruire con diverse leggi equivalenti, è facile vedere che tutte conducono ad uno stesso elemento corrispondente E'_l. Se ad E_l corrispondono due elementi distinti $E'_l E''_l$, possiamo prendere tre elementi A′ B′ C′ in modo che C′ sia nel segmento $E'_l E''_l$ nel quale non sono A′ B′, e che i quattro elementi si seguano nell'ordine A′ B′ C′ E'_l; allora anche i quattro corrispondenti si seguono nell'ordine A B C E_l; ma se invece consideriamo A′ B′ E''_l C′ troviamo l'ordine cambiato A B E_l C, dunque ad E_l non può corrispondere più di un elemento.

13. Ogni elemento generatore di una forma, fondamentale di 1ª specie, o appartiene ad un sistema armonico della forma, o è limite di una serie convergente di elementi del sistema armonico, quindi la corrispondenza univoca stabilita tra gli elementi di due sistemi armonici di F F′, porta con sè la corrispondenza univoca di tutti gli altri elementi delle forme.

Colle costruzioni fissate le forme F F′ vengono descritte nello stesso modo da due elementi corrispondenti, perciò si dicono *omografiche*, e si dice *omografia* la legge che lega questa corrispondenza tra i loro elementi generatori.

14. Stabiliti questi principî si deducono rigorosamente tutte le proprietà delle forme omografiche seguendo i comuni metodi di dimostrazione. Così si arriva subito a concludere che due forme omografiche sono anche *projettive*, ecc. ecc.

(1) Klein, onde passare dalla corrispondenza univoca degli elementi dei due sistemi armonici a quella pure univoca di tutti gli altri, ammetteva come postulato che « vier Elementen des einen Gebildes, welche eine Folge bilden, auch wenn Grenzelemente in Betracht kommen, allemal solche vier Elemente des anderen Gebildes entsprechen sollen, welche wieder eine Folge bilden ». Ma Darboux (Sur le théoreme fondamental de la géométrie projective. M. Annalen Bd. XVII) ha fatto vedere che questo postulato segue dalla definizione stessa della corrispondenza colle stesse considerazioni che ho svolte. Darboux espone anche un altro mezzo per cui si può giungere dalla corrispondenza univoca degli elementi del sistema a quella, pure univoca, di tutti gli altri; però suppone cognite le coordinate degli elementi della forma.

PARTE II.

IV. Divisione di un segmento in parti armoniche.

15. Se i seguenti gruppi

$$A\,C_{n-1}\,B\,C_{n-2},\quad A\,C_{n-2}\,C_{n-1}\,C_{n-3}\,,\dots,\,A\,C_2\,C_3\,C_1,\quad A\,C_1\,C_2\,D\,,$$

formati con elementi di una forma fondamentale di 1ª specie, sono armonici, diremo che

$$C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1$$

dividono il segmento BD in n *segmenti armonici* rispetto all'elemento *origine* A, e ci serviremo del simbolo

$$A\,.\,B\,(C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1)\,D\,.$$

È evidentemente indifferente l'ordine in cui si considerano gli estremi del segmento BD, quindi abbiamo anche

$$A\,.\,D\,(C_1\,C_2\dots C_{n-2}\,C_{n-1})\,B.\qquad (^1)$$

Partendo dall'origine A e dagli elementi $B\,C_{n-1}$, o $D\,C_1$, con successivi quarti armonici si possono ottenere tutti gli altri; ciò fa vedere che è sempre possibile costruire segmenti divisi in parti armoniche rispetto ad una data origine.

16. Basta osservare che è armonico ogni gruppo projettivo ad un gruppo armonico per ritenere dimostrato che se

$$A\,.\,B\,(C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1)\,D$$

e
$$A\,B\,C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1\,D\;\overline{\wedge}\;A'\,B'\,C'_{n-1}\,C'_{n-2}\dots C'_2\,C'_1\,D'$$

abbiamo anche

$$A'\,.\,B'\,(C'_{n-1}\,C'_{n-2}\dots C'_2\,C'_1)\,D'\,.$$

Viceversa osservando che due gruppi armonici sono sempre projettivi si deduce subito che se

$$A\,.\,B\,(C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1)\,D\quad,\quad A'\,.\,B'\,(C'_{n-1}\,C'_{n-2}\dots C'_2\,C'_1)\,D'$$

abbiamo

$$A\,B\,C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1\,D\;\overline{\wedge}\;A'\,B'\,C'_{n-1}\,C'_{n-2}\dots C'_2\,C'_1\,D'.$$

17. Ecco un caso particolare. Quando

$A\,.\,B\,(C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1)\,D$ si ha pure (15) $A\,.\,D\,(C_1\,C_2\dots C_{n-2}\,C_{n-1})\,B$,

e quindi

$$A\,B\,C_{n-1}\,C_{n-2}\dots C_2\,C_1\,D\;\overline{\wedge}\;A\,D\,C_1\,C_2\dots C_{n-2}\,C_{n-1}\,B.$$

Gli elementi della coppia BD si corrispondono in doppio modo, perciò tutte le coppie $C_1\,C_{n-1}$, $C_2\,C_{n-2}\dots$ appartengono ad una stessa involuzione; A è un elemento doppio, l'altro è il coniugato armonico di A rispetto a BD. Nel caso di n pari ed uguale a 2ν coincide coll'elemento C_ν medio tra $C_1\,C_2\dots C_{n-2}\,C_{n-1}$.

18. Ora è facile vedere che è sempre possibile dividere un segmento dato in n parti armoniche rispetto ad un' origine data fuori di esso (²). Sia BD il segmento

(¹) Se $n=2$ viene un solo elemento C che è il coniugato armonico di A rispetto a BD.

(²) L'origine deve essere data fuori del segmento che si deve dividere perchè gli elementi BD spezzano la forma in due parti, una contiene l'origine A, l'altra contiene gli elementi C, dovendo due elementi coniugati di un gruppo armonico sempre separare gli altri due.

dato, A l'origine, e siano costruiti, nella stessa forma o in un'altra pure di 1ª specie, gli elementi $A'. B' (C'_{n-1} C'_{n-2} \ldots C'_2 C'_1) D'$, ciò che è sempre possibile (15). Facendo corrispondere projettivamente le coppie AA' BB' DD' se costruiamo il gruppo

$$A\,B\,C_{n-1}\,C_{n-2}\ldots C_2\,C_1\,D \;\overline{\wedge}\; A'\,B'\,C'_{n-1}\,C'_{n-2}\ldots C'_2\,C'_1\,D'$$

abbiamo $A.B(C_{n-1} C_{n-2} \ldots C_2 C_1) D$, (16), e quindi $n-1$ elementi $C_{n-1} C_{n-2} \ldots C_2 C_1$ che risolvono il problema.

19. Non è possibile un'altra soluzione $C''_{n-1} C''_{n-2} \ldots C''_2 C''_1$ poichè allora dovrebbe essere (16)

$$A\;\;B\,C_{n-1}\,C_{n-2}\ldots C_2\,C_1\,D \;\overline{\wedge}\; A\;\;B\,C''_{n-1}\,C''_{n-2}\ldots C''_2\,C''_1\,D\,,$$

ABD sarebbero tre elementi uniti, tutti gli altri dovrebbero pure essere uniti, e quindi ogni elemento C'' dovrebbe coincidere col corrispondente C.

20. Ecco un altro modo di risolvere il problema precedente.

Costruiamo i gruppi armonici

$$B\,D\,A\,C^1,\quad B\,C^1\,D\,C^2,\quad B\,C^2\,C^1\,C^3\,,\ldots, B\,C^{n-2}\,C^{n-3}\,C^{n-1};$$

l'elemento C^{n-1} è il primo C_{n-1} degli $n-1$ elementi cercati. Infatti dai gruppi armonici costruiti si deduce che $B.A(D\,C^1 \ldots C^{n-3}\,C^{n-2})\,C^{n-1}$, e quindi (16)

$$B\,A\,D\,C^1 \ldots C^{n-3}\,C^{n-2}\,C^{n-1} \;\overline{\wedge}\; A\;\;B\,C_{n-1}\,C_{n-2}\ldots C_2\,C_1\,D$$

ma la coppia AB si corrisponde in doppio modo, dunque ciò deve avvenire per tutte le altre e C^{n-1} deve coincidere con C_{n-1}. Gli elementi $C^{n-1}\,C^{n-2} \ldots C^2\,C^1$ sono i primi degli $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$, che dividono il segmento dato in $n, n-1, \ldots, 3, 2$ segmenti armonici rispetto all'origine data.

21. Questa costruzione ci fa vedere che $C_{n-1} C_{n-2} \ldots C_2 C_1$ si possono ottenere con successivi quarti armonici partendo dai tre elementi $A\;B\,D$, e che quindi appartengono al sistema armonico da loro determinato (7).

V. Serie armoniche.

22. Dati tre elementi $A_{-1}\,A_0\,A_{+1}$, di una forma fondamentale di 1ª specie, possiamo costruire i gruppi armonici

$$A_{-1}\;A_{+1}\;A_0\;A_\infty$$

$$A_\infty\;A_{+1}\;A_0\;A_{+2}\,,\quad A_\infty\;A_{+2}\;A_{+1}\;A_{+3}\,,\ldots, A_\infty\;A_{+(r-1)}\;A_{+(r-2)}\;A_{+r}\,,\ldots$$

$$A_\infty\;A_{-1}\;A_0\;A_{-2}\,,\quad A_\infty\;A_{-2}\;A_{-1}\;A_{-3}\,,\ldots, A_\infty\;A_{-(r-1)}\;A_{-(r-2)}\;A_{-r}\,,\ldots$$

Abbiamo così una *serie armonica* di elementi

$$\ldots A_{-r}\ldots A_{-2}\;A_{-1}\;A_0\;A_{+1}\;A_{+2}\ldots A_{+r}\ldots$$

$$A_\infty\,.$$

23. Essendo $A_0\,A_\infty$ separati da $A_{-1}\,A_{+1}$ segue che tutti gli elementi A coll'indice positivo si trovano in uno dei segmenti in cui $A_0\,A_\infty$ dividono la forma, mentre quelli coll'indice negativo si trovano nell'altro. Crescendo il valore assoluto dell'indice l'elemento si avvicina ad A_∞.

Eccettuato A_∞ tutti gli elementi si comportano nello stesso modo. Ciascuno è il coniugato armonico di A_∞ rispetto ai due consecutivi. Tutti si possono costruire quando è dato A_∞ e due elementi consecutivi $A_r\,A_{r+1}$ della serie.

24. Uno dei due segmenti in cui $A_r\,A_{r+n}$ dividono la forma contiene A_∞, l'altro

è diviso dagli elementi $A_{r+1} A_{r+2} \ldots A_{r+(n-2)} A_{r+(n-1)}$ in n segmenti armonici rispetto ad A_∞ come origine, è perciò che chiameremo A_∞ l'*origine* della serie armonica.

Data l'origine A_∞ e due elementi $A_r A_{r+n}$ della serie si possono costruire tutti gli altri. Basta dividere il segmento $A_r A_{r+n}$ in n segmenti armonici rispetto ad A_∞, e poi servirci di due elementi consecutivi (22).

25. Chiamiamo *simmetrici* rispetto ad A_r due elementi $A_i A_k$ che insieme ad A_r comprendono lo stesso numero di elementi A. La condizione di simmetria è espressa dalla relazione

$$i + k = 2r .$$

Abbiamo (24) $A_\infty . A_{i+1} (A_i A_{i-1} \ldots A_r \ldots A_{k-1} A_k) A_{k+1}$, ora se $i + k = 2r$ l'elemento A_r è il medio tra $A_{i-1} \ldots A_{k-1} A_k$, perciò le coppie analoghe ad $A_i A_k$, cioè (17)

Le coppie di elementi A simmetrici rispetto ad A_r formano un' involuzione che ha A_∞ A_r per elementi doppî.

26. Cominciando da un elemento qualunque A_0 saltiamo gli altri ad $n - 1$ ad $n - 1$, rimangono così gli elementi

$$\ldots . A_{-2n} A_{-n} A_0 A_{+n} A_{+2n} \ldots . .$$

Tre consecutivi $A_{(r-1)n} A_{rn} A_{(r+1)n}$ sono tali che $A_{(r-1)n} A_{(r+1)n}$ risultano simmetrici rispetto ad A_r, quindi (25) il gruppo A_∞ $A_{rn} A_{(r-1)n} A_{(r+1)n}$ è armonico, e perciò gli elementi considerati formano una serie armonica che ha A_∞ per origine.

Saltando ad $n - 1$ ad $n - 1$ gli elementi di una serie armonica si ha ancora una serie armonica, e colla stessa origine.

27. Se invece supponiamo che gli elementi

$$\ldots . A_{-2n} A_{-n} A_0 A_{+n} A_{+2n} \ldots .$$

formino una serie armonica coll'elemento A_∞ per origine, e dividiamo tutti i segmenti compresi da elementi successivi in n segmenti armonici rispetto ad A_∞, si ha ancora una serie armonica, cioè:

Dividendo ciascuno dei segmenti compresi dai successivi elementi di una serie armonica in n segmenti armonici rispetto all'origine, si ha ancora una serie armonica, e colla stessa origine.

Infatti dividiamo ciascuno dei due segmenti $A_{(r-1)n} A_{rn}$, $A_{rn} A_{(r+1)n}$ in n segmenti armonici rispetto ad A_∞, e sia

$$A_\infty . A_{(r-1)n} \{ A_{(r-1)n+1} \ldots A_{rn-1} \} A_{rn} \qquad A_\infty . A_{(r+1)n} \{ A_{(r+1)n-1} \ldots A_{rn+1} \} A_{rn} ,$$

allora viene

$$A_\infty A_{(r-1)n} A_{(r-1)n+1} \ldots A_{rn-1} A_{rn} \;\bar{\wedge}\; A_\infty A_{(r+1)n} A_{(r+1)n-1} \ldots A_{rn+1} A_{rn} .$$

Gli elementi A_∞ A_{rn} sono uniti, ed essendo (25) armonico il gruppo A_∞ $A_{rn} A_{(r-1)n} A_{(r+1)n}$, le coppie di elementi corrispondenti appartengono all'involuzione che ha A_∞ A_{rn} per elementi doppî, quindi sono armonici i gruppi

$$A_\infty A_{rn} A_{rn-1} A_{rn+1} , \ldots , A_\infty A_{rn} A_{(r-1)n+1} A_{(r+1)n-1} ,$$

ciò che dimostra il teorema.

28 La seguente è un'altra proprietà interessante che discende dal teorema (25) fondamentale delle serie armoniche.

Ritornando alla considerazione degli elementi $C^{n-1} C^{n-2} \ldots C^2 C^1$, che sono i primi

(20) tra quelli che dividono un segmento BD in $n, n-1, \ldots, 2, 3$ segmenti armonici rispetto all'origine A, dalla loro costruzione deduciamo che $A\,D\,C^1\,C^2 \ldots C^{n-2}\,C^{n-1}$ appartengono ad una serie armonica che ha per origine B, quindi due elementi $C^{i-1}\,C^{k-1}$ separano armonicamente $B\,C^{r-1}$ se

$$i + k = 2r\,.$$

VI. Scale armoniche.

29. Considerიamo una serie armonica

$$\ldots\ldots A_{-r} \ldots\ldots A_{-2}\,A_{-1}\,A_0\,A_{+1}\,A_{+2} \ldots A_{+r} \ldots\ldots,$$

di origine A_∞. Dividendo i segmenti, determinati da due elementi della serie, in segmenti armonici rispetto ad A_∞, abbiamo infiniti altri elementi della forma i quali fra loro e coi primi danno infiniti altri segmenti che ancora possono dividersi in segmenti armonici, sempre rispetto ad A_∞, costruendo ancora nuovi elementi della forma, ... Da queste operazioni, che possono essere indefinitamente proseguite, scaturiscono infiniti elementi il cui complesso diremo *scala armonica.*

30. Distingueremo gli elementi A_r della scala chiamandoli *principali,* e manterremo ad A_∞ il nome di origine. Tutti i segmenti $A_r\,A_{r+1}$, che non comprendono A_∞ e che sono determinati da due elementi principali consecutivi, saranno detti *segmenti principali.* Per divisione di un segmento della scala in n parti intenderemo la sua divisione in n segmenti armonici rispetto all'origine.

La divisione di un segmento della scala si fa per mezzo di $n-1$ elementi della scala che diremo *inseriti* tra gli estremi del segmento.

31. *Ogni elemento di una scala armonica si può costruire dividendo un segmento principale in un numero conveniente di parti.*

Dimostrato il teorema per due elementi $P_m\,Q_n$ è dimostrato per tutti quelli inseriti fra $P_m\,Q_n$.

L'elemento P_m sia l'm^o di quelli

$$P_1\,P_2 \ldots P_m \ldots P_{\rho-2}\,P_{\rho-1}$$

che dividono in ρ parti il segmento principale $A_r\,A_{r+1}$; Q_n sia l'n^o di quelli

$$Q_1\,Q_2 \ldots Q_n \ldots Q_{\sigma-2}\,Q_{\sigma-1}\,.$$

che dividono in σ parti il segmento principale $A_{r+(h-1)}\,A_{r+h}$; e gli elementi inseriti tra $P_m\,Q_n$ siano $\tau-1$.

Inseriamo $h.\,\rho\sigma\tau-1$ elementi tra $A_r\,A_{r+h}$, e saltiamone successivamente $\rho\sigma\tau-1$, essendo

$$h\,.\,\rho\sigma\tau-1 = h\,(\rho\sigma\tau-1) + (h-1)\,,$$

ne rimangono $h-1$ che devono essere necessariamente (19, 26) gli elementi principali $A_{r+1}\,A_{r+2} \ldots A_{r+(h-2)}\,A_{r+(h-1)}$. Ciascuno dei saltati sarà quindi inserito in un segmento principale, perciò resta da far vedere che saltiamo i $\tau-1$ inseriti tra $P_m\,Q_n$.

In ogni segmento principale

$$A_r\,A_{r+1},\quad A_{r+1}\,A_{r+2}\,,\ldots, A_{r+(h-2)}\,A_{r+(h-1)},\quad A_{r+(h-1)}\,A_{r+h}$$

abbiamo inserito $\rho\sigma\tau-1$ elementi, se quelli tra $A_r\,A_{r+1}$ si saltano $\sigma\tau-1$ a $\sigma\tau-1$, e quelli tra $A_{r+(h-1)}\,A_{r+h}$ si saltano $\rho\tau-1$ a $\rho\tau-1$, essendo

$$\rho\sigma\tau-1 = (\sigma\tau-1)\,\rho + (\rho-1) \qquad \rho\sigma\tau-1 = (\rho\tau-1)\,\sigma + (\sigma-1)\,,$$

si hanno $\rho - 1$ elementi inseriti tra $A_r A_{r+1}$, e $\sigma - 1$ tra $A_{r+(h-1)} A_{r+h}$, cioè gli elementi P, e gli elementi Q (19,26).

Degli $h.\rho\sigma\tau - 1$ elementi inseriti tra $A_r A_{r+h}$ ve ne sono $m.\sigma\tau - 1$, ed $n.\rho\tau - 1$, tra $A_r P_m$, ed $A_{r+(h-1)} Q_n$, quindi tra $P_m Q_n$ ve ne sono

$$N . \tau - 1 = (N - 1)\tau + (\tau - 1),$$

dove $N = \rho\sigma(h-1) + (n\rho - m\sigma)$. Saltandone successivamente $N - 1$ ne rimangono $\tau - 1$ tra $P_m Q_n$ ciascuno inserito in un segmento principale; questa è la conclusione che volevamo raggiungere.

Supponendo $\rho = 1\, \sigma = 1$ la dimostrazione si applica al caso in cui $P_m Q_n$ siano elementi principali $A_r A_{r+(h-1)}$.

Riassumendo: possiamo ritenere 1° che se il teorema è vero per un gruppo di elementi della scala è vero per tutti quelli inseriti tra i segmenti che determinano; 2° che è vero per i primi elementi della scala che si costruiscono, cioè per quelli inseriti tra due principali. Ciò basta per stabilire il teorema in tutta la sua generalità.

32. Conveniamo di rappresentare gli elementi principali e l'origine coi numeri

$$\ldots . - r, \ldots, -2, -1, \underset{\infty}{0}, +1, +2, \ldots, +r, \ldots$$

che sono gli indici delle A, con ciò ogni elemento principale determina un numero intero, e viceversa. In quanto agli altri elementi siccome ciascuno è inserito tra due principali consecutivi (31), se occupa il posto χ tra quelli che dividono il segmento $A_r A_{r+1}$ in τ parti converremo di rappresentarlo col numero $r + \frac{\chi}{\tau}$, facendo χ uguale successivamente a $0, 1, 2, \ldots, \tau - 2, \tau - 1, \tau$ si hanno gli elementi $A_r A_{r+1}$ e tutti i $\tau - 1$ inseriti fra loro. Inversamente un dato numero razionale ha sempre la forma $r + \frac{\chi}{\tau}$, dove $\chi < \tau$, e quindi rappresenta un solo elemento della scala, quello di posto χ tra i $\tau - 1$ che dividono $A_r A_{r+1}$ in τ parti.

Si può stabilire una corrispondenza univoca tra gli elementi di una scala armonica ed i numeri razionali.

Se λ è un numero razionale l'elemento $A\lambda$ corrispondente percorre la forma nel senso $A_0 A_{+r} A_\infty$, o nel senso opposto $A_0 A_{-r} A_\infty$, se λ aumenta, o diminuisce, e viceversa.

33. Abbiamo veduto come si trova il numero corrispondente ad un elemento costruito dividendo un segmento principale, adesso vediamo come si trova lo stesso numero quando l'elemento è determinato come quello di posto χ tra i $\tau - 1$ inseriti fra due qualunque a e b.

Gli elementi a e b siano P_m Q_n (31). I numeri

$$r + \frac{0}{\rho\sigma\tau}, r + \frac{1}{\rho\sigma\tau}, r + \frac{2}{\rho\sigma\tau}, \ldots, r + \frac{h . \rho\sigma\tau - 2}{\rho\sigma\tau}, r + \frac{h . \rho\sigma\tau - 1}{\rho\sigma\tau}, r + \frac{h . \rho\sigma\tau}{\rho\sigma\tau}$$

rappresentano gli elementi che dividono ogni segmento principale

$$A_r A_{r+1}, \quad A_{r+1} A_{r+2}, \ldots\ldots, A_{r+(h-2)} A_{r+(h-1)}, \quad A_{r+(h-1)} A_{r+h}$$

in $\rho\sigma\tau$ parti, cioè gli elementi $A_r A_{r+h}$ e gli $h.\rho\sigma\tau - 1$ inseriti. Saltandone successivamente $\sigma\tau - 1$, a partire da r, l'm^{o} che si trova, cioè

$$a = r + \frac{m . \sigma\tau}{\rho\sigma\tau} = r + \frac{m}{\rho},$$

è il numero di P_m; saltandone successivamente $\rho\tau - 1$, a partire da $r + (h-1)$, l'n^o che si trova, cioè

$$b = r + \frac{(h-1).\rho\sigma\tau + n.\rho\tau}{\rho\sigma\tau} = \left\{ r + (h-1) \right\} + \frac{n}{\sigma},$$

è il numero di Q_n.

Per avere i $\tau - 1$ inseriti tra $P_m Q_n$ ne saltiamo $N-1$ ad $N-1$, quindi il numero di quello che troviamo al posto χ è $r + \frac{m.\sigma\tau + \chi N}{\rho\sigma\tau}$, ovvero

$$a + \frac{\chi(b-a)}{\tau}$$

essendo (31)

$$N = \rho\sigma(h-1) + (n\rho - m\sigma) = \rho\sigma(b-a).$$

34. Supponiamo dati tre elementi arbitrarî della scala rappresentati dai numeri razionali $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, e poniamo

$$\lambda_1 = \lambda_3 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 + \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

come sempre è possibile.

Chiamiamo B l'elemento λ_3, D l'elemento $\lambda_3 + 2\alpha_1\alpha_2$, e $C^{i-1} C^{k-1}$ i primi degli elementi che dividono il segmento BD della scala in

$$i = 2\beta_1\alpha_2 \qquad k = 2\beta_2\alpha_1$$

parti.

Se

$$r = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$$

l'elemento C^{r-1}, primo tra quelli che dividono BD in r parti, è il coniugato armonico di B rispetto a $C^{i-1} C^{k-1}$ (28). I numeri che corrispondono rispettivamente agli elementi $C^{i-1} C^{k-1} C^{r-1}$ sono (33)

$$\lambda_1 = \lambda_3 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 + \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 + \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1},$$

dunque il coniugato armonico di λ_3 rispetto a $\lambda_1 \lambda_2$ è un elemento della scala rappresentante dal numero λ_4.

Dati tre elementi della scala anche il quarto armonico appartiene alla scala.

35. Abbiamo ottenuto

$$\lambda_4 - \lambda_3 = \frac{2}{\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}},$$

ma

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} \qquad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3}$$

quindi

$$\lambda_4 - \lambda_3 = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3}},$$

da cui

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = -1 .$$

I numeri corispondenti a quattro elementi armonici della scala formano un rapporto armonico.

VII. Coordinate degli elementi generatori di una forma fondamentale di prima specie.

36. Tutti gli elementi della scala si deducono da $A_{-1} A_0 A_{+1}$ con successivi quarti armonici; infatti per gli elementi principali la proprietà discende dalla loro costruzione (22), e per tutti gli altri si deduce osservando che vengono costruiti dividendo i segmenti principali in parti armoniche rispetto all'origine (21). Inversamente ogni elemento dedotto da $A_{-1} A_0 A_{+1}$ con quarti armonici appartiene alla scala (34), dunque:

Gli elementi di una scala armonica non sono altro che quelli di un sistema armonico (7).

37. Se un elemento E_l della forma non appartiene alla scala è costruito come limite di una serie S_c di elementi

$$\ldots . A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots . A_{\mu_m} \ldots . A_{\mu_{m+n}} \ldots .$$

della scala (8). I numeri razionali che corrispondono formano una serie

$$\ldots . \mu_1 \mu_2 \ldots . \mu_m \ldots \mu_{m+n} \ldots . ,$$

e siccome aumentando m, qualunque sia n, l'elemento A_{μ_m} si avvicina indefinitamente ad $A_{\mu_{m+n}}$ (4), così la differenza $\mu_{m+n} - \mu_m$ si può rendere piccola quanto si vuole (32). La serie dei numeri μ possiede il carattere di quelle che definiscono un limite irrazionale l [1]. Possiamo benissimo convenire di far corrispondere all'elemento E_l limite di S_c il numero l limite della serie dei numeri corrispondenti agli elementi di S_c.

Prendendo E_l come costruito da una legge equivalente (9), cioè come limite di un' altra serie S'_c di elementi

$$\ldots . A'_{\mu_1} A_{\mu'_2} \ldots . A'_{\mu_m} \ldots . A'_{\mu_{m+n}} \ldots .$$

della scala, il numero corrispondente l non cambia. Infatti se

$$\ldots . . \mu'_1 \mu'_2 \ldots . \mu'_m \ldots . \mu'_{m+n} \ldots .$$

è la serie dei numeri razionali corrispondenti agli elementi di S'_c, siccome E_l è limite di S_c ed S'_c, aumentando m gli elementi $A_{\mu_m} A'_{\mu_m}$ (5) si avvicinano indefinitamente, quindi la differenza $\mu_m - \mu'_m$ diviene piccola quanto si vuole, e le serie dei numeri $\mu \mu'$ hanno lo stesso limite l [2].

Inversamente si può dimostrare che ogni numero irrazionale l determina un elemento E_l della forma, ed uno solo, poichè E_l non cambia considerando l come limite di due diverse serie di numeri razionali.

[1] Vedi p. e. Cantor, *Ueber die Ausdenhung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*. M. Annalen Bd. V.

[2] Cantor l. c.

Si può stabilire una corrispondenza univoca tra gli elementi d'una forma fondamentale di 1ª specie ed i numeri reali (razionali ed irrazionali).

38. Se E_α E_β sono due elementi della forma limiti delle serie

$$\ldots\ldots A_{\lambda_1}\ A_{\lambda_2}\ldots\ldots A_{\lambda_m}\ldots\ldots A_{\lambda_{m+n}}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots A_{\mu_1}\ A_{\mu_2}\ldots\ldots A_{\mu_m}\ldots\ldots A_{\mu_{m+n}}\ldots\ldots,$$

rappresentati dai numeri $\alpha\beta$ limiti delle serie

$$\ldots\ldots \lambda_1\ \lambda_2\ldots \lambda_m\ldots\ldots \lambda_{m+n}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \mu_1\ \mu_2\ldots \mu_m\ldots\ldots \mu_{m+n}\ldots\ldots,$$

l'elemento di posto χ tra quelli che dividono il segmento E_α E_β in τ parti rispetto ad A_∞ è il limite a cui tende l'elemento di posto χ tra quelli che dividono A_{λ_m} A_{μ_m} in τ parti (6), quindi viene rappresentato dal numero $lim\left\{\lambda_m+\frac{\chi(\mu_m-\lambda_m)}{\tau}\right\}$, ossia da

$$\alpha+\frac{\chi(\beta-\alpha)}{\tau}. \text{ (1)}$$

Qualunque siano i numeri reali $\alpha\beta$ il numero $\alpha+\frac{\chi(\beta-\alpha)}{\tau}$ rappresenta sempre l'elemento di posto χ tra quelli che dividono in τ parti il segmento $\alpha\beta$.

39. Le considerazioni svolte (34,35) per determinare la relazione che lega i numeri di quattro elementi armonici della scala applicate al caso di quattro elementi qualunque della forma, ma pure armonici, portano a concludere che se i numeri corrispondenti sono $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ abbiamo sempre

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}=-1\,.$$

I numeri che corrispondono a quattro elementi armonici formano un rapporto armonico.

40. Conoscendo la relazione che lega i numeri corrispondenti a quattro elementi armonici, e sapendo dividere un segmento in parti armoniche rispetto ad una data origine con costruzioni di successivi quarti armonici, possiamo trovare facilmente che dato un segmento compreso dagli elementi $\lambda_3\lambda_4$ ed un elemento origine λ_1, se λ_2 occupa il posto χ tra quelli che dividono il segmento in τ parti armoniche rispetto all'origine si ha

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_4}:\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_4}=(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4)=-\frac{\tau-\chi}{\chi}\,.$$

Facendo $\tau=2$ $\chi=1$ si ricade nella relazione che lega i numeri corrispondenti a 4 elementi armonici.

41. Date ora due forme projettive (13), sovrapposte o no, supponiamo che i loro elementi siano rappresentati univocamente dai numeri $\lambda\mu$ per mezzo di due scale, e consideriamo due quaterne corrispondenti

$$A_{\lambda_1}\ A_{\lambda_2}\ A_{\lambda_3}\ A_{\lambda_4}\ \barwedge\ A'_{\mu_1}\ A'_{\mu_2}\ A'_{\mu_3}\ A'_{\mu_4}\,.$$

(1) Cantor l. c.

Due elementi A_{λ_1} A_{λ_2} separano necessariamente gli altri due A_{λ_3} A_{λ_4}, e l'elemento A_{λ_2} si può sempre costruire come limite di un elemento A_{λ_m} della scala determinata da A_{λ_3} A_{λ_4} ed A_{λ_1} come origine. Se A_{λ_m} si ottiene prendendo l'elemento di posto χ tra quelli che dividono il segmento A_{λ_3} A_{λ_4} in τ parti armoniche rispetto ad A_{λ_1}, ciò che è sempre possibile (31), segue che

$$(\lambda_1 \lambda_m \lambda_3 \lambda_4) = -\frac{\tau - \chi}{\chi}.$$

Nella forma corrispondente A_{λ_m} dà un elemento A'_{μ_m}, il quale pure occupa il posto χ tra quelli che dividono A'_{λ_3} A'_{λ_4} in τ parti armoniche rispetto ad A'_{λ_1}, quindi

$$(\mu_1 \mu_m \mu_3 \mu_4) = -\frac{\tau - \chi}{\chi},$$

e

$$(\lambda_1 \lambda_m \lambda_3 \lambda_4) = (\mu_1 \mu_m \mu_3 \mu_4);$$

ma quando A_{λ_m} si avvicina ad A_{λ_2}, A'_{μ_m} si avvicina ad A'_{μ_2} (12), dunque

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4).$$

Osservando che un gruppo di quattro elementi è sempre projettivo a se stesso deduciamo che qualunque sia la scala è costante il rapporto anarmonico dei numeri corrispondenti a 4 elementi, possiamo chiamarlo perciò rapporto anarmonico del gruppo e dire:

La condizione necessaria e sufficiente per la projettività di due gruppi, ciascuno di quattro elementi, è espressa dall'uguaglianza dei loro rapporti anarmonici.

Dati quattro elementi è dato il loro rapporto anarmonico, quindi attribuendo a tre i numeri $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, arbitrarî, si può sempre determinare in modo unico il numero λ_4 corrispondente al quarto. Segue che

La corrispondenza tra i numeri λ e gli elementi $A\lambda$ è completamente stabilita prendendo ad arbitrio tre elementi ed i numeri corrispondenti.

42. Possiamo porre $\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, allora basta conoscere dei valori proporzionali a $\xi_1 \xi_2$ per determinare un elemento della forma, e viceversa. Chiameremo $\xi_1 \xi_2$ le coordinate dell'elemento corrispondente al numero $\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_2}$. Per mezzo delle coordinate il rapporto anarmonico di quattro elementi viene espresso da

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{(\xi_1^{(1)} \xi_2^{(3)})\,(\xi_1^{(2)} \xi_2^{(4)})}{(\xi_1^{(2)} \xi_2^{(3)})\,(\xi_1^{(1)} \xi_2^{(4)})},$$

dove

$$(\xi_1^{(r)} \xi_2^{(s)}) = \xi_1^{(r)} \xi_2^{(s)} - \xi_1^{(s)} \xi_2^{(r)},$$

quindi per due gruppi projettivi abbiamo

$$\frac{(\xi_1^{(1)} \xi_2^{(3)})\,(\xi_1^{(2)} \xi_2^{(4)})}{(\xi_1^{(2)} \xi_2^{(3)})\,(\xi_1^{(1)} \xi_2^{(4)})} = \frac{(\eta_1^{(1)} \eta_2^{(3)})\,(\eta_1^{(2)} \eta_2^{(4)})}{(\eta_1^{(2)} \eta_2^{(3)})\,(\eta_1^{(1)} \eta_2^{(4)})}.$$

Date tre coppie di elementi corrispondenti vediamo che le coordinate di altri due, pure corrispondenti, sono legate da una relazione

$$A\xi_1 \eta_1 + B\xi_1 \eta_2 + C\xi_2 \eta_1 + D\xi_2 \eta_2 = 0 .$$

Le coordinate degli elementi corrispondenti in due forme projettive sono legate da una relazione lineare.

La proprietà inversa si dimostra subito partendo dalla relazione lineare, e supponendo che siano date quattro coppie corrispondenti, infatti allora

$$\begin{aligned}
A\xi_1^{(1)} \eta_1^{(1)} + B\xi_1^{(1)} \eta_2^{(1)} + C\xi_2^{(1)} \eta_1^{(1)} + D\xi_2^{(1)} \eta_2^{(1)} = 0 \\
A\xi_1^{(2)} \eta_1^{(2)} + B\xi_1^{(2)} \eta_2^{(2)} + C\xi_2^{(2)} \eta_1^{(2)} + D\xi_2^{(2)} \eta_2^{(2)} = 0 \\
A\xi_1^{(3)} \eta_1^{(3)} + B\xi_1^{(3)} \eta_2^{(3)} + C\xi_2^{(3)} \eta_1^{(3)} + D\xi_2^{(3)} \eta_2^{(3)} = 0 \\
A\xi_1^{(4)} \eta_1^{(4)} + B\xi_1^{(4)} \eta_2^{(4)} + C\xi_2^{(4)} \eta_1^{(4)} + D\xi_2^{(4)} \eta_2^{(4)} = 0 ,
\end{aligned}$$

ed eliminando i coefficienti si ha

$$\begin{vmatrix}
\xi_1^{(1)} \eta_1^{(1)} & \xi_1^{(1)} \eta_2^{(1)} & \xi_2^{(1)} \eta_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} \eta_2^{(1)} \\
\xi_1^{(2)} \eta_1^{(2)} & \xi_1^{(2)} \eta_2^{(2)} & \xi_2^{(2)} \eta_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} \eta_2^{(2)} \\
\xi_1^{(3)} \eta_1^{(3)} & \xi_1^{(3)} \eta_2^{(3)} & \xi_2^{(3)} \eta_1^{(3)} & \xi_2^{(3)} \eta_2^{(3)} \\
\xi_1^{(4)} \eta_1^{(4)} & \xi_1^{(4)} \eta_2^{(4)} & \xi_2^{(4)} \eta_1^{(4)} & \xi_2^{(4)} \eta_2^{(4)}
\end{vmatrix} = 0 ,$$

da cui

$$\frac{(\xi_1^{(1)} \xi_2^{(3)}) (\xi_1^{(2)} \xi_2^{(4)})}{(\xi_1^{(2)} \xi_2^{(3)}) (\xi_1^{(1)} \xi_2^{(4)})} = \frac{(\eta_1^{(1)} \eta_2^{(3)}) (\eta_1^{(2)} \eta_2^{(4)})}{(\eta_1^{(2)} \eta_2^{(3)}) (\eta_1^{(1)} \eta_2^{(4)})} ,$$

e finalmente

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) .$$

Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1880.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 5 giugno 1881.

(Con una tavola)

Ho l'onore di presentare all'Accademia la cinquantanovesima effemeride e relativa statistica del fiume Tevere.

In conformità di quelle degli anni precedenti l'effemeride che presento contiene il registro delle altezze del pelo d'acqua del Tevere, misurate al mezzodì di ciaschedun giorno del decorso anno 1880 all'idrometro di Orte, ed a quello di Ripetta, che è quanto dire prima e dopo la confluenza dell'Aniene.

Contemporaneamente presento l'effemeride o registro dell'altezza del pelo d'acqua del fiume Aniene misurata all'idrometro esistente all'origine dei cunicoli presso Tivoli.

Accompagno inoltre, come di consueto, i suddetti registri o prospetti numerici colle rispettive rappresentazioni grafiche o diagrammi.

Ritenendo che il limite della magra del Tevere corrisponda a metri 6,00 della scala idrometrica di Ripetta; che lo stato ordinario sia compreso di 6 agli 8 metri; quello d'intumescenza dagli 8 ai 12 e quello di vera e minacciosa piena dai 12 metri in su, se si esamina la relativa effemeride, e si enumerano i giorni in cui il livello del Tevere oscillò fra detti limiti, si deduce che il Tevere nel decorso anno 1880 corse in magra per giorni 121, ossia per circa $^1/_3$ dell'anno; in stato ordinario per giorni 214, ossia per oltre $^4/_7$ dell'anno; in stato d'intumescenza per giorni 29, ossia per circa $^1/_{12}$ dell'anno, ed in soli due dì (cioè nei giorni 11 e 23 di novembre) presentò i sintomi di vera e minacciosa piena, che però furono di breve durata.

Nella prima di dette piene l'altezza di metri 12,38 segnata al mezzodì dell'11 novembre non fu precisamente l'altezza massima raggiunta dalle acque, essendosi il colmo di piena verificato alle ore 2 antimeridiane di detto giorno coll'altezza di metri 12,64; altezza che la piena mantenne stazionaria per ben tre ore.

Similmente l'altezza di metri 13,39 segnata al mezzodì del giorno 23 di detto mese, si approssimò di molto, ma non fu esattamente l'altezza massima della piena, il colmo della quale corrispose a metri 13,41 e si verificò alle ore 10 antimeridiane del giorno suddetto.

Si deduce inoltre dal detto esame qualmente l' anno 1880 sia da annoverarsi fra quelli in cui il Tevere fu povero di acque; essendochè l' altezza media di metri 6,521 può annoverarsi fra le più basse, e nei cinquantanove anni di osservazioni che fin qui si posseggono, soltanto diecinove volte si riscontrò un' altezza media minore della sopradetta. In tutti gli altri anni invece l'altezza media del livello del Tevere risultò sempre maggiore.

Finalmente presento i registri delle altezze orarie del pelo di acqua del Tevere misurate agl'idrometri di Ripetta e di Ripagrande durante le piene dei giorni 11 e 23 novembre; non che i relativi diagrammi.

Il confronto di dette misure, moltiplicato di numero colle successive osservazioni, costituirà, come dissi altra volta, un prezioso elemento per giudicare il vantaggio che saranno per recare a Roma i lavori di sistemazione del Tevere in corso di esecuzione. I diagrammi poi colla doppia gibbosità che presentano e di cui ho tenuto più volte parola, confermano sempre più come le piene del Tevere presentino costantemente due periodi distinti. Il primo, ordinariamente innocuo, tutto induce a ritenere che provenga dalle acque cadute nei bacini tributarî prossimi a Roma, e fra questi sopratutto a quello dell' Aniene. Il secondo invece, costantemente il più dannoso, è dovuto evidentemente all' afflusso delle acque cadute nei bacini tributarî più lontani.

PIENA DAL 5 AL 12 NOVEMBRE 1880

REGISTRO DELLE ALTEZZE DEL PELO DELL'ACQUA DEL FIUME TEVERE

		Idrometri	
		di Ripetta	di Ripagrande
5 Novembre ore	12 mer.	8,81	2,28
»	6 pom.	8,88	3,05
»	12 »	9,21	3,29
6 » »	6 ant.	9,28	3,41
»	12 mer.	9,20	3,34
»	6 pom.	8,96	3,11
»	12 »	8,60	2,77
7 » »	6 ant.	8,15	
»	12 mer.	7,78	1,98
8 » »	12 »	6,97	1,23
9 » »	12 »	7,30	1,56
10 » »	9 ant.	8,80	
»	12 mer.	10,56	4,15
»	3 pom.	11,50	5,12
»	4 »	11,90	
»	5 »	12,02	
»	6 »	12,14	5,97
»	7 »	12,25	
»	8 »	12,36	
»	9 »	12,45	6,30
»	10 »	12,50	6,30
»	11 »	12,54	6,30
»	12 »	12,60	6,30
11 Novembre »	1 ant.	12,63	
»	2 »	12,64	

		Idrometri	
		di Ripetta	di Ripagrande
11 Novembre ore	3 ant.	12,64	6,28
»	4 »	12,64	
»	5 »	12,61	
»	6 »	12,59	6,24
»	7 »	12,55	
»	8 »	12,50	
»	9 »	12,46	6,16
»	10 »	12,44	
»	11 »	12,41	
»	12 mer.	12,38	6,09
»	1 pom.	12,36	
»	2 »	12,32	
»	3 »	12,29	6,02
»	4 »	12,27	
»	5 »	12,23	
»	6 »	12,14	5,91
»	7 »	12,04	
»	8 »	11,94	
»	9 »	11,78	5,72
»	10 »	11,39	
»	12 mer.	11,39	5,12
12 » »	3 ant.	10,48	4,48
»	6 »	9,85	3,90
»	12 mer.	8,80	2,94

PIENA DAL 18 AL 25 NOVEMBRE

		di Ripetta	di Ripagrande
18 Novembre ore	12 mer.	6,57	
»	6 pom.	8,30	2,00
»	9 »	10,00	3,48
»	12 »	11,03	4,98
19 » »	3 ant.	11,57	5,31
»	6 »	11,80	5,64
»	8 »	11,89	
»	9 »	11,90	
»	12 mer.	11,97	5,71
»	2 »	12,01	
»	3 »	12,04	5,77
»	4 »	12,07	

		di Ripetta	di Ripagrande
19 Novembre ore	5 pom.	12,11	
»	6 »	12,14	5,86
»	7 »	12,17	
»	8 »	12,19	
»	9 »	12,19	5,94
»	10 »	12,18	
»	11 »	12,15	
»	12 »	12,09	5,86
20 » »	1 ant.	12,00	
»	3 »	11,73	5,57
»	6 »	11,14	5,12
»	9 »	10,49	4,58

		Idrometri di Ripetta	di Ripagrande
20 Novembre	ore 12 mer.	9,90	4,03
	» 6 pom.	9,00	
21 »	» 12 mer.	8,00	2,26
22 »	» 6 ant.	10,51	4,45
	» 9 »	10,92	
	» 12 mer.	11,55	5,26
	» 1 pom.	11,80	
	» 2 »	12,03	
	» 3 »	12,23	5,90
	» 4 »	12,44	
	» 5 »	12,61	
	» 6 »	12,75	6,40
	» 7 »	12,88	6,47
	» 8 »	12,96	6,55
	» 9 »	13,06	6,64
	» 10 »	13,12	6,69
	» 11 »	13,20	6,72
	» 12 »	13,25	6,78
23 »	» 1 ant.	13,29	6,82
	» 2 »	13,33	6,86
	» 3 »	13,38	6,87
	» 4 »	13,39	6,88
	» 5 »	13,40	6,90
	» 6 »	13,40	6,91
	» 7 »	13,40	6,93
	» 8 »	13,40	6,93
	» 9 »	13,40	6,93
	» 10 »	13,41	6,93

		Idrometri di Ripetta	di Ripagrande
23 Novembre	ore 11 ant.	13,39	6,93
	» 12 mer.	13,39	6,93
	» 1 pom.	13,36	6,93
	» 2 »	13,36	6,92
	» 3 »	13,33	6,90
	» 4 »	13,30	6,88
	» 5 »	13,28	6,87
	» 6 »	13,26	6,85
	» 7 »	13,24	6,84
	» 8 »	13,19	6,81
	» 9 »	13,14	6,78
	» 10 »	13,10	6,75
	» 11 »	13,04	6,72
	» 12 »	12,97	6,65
24 »	» 1 ant.	12,87	6,59
	» 2 »	12,81	6,54
	» 3 »	12,67	6,46
	» 4 »	12,57	6,36
	» 5 »	12,39	6,25
	» 6 »	12,22	6,12
	» 7 »	11,64	5,62
	» 12 mer.	10,97	5,02
	» 3 pom.	10,35	4,52
	» 12 »	9,78	3,97
	» 12 »	8,77	3,25
25 »	» 6 ant.	8,49	2,81
	» 12 mer.	8,21	2,52

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo di acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Orte al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1880.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	1,65	1,61	1,70	1,68	1,76	2,18	1.66	1,42	1,58	1,33	1,43	1,94
2	1,65	1,59	1,67	1,61	1,90	1,90	1,64	1,42	1,47	1,32	1,42	1,93
3	1,63	1,58	1,67	1,60	2,45	1,81	1,61	1,42	1,46	1,32	1,42	1,92
4	1,62	1,56	1,66	1,60	2,65	1,78	1,58	2,32	1,37	1,32	1,98	1,90
5	1,62	1,55	1,65	1,63	2,24	1,78	1,55	1,77	1,35	1,32	3,00	1,88
6	1,61	1,54	1,65	1,67	2,08	2,62	1,53	1,57	1,36	1,31	2,54	1,87
7	1,62	1,54	1,64	1,88	1,99	2,05	1,51	1,55	1,36	1,31	2,03	1,85
8	1,63	1,53	1,64	3,77	1,98	1,91	1,49	2,60	1,35	1,31	2,27	1,83
9	1,61	1,53	1,62	3,20	3,10	1,84	1,48	1,62	1,34	1,31	1,77	1,82
10	1,59	1,53	1,60	2,68	3,77	1,80	1,48	1,55	1,34	1,33	5,67	1,82
11	1,58	1,53	1,59	2,28	2,66	1,76	1,48	1,56	1,34	2,04	3,17	1,82
12	1,59	1,53	1,59	2,26	2,40	1,70	1,48	1,51	1,34	4,83	2,19	1,81
13	1,59	1,54	1,58	2,20	2,32	1,68	1,47	1,43	1,36	3,52	2,04	1,79
14	1,58	1,85	1,57	2,05	2,70	1,66	1,45	1,41	1,39	2,78	1,94	1,78
15	1,60	1,69	1,55	1,92	2,36	1,66	1,45	1,38	1,68	2,08	1,87	1,77
16	1,59	1,65	1,54	1,83	2,21	1,75	1,45	1,38	1,76	1,76	1,83	1,76
17	1,58	1,63	1,55	1,84	2,10	1,78	1,44	1,37	1,86	1,65	1,78	1,76
18	1,57	1,61	1,57	2,82	2,05	1,75	1,44	1,37	1,59	1,58	5,42	1,75
19	1,58	1 61	1,57	2,20	2.38	1,70	1,44	1,36	1,56	1,63	5,14	1,75
20	1,59	1,64	1,57	2.08	2,83	1,65	1,44	1,36	1,56	2.55	2,50	1,88
21	1,59	1,67	1,57	1,98	2,55	1,63	1,43	1,35	1,58	1,90	3,02	1,77
22	1,63	1,63	1,58	1,85	2,21	2,03	1,43	1,34	1,58	1,69	6,84	1,76
23	1.63	1,61	1,59	1,94	2,06	1,72	1,43	1,34	1,62	1,63	5,13	1,75
24	1,59	1,65	1,60	1,89	1,99	1,64	1,44	1,33	1,41	1,56	2,77	1,74
25	1,57	1,75	1,60	1,83	1,94	1,62	1,43	1,33	1,36	1,51	2,32	1,74
26	1,55	1,74	1,59	1,77	1,90	1,61	1,43	1,33	1,34	1,48	2,08	1,90
27	1,58	1,74	1,60	1,75	1,87	1,61	1,42	1.33	1,35	1,48	2,99	2,06
28	1,55	1,72	1,63	1,79	1,81	1,59	1,42	1,33	1,34	1,47	1,97	1,95
29	1,56	1,75	1,69	1,78	1,79	1,59	1,42	1,33	1,34	1,47	1,96	1,85
30	1,58		1,82	1,90	1,78	1,57	1,42	1,44	1,33	1,46	1,95	1,93
31	1,62		1,90		1,90		1,42	1,45		1,45		1,90
Sommata	49,53	47,10	50,35	61.28	69,73	53,37	45,76	46,27	43,67	54,70	82,44	56,98
Media	1,60	1,62	1,62	2,04	2,25	1,78	1,48	1,49	1,46	1,76	2,75	1,84
Massima	1,65	1,85	1,90	3,77	3,77	2,62	1,66	2,60	1,86	4,83	6,84	2,06
Minima	1,55	1,53	1,54	1,60	1,76	1,57	1,42	1,33	1,33	1,31	1,42	1,74
Differenza	0,10	0,32	0,36	2,17	2,01	1,05	0,24	1,27	0,53	3,52	5,42	0,32

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo di acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1880.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	6,22	6,05	6,26	6,28	6,56	6,77	6,04	5,73	5,92	5,82	5,87	6,72
2	6,22	6,06	6,18	6,10	6,46	7,25	6,02	5,73	6,12	5,79	5,86	6,63
3	6,21	6,06	6,14	6,10	6.85	6,76	5,99	5,74	6,25	5,79	5,89	6,59
4	6,20	6,04	6,11	6,05	9,00	6,57	5,98	5,77	5,93	5,79	5,88	6,58
5	6,17	6,03	6,09	6,02	8,20	6,50	5,96	6,62	5,90	5,79	8,81	6,46
6	6,17	6,00	6,07	6,14	7,57	6,35	5,94	6,12	5,85	5,78	9,20	6,42
7	6,15	5,99	6,05	6,40	7,20	7,72	5,92	5,91	5,82	5,78	7,78	6,37
8	6,14	5,98	6,05	8,70	7,01	6,85	5,91	8,37	5,81	5,77	6,97	6,35
9	6,12	5,98	6,03	10,74	8,63	6,68	5,89	7,10	5,79	5,83	7,30	6,30
10	6,10	5,98	6,02	9,25	10,08	6,54	5,86	6,27	5,77	5,80	10,56	6,28
11	6,09	5,98	5,99	8,30	9,90	6,45	5,87	6,11	5,76	5,93	12,38	6,24
12	6,08	6,08	6,99	7,89	8,42	6,39	5,85	5,99	5,83	5,77	8,80	6,23
13	6,08	6,28	5,98	7,54	7,87	6,34	5,89	5,97	5,84	11,78	7,47	6,20
14	6,07	6,40	5,96	7,25	9,54	6,30	5,85	5,90	5,84	8,86	7,06	6,18
15	6,06	6,45	5,94	7,05	8,33	6,29	5,85	5,88	6,58	8,09	6,82	6,16
16	6,07	6,31	5,93	6,86	7,98	6,27	5,85	5,84	6,25	7,32	6,65	6,15
17	6,06	6,22	5,93	6,79	7,58	6,37	5,83	5,92	6,19	6,62	6,55	6,14
18	6,06	6,17	5,93	7,07	7,35	6,54	5,82	5,85	6,75	6,37	6,57	6,13
19	6,05	6,14	5,93	8,30	7,18	6,39	5,82	5,85	6,17	6,24	11,97	6,11
20	6,05	6,11	5,94	7,75	7,69	6,26	5,80	5,81	5,96	6,19	9,90	6,16
21	6,03	6,10	5,93	7,25	8,66	6,19	5,78	5,78	6,05	7,06	8,00	6,25
22	6,00	6,15	5,93	7,06	8,06	6,23	5,78	5,77	6,02	6,41	11,55	6,18
23	5,93	6,12	5,93	6,89	7,50	6,73	5,77	5,77	6,02	6,26	13,39	6,18
24	5,99	6,14	5,93	6,80	7,24	6,30	5,77	5,75	5,96	6,14	10,97	6,16
25	6,00	6,24	5.92	6,76	7,08	6,19	5,76	5,75	5,88	6,06	8,21	6,16
26	6,01	6,34	5,92	6,61	6,95	6,15	5,76	5,85	5,87	6,00	7,67	6,45
27	6,01	6,36	5,92	6,56	6,83	6,14	5,75	5,80	5,87	5,96	7,35	6,32
28	6,03	6,30	5,93	6,50	6,74	6,10	5,74	5,79	5,88	5,96	7,15	6,46
29	6,03	6,25	5,97	6,50	6,68	6,09	5,72	5,78	5,86	5,94	6,99	6,35
30	6,03		6,04	6,49	6,67	6,09	5,73	5,85	5,84	5,93	6,84	6,25
31	6,05		6,14		6,63		5,73	5,96		5,92		6,24
Sommata	188,48	178,31	186,08	214,00	238,44	193,79	181,23	186,33	179,58	198,75	246,41	195,40
Media	6,08	6,15	6,00	7,13	7,69	6,46	5,85	6,01	5,99	6,41	8,21	6,30
Massima	6,22	6,45	6,26	10,74	10,08	7,72	6,04	8,37	6,75	11,78	13,39	6,72
Minima	5,93	5,98	5,92	6,02	6,46	6,09	5,72	5,73	5,76	5,77	5,86	6,11
Differenza	0,29	0,47	0,34	4,72	3,62	1,63	0,32	2,64	0,99	6,01	7,53	0,61

Effemeride dell'Aniene, ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo di acqua del Fiume Aniene all'idrometro esistente all' imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1880.

GIORNI del mese	**Gennaio** Altezza osservata Met. lin.	**Febbraio** Altezza osservata Met. lin.	**Marzo** Altezza osservata Met. lin.	**Aprile** Altezza osservata Met. lin.	**Maggio** Altezza osservata Met. lin.	**Giugno** Altezza osservata Met. lin.	**Luglio** Altezza osservata Met. lin.	**Agosto** Altezza osservata Met. lin.	**Settembre** Altezza osservata Met. lin.	**Ottobre** Altezza osservata Met. lin.	**Novembre** Altezza osservata Met. lin.	**Dicembre** Altezza osservata Met. lin.
1	1,40	1,40	1,40	1,60	1,60	1,50	1,50	1,20	1,20	1,20	1,10	1,20
2	1,40	1,38	1,40	1,50	1,60	1,50	1,50	1,20	1,20	1,20	1,10	1,20
3	1,40	1,38	1,40	1,50	1,80	1,50	1,50	1,20	1,30	1,15	1,10	1,20
4	1,40	1,38	1,40	1,45	1,70	1,50	1,47	1,10	1,30	1,15	1,30	1,20
5	1,40	1,38	1,40	1,40	1,60	1,50	1,47	1,10	1,30	1,15	2,60	1,20
6	1,40	1,38	1,40	1,55	1,60	1,50	1,47	1,10	1,30	1,10	1,50	1,20
7	1,40	1,38	1,40	2,60	2,20	1,50	1,47	1,10	1,20	1,10	1,30	1,20
8	1,40	1,38	1,40	3,40	2,20	1,50	1,45	1,10	1,15	1,10	1,20	1,20
9	1,40	1,38	1,40	2,50	2,00	1,50	1,40	1,10	1,10	1,10	1,20	1,20
10	1,40	1,38	1,40	2,00	1,70	1,50	1,40	1,10	1,10	1,10	1,40	1,20
11	1,40	1,38	1,40	2,00	1,70	1,50	1,40	1,07	1,10	1,10	1,30	1,15
12	1,40	1,60	1,38	1,50	1,70	1,50	1,10	1,07	1,10	1,10	1,30	1,15
13	1,40	1,60	1,38	1,50	1,60	1.50	1,40	1,07	1,10	1,30	1,25	1,15
14	1,40	1,45	1,38	1,50	1,70	1,50	1.40	1,07	1,10	1,30	1,25	1,15
15	1,40	1,45	1,38	1,50	2,00	1,45	1,40	1,05	1,10	1,20	1,20	1,15
16	1,40	1,40	1,38	1,50	1,80	1,50	1,40	1,05	1,60	1,20	1,20	1,15
17	1,40	1,40	1,38	1,70	1,60	1,50	1,35	1,05	1,40	1,20	1,20	1,15
18	1,40	1,40	1,38	1,60	1,60	1,50	1,35	1,05	1,20	1,20	1,20	1,10
19	1,40	1,40	1,38	2,00	1,60	1,50	1,35	1,05	1,20	1,20	2,20	1,10
20	1,45	1,40	1,38	1,70	1,60	1,50	1,30	1,05	1,20	1,20	1,50	1,10
21	1,45	1,40	1,38	1,60	1,60	1,50	1,30	1,05	1,40	1,20	1,40	1,20
22	1,45	1,40	1,38	1,60	1,60	1,50	1,20	1,05	1,30	1,20	1,40	1,20
23	1,45	1,40	1,38	1,60	1,60	1,50	1,20	1,00	1,30	1,20	1,90	1,20
24	1,50	2,20	1,38	1,60	1,60	1,50	1,20	1,00	1,20	1,20	2,00	1,20
25	1,50	1,90	1,38	1,60	1,60	1,50	1,20	1,00	1,20	1,20	1,80	1,20
26	1,50	1,50	1,38	1,60	1,60	1,50	1,20	1,00	1,20	1,15	1,40	1,20
27	1,50	1,45	1,38	1,60	1,60	1,50	1,20	1,00	1,20	1,15	1,30	1,20
28	1,50	1,40	1,38	1,60	1,60	1,60	1,20	1,00	1,40	1,10	1,30	1,20
29	1,50	1,40	1,38	1,60	1,60	1,55	1,20	1,00	1,20	1,10	1,25	1,20
30	1,50		1,40	1,60	1,55	1,50	1,20	1,20	1,20	1,10	1,20	1,20
31	1,50		1,70		1,50		1,20	1,20		1,10		1,20
Sommata	44,40	42,35	43,34	52,00	52,35	45,10	41,68	33,38	36,85	36,05	42,35	36,55
Media	1,43	1,46	1,40	1,73	1,69	1,50	1,34	1,08	1,23	1,16	1,41	1,18
Massima	1,50	2,20	1,70	3,40	2,20	1,60	1,50	1,20	1,60	1,30	2,60	1,20
Minima	1,40	1,38	1,38	1,40	1,50	1,45	1,20	1,00	1,10	1,10	1,10	1,20
Differenza	0,10	0,82	0,32	2,00	0,70	0,15	0,30	0,20	0,50	0,20	1,50	0,10

Anno 1881.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata	Media	Massima	Minima	
	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	49,53	1,60	1,65	1,55	0,10
Febbraio	47,10	1,62	1,85	1,53	0,32
Marzo	50,35	1,62	1,90	1,54	0,36
Aprile	61,28	2,04	3,77	1,60	2,17
Maggio	69,73	2,25	3,77	1,76	1,01
Giugno	53,37	1,78	2,62	1,57	1,05
Luglio	45,76	1,48	1,66	1,42	0,24
Agosto	46,27	1,49	2,60	1,33	1,27
Settembre	43,67	1,46	1,86	1,33	0,53
Ottobre	54,70	1,76	4,83	1,31	3,52
Novembre	82,44	2,75	6,84	1,42	5,42
Dicembre	56,98	1,84	2,06	1,74	0,32
	661,18				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{661,18}{366} = 1,8065$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 6,84 } differenza massima 5,53.
» minima » » 1,31 }

Anno 1881.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata	Media	Massima	Minima	
	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	188,48	6,08	6,22	5,93	0,29
Febbraio	178,31	6,15	6,45	5,98	0,47
Marzo	186,08	6,00	6,26	5,92	0,34
Aprile	214,00	7,13	10,74	6,02	4,72
Maggio	238,44	7,69	10,08	6,46	3,62
Giugno	193,79	6,46	7,72	6,09	1,63
Luglio	181,23	5,85	6,04	5,72	0,32
Agosto	186,33	6,01	8,37	5,73	2,64
Settembre	179,58	5,99	6,75	5,76	0,99
Ottobre	198,75	6,41	11,78	5,77	6,01
Novembre	246,41	8,21	13,39	5,86	7,53
Dicembre	195,40	6,30	6,72	6,11	0,61
	2386,80				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{2386,80}{366} = 6,5213$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 13,39 } differenza massima 7,67.
» minima » » 5,72 }

Anno 1881.

STATISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI.

MESI	ALTEZZA MENSILE Sommata Met. lin.	ALTEZZA MENSILE Media Met. lin.	ALTEZZA Massima Met. lin.	ALTEZZA Minima Met. lin.	DIFFERENZE Met. lin.
Gennaio	44,40	1,43	1,50	1,40	0,10
Febbraio	42,35	1,46	2,20	1,38	0,82
Marzo	43,34	1,40	1,70	1,38	0,32
Aprile	52,00	1,73	3,40	1,40	2,00
Maggio	52,35	1,69	2,20	1,50	0,70
Giugno	45,10	1,50	1,60	1,45	0,15
Luglio	41,68	1,34	1,50	1,20	0,30
Agosto	33,38	1,08	1,20	1,00	0,20
Settembre	36,85	1,23	1,60	1,10	0,50
Ottobre	36,05	1,16	1,30	1,10	0,20
Novembre	42,35	1,41	2,60	1,10	1,50
Dicembre	36,55	1,18	1,20	1,10	0,10
	506,40				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{506,40}{366} = 1,6568.$

Altezza massima dell' intero anno met. lin. 3,40 }
» minima » » 1,10 } differenza massima 2,30.

INDICE DEL VOLUME IX.° SERIE 3.ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. VI. VII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I. (1876-77).
» Vol. II. (1877-78).
» Vol. III. (1878-79).
» Vol. IV. (1879-80).
» Vol. V. (1880-81).

MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. disp. 1, 2.
» » » » » » » II. » 1, 2.
» » » » » » » III.
» » » » » » » IV.
» » » » » » » V.
» » » » » » » VI.
» » » » » » » VII.
» » » » » » » VIII.
» » » » » » » IX.

MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I.
» » » » » » » II.
» » » » » » » III.
» » » » » » » IV.
» » » » » » » V.
» » » » » » » VI.